TD 8 : Martingales, jeux et Markov

Exercice 1.— “La prochaine carte sera rouge !”

Vous prenez un jeu de 52 cartes supposé parfaitement mélangé. Vous retournez les cartes une à une, jusqu'à ce que, à un moment de votre choix qui peut dépendre de l'observation des cartes déjà retournées, vous déclariez “La prochaine carte sera rouge !”. Montrer que, quel que soit ce “choix”, votre probabilité de succès est invariablement de 1/2.

Remarque : *Si vous avez déjà retourné 51 cartes, vous êtes obligé de déclarer la dernière comme étant rouge (et ce même si vous savez à cet instant qu'elle est noire).*
Indication : *On pourra noter X_n la probabilité d'avoir raison si on s'arrête après avoir retourné n cartes et sachant la valeur/couleur de ces n cartes, et observer que X_n est une martingale...*

Exercice 2.— Chaîne de Markov et problème de martingale

Soit Q une matrice de transition sur un espace dénombrable E. Pour f fonction positive définie sur E, on note Πf la fonction définie par

$$\Pi f(x) = \sum_{y \in E} Q(x,y) f(y).$$

Soit X un processus aléatoire à valeurs dans E. Montrer que X est un processus de Markov de matrice de transition Q si et seulement si pour toute fonction positive f définie sur E, le processus suivant est une martingale :

$$f(X_n) - f(X_0) - \sum_{k=0}^{n-1} (\Pi f - f)(X_k)$$

Exercice 3.— ABRACADABRA !

Soit $\omega = \omega_1 \cdots \omega_m$ un mot de $m \geq 1$ lettres sur l'alphabet latin de 26 lettres (par exemple, ω = ABRACADABRA). Le but de cet exercice est de calculer l'espérance du premier temps d'apparition de ω dans une suite de lettres écrites au hasard, $(x_n)_{n \geq 1}$, les x_n étant donc indépendants et uniformes sur $\{a, \dots, z\}$. Ce temps T est donc défini par

$$T = \inf\{n \geq m, x_{n-m+1} \cdots x_n = \omega\}.$$

On note $P(\omega)$ l'ensemble des entiers $k \in \{1, \dots, m\}$ tels que $\omega_1 \cdots \omega_k = \omega_{m-k+1} \cdots \omega_m$, et on remarque que $P(\omega)$ contient toujours m. Enfin, on note $R(\omega) = \sum_{k \in P(\omega)} 26^k$. Nous cherchons en particulier à montrer que $\mathbb{E}[T] = R(\omega)$, et non, plus simplement,26^m, comme on pourrait le penser.

I Approche martingale

Dans cette approche, on considère une banque qui propose à tout joueur le désirant le jeu équitable consistant à parier le montant de son choix sur l'issue de la prochaine lettre sortie, et à gagner 26 fois sa mise s'il avait vu juste. On suppose qu'à chaque instant $k \geq 1$, un nouveau joueur arrive et commence à tenter sa chance. Il mise 1 euro sur l'issue $x_k = \omega_1$, puis, s'il gagne, il remise tout son gain (26 euros) sur l'issue $x_{k+1} = \omega_2$, et ainsi de suite, en s'arrêtant seulement une fois qu'il aura perdu (donc perdu sa mise initiale de 1 euro) ou bien gagné 26^m euros (moins sa mise initiale de 1 euro) si l'ensemble du mot ω est sorti comme il l'avait parié. On note S_n le profit de la banque à l'instant n, de sorte que l'on a $S_0 = 0$, $S_1 = 1$ si $x_1 \neq \omega_1$, et $S_1 = -25$ si $x_1 = \omega_1$.

1. Montrer que S_n est une martingale, et que l'on a $S_T = T - R(\omega)$.
2. En utilisant un théorème limite approprié, en déduire le résultat.
3. Soit T_2 le deuxième instant où le mot ω apparaît dans la suite (x_n). Montrer que $\mathbb{E}[T_2 - T] = 26^m$.

II Approche chaîne de Markov

On se propose de réétudier le problème à travers les chaînes de Markov (un peu moins élégantes en l'occurrence). Pour chaque $n \geq 0$, on note l_n le plus grand $k \in \{0, ..., m\}$ tel que ($n \geq k$ et) $x_{n-k+1} \cdots x_n = \omega_1 \cdots \omega_k$.

1. Montrer que l_n est une chaîne de Markov irréductible sur l'espace d'état fini $\{0, \ldots, m\}$.
   On ne cherchera pas à calculer explicitement la matrice de transition

   Ainsi, le problème se ramène au calcul de $\mathbb{E}_0[T_m]$ pour cette chaîne de Markov (expliquer). La question suivante le reliera au calcul de $\mathbb{E}_m[T_m]$, plus simple car abordable à travers la mesure de probabilité invariante μ, étudiée dans la question 3.
2. Soit $p = p(\omega)$ le plus grand élément différent de m de $P(\omega)$, ou 0 si $P(\omega) = \{m\}$. Justifier les égalités suivantes :

   $$\mathbb{E}_m[T_m] = \mathbb{E}_p[T_m] = \mathbb{E}_0[T_m] - \mathbb{E}_0[T_p].$$
3. On suppose dans cette question que z n'appartient pas à ω, et on étend x aux entiers négatifs en posant $x_n = z$ (déterministe) si $n \leq 0$. On désigne par $(L_n)_{n\geq 0}$ le processus à valeurs dans l'ensemble des mots de m lettres défini par $L_n = x_{n-m+1} \cdots x_n$.
   (a) Montrer que L est une chaîne de Markov de mesure invariante uniforme sur l'ensemble des mots de m lettres.
   (b) En utilisant le fait que l_n peut s'écrire comme une fonction déterministe de L_n, en déduire que l'on a $\mu(\{m\}) = 26^{-m}$.
   (c) Adapter la preuve pour montrer que $\mu(\{m\}) = 26^{-m}$ reste vrai si ω contient toutes les lettres de l'alphabet.
4. Conclure la preuve. On pourra commencer par remarquer que

   $$P(\omega) = P(\omega_1 \cdots \omega_p) \cup \{m\},$$

   et effectuer un raisonnement par récurrence sur la longueur de ω.

Remarque : La suite des instants d'apparition de ω est une suite de renouvellement. La suite des différences entre deux instants successifs est i.i.d d'espérance 26^m, la fréquence asymptotique d'apparition de ces instants est $1/26^m$, mais cela nous dit peu de choses sur l'espérance du premier temps...