ENS de Lyon 2^nd semestre 2020-2021

L3 - Intégrations et Probabilités

CORRIGÉ de l'examen du Vendredi 29 avril 2022, 9h-12h

Les notes de cours sont autorisées. Les réponses doivent être justifiées avec le plus grand soin. Les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Si $x, y \in \mathbb{R}$, on notera $x \wedge y = \min(x, y)$ et $x \vee y = \max(x, y)$.

Exercice 1. [Formule de Stirling]
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles, telle que $M_1 = \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$, et convergeant en loi vers une variable aléatoire X.

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. A-t-on que $(f(X_n))$ converge en loi vers $f(X)$? Justifier la réponse.

Solution : Soit g une fonction continue bornée, alors $g \circ f$ est aussi continue bornée, et donc la convergence en loi de (X_n) vers X implique que

$$\mathbb{E}[g(f(X_n))] \to \mathbb{E}[g(f(X))] ,$$

ce qui est la définition de $f(X_n)$ converge vers $f(X)$ en loi. Réponse : oui.

(2) Montrer que $\mathbb{E}[|X|] \leq M_1$. On pourra considérer les quantités $\mathbb{E}[|X_n| \wedge K], n \geq 1$, où $K > 0$ est fixé.

Solution : Soit $K > 0$. La fonction $x \mapsto |x| \wedge K$ est continue bornée. Donc la convergence en loi de X_n vers X donne

$$\mathbb{E}[|X| \wedge K] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n| \wedge K] \leq M_1 .$$

On conclut par théorème de la limite monotone en faisant $K \to \infty$.

(3) A-t-on que $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$ lorsque $n \to \infty$? Justifier la réponse.

Solution : Considérons pour X_n une variable aléatoire de la forme nB_n où B_n est une v.a. de Bernoulli de paramètre $1/n$. Clairement X_n converge en loi vers 0, mais $\mathbb{E}[X_n] = 1$. Réponse : non.

(4) On suppose que $M_2 = \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[X_n^2] < \infty$. Montrer que l'on a, pour tout $K > 0$,

$$\limsup_{n\to\infty} |\mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}[X]| \leq \sqrt{M_2\, \mathbb{P}(|X| \geq K)} + \mathbb{E}\big[|X| \mathbf{1}_{\{|X|\geq K\}}\big].$$

Indication : on pourra introduire

$$f_K(x) = (-K) \vee x \wedge K , \qquad x \in \mathbb{R} ,$$

la fonction identité sur $\mathbb{R}$ tronquée au niveau K, et remarquer que l'on a

$$|x - f_K(x)| \leq |x| \mathbf{1}_{\{|x|\geq K\}} .$$

Solution : On introduit les termes $f_K(X_n)$ et $f_K(X)$ dans la différence des espérances. La remarque donne

$$\mathbb{E}[|X_n - f_K(X_n)|] \leq \mathbb{E}[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|\geq K\}}] \leq \sqrt{M\mathbb{P}(|X_n| \geq K)}$$

par Cauchy-Schwarz. À K fixé, la limsup de ce terme est majorée par $\sqrt{M\mathbb{P}(|X| \geq K)}$ par les théorèmes de convergence de la proba qu'une suite de variables aléatoires convergeant en loi appartienne à un fermé donné. Le reste est immédiat.

(5) En déduire que sous les hypothèses de la question précédente, on a que $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$ lorsque $n \to \infty$.

Solution : C'est évident par convergence monotone (deux fois).

(6) Soit n un entier fixé, et Y_n une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre n. Montrer que l'on a

$$\mathbb{E}\left[\frac{(Y_n - n)_+}{\sqrt{n}}\right] = \frac{e^{-n} n^{n+1/2}}{n!},$$

où l'on a noté $x_+ = x \vee 0$ la partie positive de x.

Solution : On a $(Y_n - n)_+ = 0$ si $Y_n \leq n$. On écrit

$$\mathbb{E}\left[\frac{(Y_n - n)_+}{\sqrt{n}}\right] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k \geq n} (k-n) \frac{e^{-n} n^k}{k!} = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k \geq n} \frac{n^k}{(k-1)!} - \sum_{k \geq n} \frac{n^{k+1}}{k!} \right).$$

Tous les termes sauf le premier se simplifient par un décalage d'indice, et il reste

$$\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \frac{n^n}{(n-1)!}$$

ce qui donne le résultat après multipication par n haut et bas. Noter que la convergence absolue des séries concernées n'est pas ici un problème par comparaison élémentaire entre factorielle et polynômes.

(7) Montrer que $(Y_n - n)_+/\sqrt{n}$ converge en loi lorsque $n \to \infty$ vers N_+, où N est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

Solution : On peut supposer que Y_n est donnée par une somme de n variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètre (=espérance, =variance) 1, auquel cas la convergence en loi de $(Y_n - n)/\sqrt{n}$ vers N est juste le théorème de la limite centrale. On applique la question 1. avec la fonction $x \mapsto x_+$.

(8) Montrer que $\mathbb{E}[(Y_n - n)_+/\sqrt{n}]$ converge vers $\mathbb{E}[N_+]$.

Solution : Il nous faut montrer que la suite dont on prend l'espérance est bornée dans L^2 pour pouvoir appliquer la quesiton 3. Mais

$$\mathbb{E}[((Y_n - n)_+/\sqrt{n})^2] \leq \mathbb{E}[((Y_n - n)/\sqrt{n})^2] = \frac{Var(Y_n)}{n} = 1.$$

(9) En déduire la formule de Stirling

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,(1 + o(1)), \qquad n \to \infty.$$

Solution : Calculons

$$\mathbb{E}[N_+] = \int_0^\infty x \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

On conclut.

Exercice 2. [Limite d'intégrale]
Soit f une fonction continue bornée de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} f(x/n) \mathrm{d}x.$$

On pourra faire intervenir n variables aléatoires exponentielles de paramètre 1 indépendantes.

Soit donc (X_k) une suite de variables aléatoires exponentielles de paramètre 1 indépendantes. Déterminons la loi de $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Pour cela, on prend g fonction test mesurable positive *et on détermine l'espérance de $g(S_n)$:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(S_n)] &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1+\ldots+x_n)e^{-x_1-\ldots-x_n}\mathbb{1}_{x_1\geq 0,\ldots,x_n\geq 0}\mathrm{d}x_1\ \ldots\mathrm{d}x_n \\
&= \int_{\mathbb{R}_n} g(t)e^{-t}\mathbb{1}_{x_1\geq 0,\ldots,x_{n-1}\geq 0, t\geq x_1+\ldots+x_{n-1}}\mathrm{d}x_1\ \ldots\mathrm{d}x_{n-1}\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} g(t)e^{-t}\left(\int_{\mathbb{R}_+^{n-1}}\mathbb{1}_{x_1+\ldots+x_{n-1}\leq t}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_{n-1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} g(t)e^{-t}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Pour obtenir la deuxième égalité, on a utilisé le changement de variable $(x_1,\ldots x_{n-1},t) = (x_1,\ldots x_{n-1}, x_1+\ldots+x_n)$. Pour obtenir la troisième, on a utilisé le théorème de Fubini pour les fonctions positives, et pour obtenir la quatrième, la valeur $t^{n-1}(n-1)!$ pour le volume du simplexe de dimension $n-1$. Ainsi la loi de S_n est à densité, et de densité $e^{-t}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que l'intégrale dont on veut déterminer la limite n'est autre que $\mathbb{E}[f(S_n/n)]$. Or, par la loi des grands nombres, S_n/n tend presque sûrement vers $\mathbb{E}[X_1]=1$. On en déduit que $f(S_n/n)$ tend presque-sûrement vers $f(1)$. Cette variable étant bornée (par $\|f\|_\infty$), il y a également convergence dans L^1 et en particulier $\mathbb{E}[f(S_n/n)]\to f(1)$.

Exercice 3. [Sous-espaces de L^2 invariants par translation.]

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, et on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ (l'espace des fonctions f à valeurs complexes telles que $|f|^p$ est intégrable, et considérées à égalité λ-presque partout près).

Par ailleurs, pour $h\in\mathbb{R}$ et toute fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ on note $\tau_h f(x) = f(x-h)$, de sorte que τ_h induit une fonction $\tau_h : L^2\to L^2$. Enfin, on note e_h la fonction $x\mapsto e^{\mathrm{i}hx}$, et $\mathcal{F}: L^2\to L^2$ la transformée de Fourier L^2.

Le but de ce problème est de caractériser les sous-espaces vectoriels fermés I de L^2 tels que pour tout $f\in I$ et $h\in\mathbb{R}$, on ait $\tau_h f\in I$. On dira que I est *invariant par les translations*. Pour $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on notera J_A le sous-espace des $f\in L^2$ telles que $\mathbf{1}_A f = 0$, c'est-à-dire que f s'annule presque partout sur A, et $I_A = \{f\in L^2 : \mathcal{F}f\in J_A\}$

(1) Soit M un sous-espace vectoriel de L^2, et $\mathcal{F}M = \{\mathcal{F}f : f\in M\}$. Montrer que M est fermé si et seulement si $\mathcal{F}M$ est fermé.

L'application $\mathcal{F}$ est une isométrie de L^2 sur lui-même, d'où le résultat.

(2) Pour $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, montrer que I_A et J_A sont fermés.

On a $J_A = \mathcal{F}I_A$, donc il suffit de montrer que J_A est fermé. Mais si f_n est une suite de fonctions de J_A qui tend vers f, alors on a

$$\int_A |f|^2\mathrm{d}\lambda = \int |f-f_n|^2\mathbb{1}_A\mathrm{d}\lambda \leq \|f-f_n\|_2^2 \to 0,$$

d'où $|f|^2\mathbb{1}_A = 0$ puis $f\mathbb{1}_A=0$, donc $f\in J_A$.

(3) Pour $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, montrer que I_A est également invariant par les translations.

Soit $f\in I_A$ et $h\in\mathbb{R}$. On a alors

$$\mathcal{F}(\tau_h f) = e_{-h}\mathcal{F}f,$$

et $\mathbb{1}_A e_{-h}\mathcal{F}f = e_{-h}\mathbb{1}_A\mathcal{F}f = 0$, donc $\tau_h f\in I_A$.

Dans la suite, on se donne un sous-espace fermé I de L^2 invariant par les translations. On note $J=\mathcal{F}I$, et P la projection orthogonale de L^2 sur J.

(4) Montrer que pour tout $g \in J$, et tout $h \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}_h\, g \in J$.

Soit $g \in J$, et $f \in I$ telle que $g = \mathcal{F}f$. On a alors comme dans la question précédente $\mathrm{e}_h\, g = \mathcal{F}(\tau_{-h} f)$ avec $\tau_{-h} f \in I$ donc $\mathrm{e}_h\, g \in J$.

(5) Montrer que pour tout $f \in L^2$ et $g \in J$, la fonction $(f - Pf)\overline{g}$ est dans L^1, et de transformée de Fourier (au sens L^1) nulle. En déduire que $f\,\overline{g} = (Pf)\,\overline{g}$ presque partout. Justifier que l'on peut remplacer $\overline{g}$ par g dans cette égalité.

g est dans J et $(f - Pf)$ dans son orthogonal, donc leur produit scalaire dans L^2 est nul, d'où $(f - Pf)\overline{g}$ dans L^1 et d'intégrale nulle. Maintenant, pour $h \in \mathbb{R}$, la transformée de Fourier (L^1) de $(f - Pf)\overline{g}$ en h est

$$\int ((f - Pf)(x))\overline{g}(x) e^{-ihx} \mathrm{d}\lambda(x) = \int (f - Pf)\overline{\mathrm{e}_h\, g},$$

et cette intégrale est nulle car $\mathrm{e}_h\, g \in J$ d'après la question précédente. On obtient donc $f\,\overline{g} = (Pf)\,\overline{g}$, ce qui équivaut aussi à l'égalité $f(x) = Pf(x)$ en tous les x en lesquels $\overline{g}$ ne s'annule pas, ou encore à l'égalité $fg = (Pf)g$.

(6) En déduire que pour tout $f, g \in L^2$, on a

$$f\,(Pg) = (Pf)(Pg) = g\,(Pf)\,.$$

Par la question précédente, en utilisant $Pg \in J$, on obtient immédiatement $f(Pg) = (Pf)(Pg)$ au sens d'égalité presque partout, puis également la deuxième égalité par symétrie des rôles de f et g.

(7) Soit g une fonction dans L^2 qui ne s'annule pas, et $\chi = (Pg)/g$. Montrer que $\chi^2 = \chi$, et en déduire que χ est la fonction indicatrice d'un ensemble mesurable A.

Par la question précédente, on a $\chi^2 = (Pg)^2/g^2 = (Pg)g/g^2 = \chi$. Donc χ est à valeurs dans $\{0, 1\}$, et l'on peut donc écrire χ comme la fonction indicatrice d'un ensemble A, forcément mesurable par mesurabilité de χ. Notons par ailleurs que χ est définie sans ambiguïté à un ensemble de mesure nulle près, et qu'il en est donc de même pour A.

(8) Montrer que $Pf = \mathbb{1}_A f$ pour tout $f \in L^2$, et en déduire $J = J_{^cA}$ et $I = I_{^cA}$.

Pour $f \in L^2$, on a en utilisant la question 6 $\mathbb{1}_A f = \chi f = (Pg)f/g = (Pf)g/g = Pf$. Par ailleurs $f \mapsto \mathbb{1}_A f$ est aussi la projection sur $J_{^cA}$: en effet $\mathbb{1}_A f \in J_{^cA}$ et $f - \mathbb{1}_A f = \mathbb{1}_{^cA} f$ est orthogonal à $J_{^cA}$. On en déduit immédiatement $J = J_{^cA}$ puis $I = I_{^cA}$.

(9) Montrer que $I_A = I_B$ si et seulement si $\lambda(A\Delta B) = 0$, où $A\Delta B$ désigne la différence symétrique $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Comme $\mathcal{F}$ est une isométrie, on a $I_A = I_B$ ssi $J_A = J_B$. Ensuite, $\lambda(A\Delta B) = 0$ implique clairement $J_A = J_B$, puisqu'alors, pour toute $f \in L^2$, on a $\mathbb{1}_A f = \mathbb{1}_B f$ dans L^2. À l'inverse, supposons $\lambda(A\Delta B) > 0$, avec par exemple $\lambda(A \backslash B) > 0$. On a alors $\mathbb{1}_{^cB} \in J_B$, et son projeté orthogonal sur J_A est $\mathbb{1}_{^cA} \neq \mathbb{1}_{^cB}$. Ainsi, $J_A \neq J_B$.

Exercice 4. [Théorème central limite ?]

Dans cet exercice, on suppose que X est une variable aléatoire réelle symétrique, au sens où X et $-X$ ont même loi, et de queue de distribution

$$\mathbb{P}(|X| > x) = x^{-2}, \quad x \geq 1.$$

(1) Soit φ la fonction caractéristique de X. Montrer que l'on a, pour $t \neq 0$,

$$1 - \varphi(t) = \mathbb{E}[1 - \cos|tX|] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(|X| \geq \frac{y}{|t|}\right) \sin y\; dy.$$

Remarquons que X est intégrable et d'intégrale nulle. Alors,

$$\begin{aligned}1-\varphi(t) &= \mathbb{E}[1-\cos(tX)-i\sin(tX)] = \mathbb{E}[1-\cos|tX|]\\ &= \mathbb{E}[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{y\le|tX|}\sin y\mathrm{d}y]\\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(y\le|tX|)\sin y\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

où la dernière égalité découle du théorème de Fubini pour les fonctions positives. On obtient bien les égalités voulues.

(2) Montrer que, lorsque t tend vers 0, on a le développement limité

$$\varphi(t) = 1 - t^2\ln(1/|t|) + O(t^2).$$

Indication : On pourra commencer par montrer le résultat

$$\int_{|t|}^1 y^{-2}\sin y\ \mathrm{d}y = \ln(1/|t|) + O(1).$$

Commençons par montrer l'indication. Écrivons

$$\begin{aligned}\left(\int_{|t|}^1 y^{-2}\sin y\ \mathrm{d}y\right) - \ln(1/|t|) &= \int_{|t|}^1 y^{-1}\left(\frac{\sin y}{y}-1\right)\ \mathrm{d}y\\ &\underset{t\to0}{\to} \int_0^1 y^{-1}\left(\frac{\sin y}{y}-1\right)\ \mathrm{d}y,\end{aligned}$$

où la fonction intégrée dans les membres de droite se prolonge par continuité en 0 et est donc intégrable sur $]0,1]$. Ensuite,

$$\begin{aligned}1-\varphi(t) &= \int_0^{|t|}\sin y\mathrm{d}y + t^2\int_{|t|}^1 y^{-2}\sin y\mathrm{d}y + t^2\int_1^{+\infty} y^{-2}\sin y\mathrm{d}y\\ &= 1-\cos t + t^2(\ln(1/|t|]) + O(1)) + t^2\int_1^{+\infty} y^{-2}\sin y\mathrm{d}y\\ &= t^2\ln(1/|t|) + O(t^2),\end{aligned}$$

en utilisant l'indication et en remarquant que 3 termes participent au $O(t^2)$.

(3) Soit $(X_n)_{n\ge1}$ une suite de variables iid de même loi que X, et $(S_n)_{n\ge1} = (X_1+\ldots+X_n)_{n\ge1}$ la marche aléatoire associée. Montrer que la suite $S_n/\sqrt{n\ln(n)}$ converge en loi vers une variable aléatoire N dont on précisera la loi.

Si l'on note φ_n la fonction caractéristique de $S_n/\sqrt{n\ln n}$, alors

$$\varphi_n(\xi) = \varphi(\xi/\sqrt{n\ln n})^n.$$

Remarquons que si $t_n = \xi/\sqrt{n\ln n}$, alors $\ln(1/|t_n|)\sim\frac{1}{2}\ln n$. Il vient alors

$$\begin{aligned}\varphi_n(\xi) &= (1-\xi^2/2n + o(1/n))^n\\ &\to \exp(-\xi^2/2).\end{aligned}$$

On reconnait la fonction caractéristique de N variable normale centrée réduite. Ainsi $S_n/\sqrt{n\ln n}$ converge en loi vers N.

(4) Commenter ce résultat. Les premiers et deuxièmes moments de $S_n/\sqrt{n\ln(n)}$ convergent-ils vers ceux de N ?

Ce résultat évoque bien-sûr le théorème central limite, mais ici la variable X n'est pas dans L^2, et d'ailleurs il faut diviser par $\sqrt{n\ln n}$ et non seulement $\sqrt{n}$ pour obtenir la convergence en loi. Le premier moment de $S_n/\sqrt{n\ln n}$ est nul et converge bien vers celui *de N. Par contre il n'y a pas convergence du deuxième moment, puisque le deuxième moment de $S_n/\sqrt{n \ln n}$ est infini.*