TD 9 : Martingales et temps d'atteinte

Exercice 0.— Martingales et monotonie

Montrer sur un exemple qu'une martingale (X_n) peut être presque sûrement strictement monotone à partir d'un certain rang (aléatoire).
Remarque : Notons que ce rang est nécessairement aléatoire : si n_0 est donné, on ne peut avoir, avec probabilité un, la suite $(X_n)_{n\geq n_0}$ strictement monotone.

Exercice 1.— Loi du supremum

On suppose que $(X_n)_{n\geq 0}$ est un processus aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ tel que $X_0 = 0$, tel que $\forall n \geq 0, X_{n+1} - X_n \leq 1$, et qui tend presque sûrement vers $-\infty$. On suppose de plus qu'il existe un $a > 0$ tel que a^{X_n} est une martingale pour la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$.

1. Déterminer la loi de $X^* := \sup_{n\geq 0} X_n$, qui est presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{N}$.
2. Application : Soit (X_n) la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ biaisée vers le bas, qui part de 0 et qui vérifie
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = X_n + 1|\mathcal{F}_n) = 1 - \mathbb{P}(X_{n+1} = X_n - 1|\mathcal{F}_n) = p < 1/2.$$
   (a) Déterminer la loi de X^* en utilisant la question précédente.
   (b) Uniquement en utilisant la théorie des chaînes de Markov, retrouver le fait que X^* doit suivre une loi géométrique.

Exercice 2.— Processus de branchement

On considère un modèle de population où à chaque génération, chaque individu meurt et donne naissance indépendamment à un nombre d'enfants distribué selon la loi μ sur $\mathbb{N}$, supposée vérifier $\mu(0) > 0$. On note $m = \sum i\mu(i)$ l'espérance du nombre d'enfants d'un individu.
Soit Z_n le nombre d'individus à la $n-$ème génération, avec $Z_0 = 1$. On rappelle que $M_n = Z_n/m^n$ définit donc une martingale.

1. Dans le cas $m = 1$, prouver que M_n converge presque sûrement et en déduire que Z_n converge presque sûrement vers 0.
2. Dans le cas $m < 1$, prouver que la probabilité de non-extinction ($\mathbb{P}(Z_n > 0)$) décroît exponentiellement vite.
3. Dans le cas $m > 1$, justifier l'existence d'un unique $s \in (0, 1)$ tel que $\mathbb{E}[s^{Z_1}] = s$. Montrer que (s^{Z_n}) est une martingale, et en déduire le résultat suivant : Avec probabilité s, la population s'éteint en temps fini, et avec probabilité $1 - s$, elle explose (i.e. $Z_n \to \infty$).

Exercice 3.— Retour dans le système solaire ?

Vous vous retrouvez dans une navette spatiale qui a quitté le système solaire et cherche à y revenir. Malheureusement, l'appareil est défectueux, et votre latitude de contrôle s'en trouve fortement restreinte. A partir de votre point de départ, vous pouvez décider d'avancer tout droit sur une distance L_1 de votre choix. La navette avancera alors tout droit... mais dans une direction et un sens aléatoire ! Une fois que la navette se sera déplacée de cette distance L_1, vous pourrez choisir une distance L_2, mais de nouveau la navette parcourra cette distance dans une direction aléatoire... Parviendrez-vous à rejoindre le système solaire ?

On propose la modélisation suivante : L'univers est modélisé par $\mathbb{R}^3$ et centré en le soleil O. Le système solaire est une boule de centre O et de rayon R. On note (U_n) la suite des directions aléatoires, qui forme une suite i.i.d de variables uniformes sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, et on introduit la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(U_1, ..., U_n)$. La suite des distances $(L_n)_{n\geq 1}$ est un processus *prévisible* pour la filtration $\mathcal{F}_n$, qui reflète votre stratégie. On note (X_n) la suite de vos positions après n choix des distances, c'est-à-dire après que la navette a parcouru une distance totale $L_1 + ... + L_n$ dans l'espace. Votre position initiale est $X_0 = (r, 0, 0)$ avec $r > R$. On cherche donc à avoir $||X_n|| < R$ pour un temps $n > 0$ (aléatoire)...

On admettra le résultat suivant : Si x et y sont des réels strictement positifs et λ désigne la mesure uniforme sur la sphère unité, alors

$$\int \frac{1}{||\ (x,0,0) + y\vec{u}\ ||}\ \lambda(d\vec{u}) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \geq y \\ 1/y & \text{si } x < y \end{cases}$$

1. Ecrire X_n en fonction de $L_1, \ldots, L_n$ et $U_1, \ldots, U_n$.
2. Justifier que X_n ne peut pas prendre la valeur 0 avec probabilité strictement positive, puis montrer que $(1/||X_n||)$ est une surmartingale.
3. En définissant $T := \inf\{n > 0, ||X_n|| < R\}$, montrer que l'on a toujours
$$\mathbb{P}(T < \infty) \leq R/r.$$
Ainsi, quel que soit votre stratégie, vous aurez au moins une probabilité $(r - R)/r$ de ne jamais réussir à revenir dans le système solaire...
4. Pour tout $\varepsilon > 0$, définir une stratégie permettant de revenir dans le système solaire avec probabilité au moins $\frac{R}{r} - \varepsilon$.