ENS de Lyon
L3 - Intégrations et Probabilités

2^{nd} semestre 2021-2022

Examen – Vendredi 29 avril 2022, 9h-12h

Les notes de cours sont autorisées. Les réponses doivent être justifiées avec le plus grand soin. Les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Si $x, y \in \mathbb{R}$, *on notera* $x \wedge y = \min(x, y)$ *et* $x \vee y = \max(x, y)$.

Exercice 1. [Formule de Stirling]
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles, telle que $M_1 = \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$, et convergeant en loi vers une variable aléatoire X.

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. A-t-on que $(f(X_n))$ converge en loi vers $f(X)$? Justifier la réponse.

(2) Montrer que $\mathbb{E}[|X|] \leq M_1$. On pourra considérer les quantités $\mathbb{E}[|X_n| \wedge K], n \geq 1$, où $K > 0$ est fixé.

(3) A-t-on que $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$ lorsque $n \to \infty$? Justifier la réponse.

(4) On suppose que $M_2 = \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[X_n^2] < \infty$. Montrer que l'on a, pour tout $K > 0$,
$$\limsup_{n\to\infty} |\mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}[X]| \leq \sqrt{M_2\, \mathbb{P}(|X| \geq K)} + \mathbb{E}\big[|X| \mathbf{1}_{\{|X|\geq K\}}\big].$$
Indication : on pourra introduire
$$f_K(x) = (-K) \vee x \wedge K\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$
la fonction identité sur $\mathbb{R}$ *tronquée au niveau* K, *et remarquer que l'on a*
$$|x - f_K(x)| \leq |x| \mathbf{1}_{\{|x|\geq K\}}\,.$$

(5) En déduire que sous les hypothèses de la question précédente, on a que $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$ lorsque $n \to \infty$.

(6) Soit n un entier fixé, et Y_n une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre n. Montrer que l'on a
$$\mathbb{E}\left[\frac{(Y_n - n)_+}{\sqrt{n}}\right] = \frac{e^{-n} n^{n+1/2}}{n!}\,,$$
où l'on a noté $x_+ = x \vee 0$ la partie positive de x.

(7) Montrer que $(Y_n - n)_+/\sqrt{n}$ converge en loi lorsque $n \to \infty$ vers N_+, où N est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

(8) Montrer que $\mathbb{E}[(Y_n - n)_+/\sqrt{n}]$ converge vers $\mathbb{E}[N_+]$.

(9) En déduire la formule de Stirling
$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,(1 + o(1))\,, \qquad n \to \infty.$$

Exercice 2. [Limite d'intégrale]
Soit f une fonction continue bornée de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la limite suivante :
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} f(x/n) \mathrm{d}x.$$
On pourra faire intervenir n variables aléatoires exponentielles de paramètre 1 indépendantes.

Exercice 3. [Sous-espaces de L^2 invariants par translation.]

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, et on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (l'espace des fonctions f à valeurs complexes telles que $|f|^p$ est intégrable, et considérées à égalité λ-presque partout près).

Par ailleurs, pour $h \in \mathbb{R}$ et toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on note $\tau_h f(x) = f(x-h)$, de sorte que τ_h induit une fonction $\tau_h : L^2 \to L^2$. Enfin, on note e_h la fonction $x \mapsto e^{\mathrm{i}hx}$, et $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ la transformée de Fourier L^2.

Le but de ce problème est de caractériser les sous-espaces vectoriels fermés I de L^2 tels que pour tout $f \in I$ et $h \in \mathbb{R}$, on ait $\tau_h f \in I$. On dira que I est *invariant par les translations.* Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on notera J_A le sous-espace des $f \in L^2$ telles que $\mathbf{1}_A\, f = 0$, c'est-à-dire que f s'annule presque partout sur A, et $I_A = \{f \in L^2 : \mathcal{F}f \in J_A\}$

(1) Soit M un sous-espace vectoriel de L^2, et $\mathcal{F}M = \{\mathcal{F}f : f \in M\}$. Montrer que M est fermé si et seulement si $\mathcal{F}M$ est fermé.

(2) Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, montrer que I_A et J_A sont fermés.

(3) Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, montrer que I_A est également invariant par les translations.

Dans la suite, on se donne un sous-espace fermé I de L^2 invariant par les translations. On note $J = \mathcal{F}I$, et P la projection orthogonale de L^2 sur J.

(4) Montrer que pour tout $g \in J$, et tout $h \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}_h\, g \in J$.

(5) Montrer que pour tout $f \in L^2$ et $g \in J$, la fonction $(f - Pf)\overline{g}$ est dans L^1, et de transformée de Fourier (au sens L^1) nulle. En déduire que $f\,\overline{g} = (Pf)\,\overline{g}$ presque partout. Justifier que l'on peut remplacer $\overline{g}$ par g dans cette égalité.

(6) En déduire que pour tout $f, g \in L^2$, on a

$$f\,(Pg) = (Pf)(Pg) = g\,(Pf)\,.$$

(7) Soit g une fonction dans L^2 qui ne s'annule pas, et $\chi = (Pg)/g$. Montrer que $\chi^2 = \chi$, et en déduire que χ est la fonction indicatrice d'un ensemble mesurable A.

(8) Montrer que $Pf = \mathbb{1}_A f$ pour tout $f \in L^2$, et en déduire $J = J_{^cA}$ et $I = I_{^cA}$.

(9) Montrer que $I_A = I_B$ si et seulement si $\lambda(A\Delta B) = 0$, où $A\Delta B$ désigne la différence symétrique $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Exercice 4. [Théorème central limite ?]

Dans cet exercice, on suppose que X est une variable aléatoire réelle symétrique, au sens où X et $-X$ ont même loi, et de queue de distribution

$$\mathbb{P}(|X| > x) = x^{-2}, \quad x \geq 1.$$

(1) Soit φ la fonction caractéristique de X. Montrer que l'on a, pour $t \neq 0$,

$$1 - \varphi(t) = \mathbb{E}[1 - \cos|tX|] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(|X| \geq \frac{y}{|t|}\right) \sin y\, dy.$$

(2) Montrer que, lorsque t tend vers 0, on a le développement limité

$$\varphi(t) = 1 - t^2 \ln(1/|t|) + O(t^2).$$

Indication : On pourra commencer par montrer le résultat

$$\int_{|t|}^1 y^{-2} \sin y\ \mathrm{d}y = \ln(1/|t|) + O(1).$$

(3) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables iid de même loi que X, et $(S_n)_{n\geq 1} = (X_1 + \ldots + X_n)_{n\geq 1}$ la marche aléatoire associée. Montrer que la suite $S_n/\sqrt{n\ln(n)}$ converge en loi vers une variable aléatoire N dont on précisera la loi.

(4) Commenter ce résultat. Les premiers et deuxièmes moments de $S_n/\sqrt{n\ln(n)}$ convergent-ils vers ceux de N ?