**Partiel – Vendredi 4 mars 2022, 10h15-12h15**

*Les notes de cours ou autres documents sont interdits.*
*Il est attendu que les réponses soient justifiées avec le plus grand soin.*

On rappelle que la loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$ est la loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et de densité $f_\theta(x)$ donnée par

$$f_\theta(x) = \theta \exp(-\theta x)\mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}.$$

**Exercice 1.** On considère $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes réelles positives ou nulles. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, ainsi que $S_\infty = \sum_k X_k$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. On s'intéresse à l'événement $S_\infty < +\infty$.

(1) Montrer que cet événement a probabilité 0 ou 1.

(2) Montrer que sous l'hypothèse $\sum_k \mathbb{E}[X_k] < +\infty$, on a presque-sûrement $S_\infty < +\infty$.

(3) On suppose dans cette question que les variables aléatoires $X_k$ sont des variables exponentielles, et que $\sum_k \mathbb{E}[X_k] = +\infty$. Montrer que $S_\infty = +\infty$ presque-sûrement.
*Indication : On pourra calculer* $\mathbb{E}[e^{-S_\infty}]$.

(4) On suppose dans cette question que $X_k/a_k$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_k$, avec les $a_k$ strictement positifs et les $p_k$ dans $[0, 1]$.

   (a) Sous l'hypothèse supplémentaire $\sum p_k < \infty$, montrer que $S_\infty$ est fini ps, déterminer son espérance, et observer que celle-ci peut être infinie.

   (b) Dans le cas général, montrer que $S_\infty$ est fini ps si et seulement si on a

$$\sum_k p_k \min(1, a_k) < +\infty.$$

   (c) Dans ce cas, retrouver l'espérance de $S_\infty$ à partir de sa fonction génératrice.

**Exercice 2.** Soit $\theta$ un nombre réel strictement positif, et $X, Y$ deux variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\theta$. Montrer que

$$\frac{X}{X+Y} \qquad \text{et} \qquad X + Y$$

sont indépendantes et déterminer leurs lois.

**Exercice 3.** On se place sur $\mathbb{R}^d$, muni de la mesure de Lebesgue $\lambda_d$. Soit également $p \in [1, +\infty[$ fixé. Pour $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on rappelle que la norme $p$ est définie par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^d |x_k|^p\right)^{1/p}$$

Pour $r \geq 0$ on considère la boule de rayon $r$ centrée en 0

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^d, \|x\|_p \leq r\}.$$

On considère également l'hypercube $C = [-1, 1]^d$.

(1) Soit $X$ une variable aléatoire uniforme sur $C$. Montrer que l'on a
$$\lambda_d(C \cap B_r) = 2^d \, \mathbb{P}(\|X\|_p \leq r).$$

(2) Dans cette question $d$ n'est plus fixé, mais l'on n'écrit pas explicitement la dépendance de $C$ et de $B_r$ en la dimension. Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que l'on a
$$\frac{\lambda_d(C \cap B_{ad^{1/p}})}{2^d} \underset{d \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 \text{ si } a > \frac{1}{(p+1)^{1/p}}, \\ 0 \text{ si } a < \frac{1}{(p+1)^{1/p}}. \end{cases}$$

**Exercice 4.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle. On suppose qu'il existe une constante $c \in ]0, \infty[$ telle que, si $Y$ est indépendante de $X$ et de même loi, alors les variables aléatoires $X + Y$ et $cX$ ont même loi. On suppose par ailleurs que $\sigma^2 := \mathrm{Var} X \in ]0, +\infty[$.

(1) Déterminer la valeur de $c$, puis montrer que $\mathbb{E}[X] = 0$.

(2) Montrer que, si $\varphi$ est la fonction caractéristique de $X$, on a le développement limité suivant lorsque $\xi$ tend vers 0 :
$$\varphi(\xi) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}\xi^2 + o(\xi^2).$$

(3) Montrer que $\varphi$ satisfait l'équation fonctionnelle
$$\varphi(\xi)^2 = \varphi(c\xi),$$
et en déduire la loi de $X$.

(4) Que se passe-t-il si, toutes choses égales par ailleurs, on suppose maintenant que $X + Y$ a la même loi que $cX + b$, pour deux constantes $c \in ]0, \infty[$ et $b \in \mathbb{R}$ ?