TD 11 : Convergences L^1, L^2 et applications

Exercice 1.— Une fonction lipschitzienne est l'intégrale de sa dérivée

On considère l'espace de probabilité $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, où λ désigne la mesure de Lebesgue, et $\mathcal{F}_n$ la filtration dyadique (cf TD7,Ex 5).
Par ailleurs, soit f un fonction lipschitzienne et

$$X_n(\omega) := 2^n[f((i+1)/2^n) - f(i/2^n)] \qquad \text{si } \omega \in]i/2^n, (i+1)/2^n].$$

Montrer que X_n est une martingale convergeant p.s. et L^1, et que si $X_\infty = \lim X_n$, alors on a

$$\forall a < b, \quad f(b) - f(a) = \int_a^b X_\infty d\lambda.$$

Exercice 2.— Lois du 0-1

La loi du 0-1 de Lévy affirme que si $\mathcal{F}_n$ est une filtration, $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\vee_n \mathcal{F}_n)$ et si $A \in \mathcal{F}_\infty$, alors $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_n]$ converge vers $\mathbb{1}_A$ p.s.
Expliquer comment cette loi découle du cours, puis déduire, de cette loi du 0-1 de Lévy, la loi du 0-1 de Kolmogorov.

Exercice 3.— Comportement de quelques martingales de carré intégrable

Question préliminaire : Prouver le lemme de Kronecker : Si (a_n) est une suite de nombres réels strictement positifs tendant vers $+\infty$ et si (x_n) est une suite telle que la série des x_n/a_n est convergente, alors

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^n a_k \to 0.$$

1. (a) Soit X une martingale de carré intégrable et $\Delta_n = X_n - X_{n-1}$. Montrer que si a_n croît vers $+\infty$ et $\sum_n \mathbb{E}[\Delta_n^2]/a_n^2 < \infty$, alors X_n/a_n tend vers 0.
   (b) En déduire que si S_n est la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ et si $\varepsilon > 0$, alors $S_n/n^{1/2}\log(n)^{1/2+\varepsilon}$ tend vers 0 p.s.
   Remarque : Ce n'est ni une loi des grands nombres, ni un théorème central limite, mais plutôt une version (très) affaiblie de la loi du logarithme itéré.
2. Soit X une martingale de carré intégrable vérifiant $X_0 = 0$, et

$$X_n^2 = M_n + A_n$$

   la décomposition de Doob de la sous-martingale X_n^2, avec M martingale et A processus croissant (au sens large) prévisible, qui tend p.s vers A_∞ à valeurs dans $[0, +\infty]$.
   (a) Montrer l'inégalité suivante :

$$\mathbb{E}[\sup_{0\le k\le n} |X_k|^2] \le 4\mathbb{E}[A_\infty].$$

(b) En déduire que X_n converge p.s. vers une limite finie sur l'événement $\{A_\infty < \infty\}$

(c) On cherche maintenant à contrôler X_n sur l'événement $\{A_\infty = \infty\}$. Soit $f \geq 1$ une fonction croissante vérifiant $\int_{\mathbb{R}_+} f(t)^{-2} dt < \infty$, par exemple $f(t) = 1 + t^{1/2} \log(t)^{1/2+\varepsilon}$ pour un $\varepsilon > 0$. Montrer que $X_n / f(A_n)$ tend p.s. vers 0 sur $\{A_\infty = \infty\}$.