TD 10 : Quelques applications des martingales

Exercice 1.— Processus de branchement 2

On considère de nouveau le modèle de branchement du TD précédent, dans le cas surcritique où la loi de reproduction μ a un premier moment $m > 1$. La population totale à la $n-$ème génération est Z_n, avec $Z_0 = 1$. On note également $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, \ldots, Z_n)$. On sait que la martingale $M_n = Z_n/m^n$ converge vers une v.a. $M_\infty \geq 0$.
On aimerait voir que sur l'événement de non-extinction, la population croît effectivement en m^n, par exemple car $M_\infty > 0$... Dans la suite, on note $r = \mathbb{P}(M_\infty > 0) \in [0, 1)$.

1. On veut d'abord montrer que si $r > 0$, alors r est égal à la probabilité de non-extinction (et donc $M_\infty > 0$ p.s. sur l'événement de non-extinction).
   (a) On introduit le processus $A_n = \mathbb{P}(M_\infty > 0|\mathcal{F}_n)$. Montrer qu'il s'agit d'une martingale fermée convergeant presque sûrement vers $\mathbb{1}_{M_\infty>0}$.
   (b) Montrer que $A_n \geq r$ sur l'événement $\{Z_n > 0\}$. On pourra calculer explicitement
   $$A_n = 1 - (1 - r)^{Z_n}.$$
   (c) Conclure.
2. Montrer que si μ a un deuxième moment, on est dans le cadre de la première question
3. Montrer que dans tous les cas, pour tout $\varepsilon > 0$, la variable aléatoire $Z_n/(M - \varepsilon)^n$ tend presque sûrement vers $+\infty$ sur l'événement de non-extinction. On pourra penser à un argument de couplage.

Exercice 2.— L'indépendance des accroissements et la convergence en loi impliquent la convergence presque sûre

Soit (X_n) une suite de variables réelles indépendantes (pas nécessairement de même loi) et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. On suppose que la suite S_n converge en loi vers S. On veut montrer qu'alors la suite S_n converge presque sûrement. On introduit $\delta > 0$ tel que $|\mathbb{E}[e^{itS}]| \geq 1/2$ pour tout réel $t \in [-\delta, \delta]$ (on utilise le fait que la fonction caractéristique de S est continue en 0).

1. Pour $t \in [-\delta, \delta]$, on introduit la suite
   $$M_n^{(t)} := \frac{\mathbb{E}[e^{itS_n}]}{|\mathbb{E}[e^{itS_n}]|}.$$
   Montrer qu'il existe un rang déterministe n_0 dépendant de t tel que la suite $(M_n^{(t)})_{n\geq n_0}$ est bien définie et est une martingale complexe [1] de norme bornée par 3.

1. Une martingale complexe est simplement un processus dont la partie réelle et la partie imaginaire sont des martingales

2. En déduire que pour tout $t \in [-\delta, \delta]$, la suite (e^{itS_n}) est presque sûrement convergente.
3. Montrer que presque-sûrement, l'ensemble des $t \in [-\delta, \delta]$ tels que la suite $(e^{itS_n})n \geq 0$ ne converge pas a mesure de Lebesgue nulle.
4. (question sans proba) Montrer le résultat.

Exercice 3.— Théorème des trois séries de Kolmogorov

Soit (X_n) une suite de variables réelles indépendantes (pas nécessairement de même loi) et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Le théorème des trois séries de Kolmogorov dit que la suite S_n converge presque sûrement si et seulement si il existe un $c > 0$ tel que les trois conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} &a) \quad \sum_k \mathbb{P}(|X_k| > c) < \infty \\ &b) \quad \sum_k \mathrm{Var}(X_k \mathbb{1}_{|X_k| \leq c}) < \infty \\ &c) \quad \text{la série des } \mathbb{E}(X_k \mathbb{1}_{|X_k| \leq c}) \text{ est convergente.} \end{aligned}$$

Une remarque non tout-à-fait triviale est que le "$\exists c$" pourrait être remplacé par "$\forall c$" dans le théorème...

1. On suppose que les trois conditions sont satisfaites
   (a) Expliquer pourquoi la série des $X_k \mathbb{1}_{|X_k| > c}$ est convergente.
   (b) En introduisant $Y_k = X_k \mathbb{1}_{|X_k| \leq c} - \mathbb{E}[X_k \mathbb{1}_{|X_k| \leq c}]$ et $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, prouver que $\tilde{S}_n$ converge p.s., puis montrer que S_n converge presque sûrement.
2. On suppose maintenant que la suite S_n converge presque-sûrement vers S variable aléatoire réelle, et on prend $c > 0$ quelconque.
   (a) Montrer que la condition $a)$ est satisfaite.
   (b) On rappelle le théorème de Lindeberg Feller : Si pour tout n, les variables $(Z_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$ sont indépendantes et centrées et vérifient :

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Z_{n,k}^2] \underset{n \to \infty}{\to} \sigma^2$$

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Z_{n,k}^2 \mathbb{1}_{|Z_{n,k}|} \geq \varepsilon] \underset{n \to \infty}{\to} 0,$$

   alors la v.a. $\sum_{k=1}^n Z_{n,k}$ converge en loi vers la loi gaussienne de variance σ^2.
   En introduisant $\sigma_n = \sum_{k \leq n} \mathrm{Var}(Y_k)$ (où Y_k a été défini en 1.(b)) et $Z_{n,k} = Y_k / \sigma_n$, montrer que $b)$ est nécessairement satisfaite.
   (c) Enfin, montrer que $c)$ est également satisfaite.