ENS de Lyon $\hfill$ 2nd semestre 2021-2022

L3 - Intégrations et Probabilités

---

**Corrigé du partiel – Vendredi 4 mars 2022, 10h15-12h15**

---

*Les notes de cours ou autres documents sont interdits.*
*Il est attendu que les réponses soient justifiées avec le plus grand soin.*

On rappelle que la loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$ est la loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et de densité $f_\theta(x)$ donnée par

$$f_\theta(x) = \theta \exp(-\theta x) \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}.$$

**Exercice 1.** On considère $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes réelles positives ou nulles. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, ainsi que $S_\infty = \sum_k X_k$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. On s'intéresse à l'événement $S_\infty < +\infty$.

(1) Montrer que cet événement a probabilité 0 ou 1.

*L'événement $S_\infty < +\infty$ est dans la tribu asymptotique associée aux tribus engendrées par les variables aléatoires $X_k$. Or ces tribus sont indépendantes puisque les variables aléatoires $X_k$ le sont, et la loi du 0-1 de Kolmogorov nous dit alors que la tribu asymptotique est grossière, et que donc $\mathbb{P}(S_\infty < +\infty) \in \{0, 1\}$.*

(2) Montrer que sous l'hypothèse $\sum_k \mathbb{E}[X_k] < +\infty$, on a presque-sûrement $S_\infty < +\infty$.

*Il suffit d'écrire, par le théorème de convergence monotone,*

$$\mathbb{E}[S_\infty] = \sum \mathbb{E}[X_k] < +\infty.$$

*La va $S_\infty$, à valeurs dans $[0, +\infty]$, est d'espérance finie. Elle est donc finie ps.*

(3) On suppose dans cette question que les variables aléatoires $X_k$ sont des variables exponentielles, et que $\sum_k \mathbb{E}[X_k] = +\infty$. Montrer que $S_\infty = +\infty$ presque-sûrement.
*Indication : On pourra calculer $\mathbb{E}[e^{-S_\infty}]$.*

*Commencer par rappeler que la transformée de Laplace d'une va $X$ exponentielle de paramètre $\theta$, prend en 1 la valeur*

$$\mathbb{E}[e^{-X}] = \frac{\theta}{1+\theta} = 1 - \frac{1/\theta}{1 + 1/\theta}.$$

*Rappelons également que l'on a alors $\mathbb{E}[X] = 1/\theta$. Notons $\theta_n$ la paramètre de la loi exponentielle de $X_n$. Alors,*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{-S_n}] &= \mathbb{E}[\prod_{k=1}^n e^{-X_k}] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[e^{-X_k}] \\
&= \prod_{k=1}^n 1 - \frac{1/\theta_k}{1+1/\theta_k} = \exp\left(\sum_{k=1}^n \log(1 - \frac{1/\theta_k}{1+1/\theta_k})\right).
\end{aligned}$$

*La suite $e^{-S_n}$ converge simplement vers $e^{-S_\infty}$ et est dominée par 1, et le théorème de convergence dominée nous donne alors*

$$\mathbb{E}[e^{-S_\infty}] = \exp\left(\sum_k \log(1 - \frac{1/\theta_k}{1+1/\theta_k})\right).$$

*Par ailleurs, l'hypothèse $\sum \mathbb{E}[X_k] = +\infty$ nous donne $\sum 1/\theta_k = +\infty$. Il reste alors à observer que cela entraîne que la somme des log vaut $-\infty$.*

(4) On suppose dans cette question que $X_k/a_k$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_k$, avec les $a_k$ strictement positifs et les $p_k$ dans $[0,1]$.

(a) Sous l'hypothèse supplémentaire $\sum p_k < \infty$, montrer que $S_\infty$ est fini ps, déterminer son espérance, et observer que celle-ci peut être infinie.

*Les événements $\{X_k = a_k\}$ ont probabilité $p_k$, qui forment une série sommable. Par le lemme de Borel-Cantelli, presque-sûrement, seul un nombre fini de ces événements est réalisé, et alors la suite $S_n$ stagne à partir d'un certain, et en particulier converge vers $S_\infty$ fini.*

*Par ailleurs, on a encore $\mathbb{E}[S_\infty] = \sum \mathbb{E}[X_k] = \sum a_k p_k$, et l'on peut bien-sûr avoir $\sum a_k p_k = +\infty$, par exemple si $a_k = 1/p_k$. Dans ce cas $S_\infty$ est finie ps mais d'espérance infinie.*

(b) Dans le cas général, montrer que $S_\infty$ est fini ps si et seulement si on a

$$\sum_k p_k \min(1, a_k) < +\infty.$$

*Déterminons la fonction génératrice de $S_\infty$, par un calcul similaire à celui des variables exponentielles. Ici, pour $r \in (0,1)$, on a*

$$\mathbb{E}[r^{S_\infty}] = \prod \mathbb{E}[r^{S_k}] = \prod (1 - p_k(1 - r^{a_k})) = \exp\left(\sum \log(1 - p_k(1 - r^{a_k}))\right).$$

*La va $S_\infty$ est infinie ps si et seulement si, pour un $r$ fixé dans $(0,1)$, on a $\mathbb{E}[r^{S_\infty}] = 0$, ce qui équivaut encore à*

$$\sum p_k(1 - r^{a_k}) = +\infty.$$

*Fixons donc un tel $r$. On alors $S_\infty$ finie ps ssi $\sum p_k(1-r^{a_k}) < +\infty$, ce qui équivaut encore à la finitude de la somme proposée.*

(c) Dans ce cas, retrouver l'espérance de $S_\infty$ à partir de sa fonction génératrice.

*Notons $g(r)$ la fonction génératrice de $S_\infty$, et $h_n$ celle de $X_n$. On a $\log(g_\infty) = \sum \log h_n$, d'où en dérivant*

$$\frac{g'(r)}{g(r)} = \sum_n \frac{h_n'(r)}{h_n(r)} = \sum \frac{a_n p_n r^{a_n - 1}}{h_n(r)},$$

*où l'on a utilisé le théorème de dérivation sous le signe somme, où l'hypothèse de domination des dérivées $h_n'/h_n$ est obtenue en majorant $h_n'$ par $a_n p_n$ et en minorant $h_n$ sur un compact de la forme $[r_0, 1]$ par $h_n(r_0)$, qui est uniformement minoré par une constante strictement positive puisque la somme $\sum \log(h_n(r_0))$ est finie. En prenant $r = 1$, on obtient alors, en utilisant $h_n(1) = 1 = g(1)$,*

$$\mathbb{E}[S_\infty] = g'(1) = \sum a_n p_n.$$

*Bien-sûr, cela représente ici beaucoup de travail pour un résultat simple déjà mentionné à la question 4.a...*

**Exercice 2.** Soit $\theta$ un nombre réel strictement positif, et $X, Y$ deux variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\theta$. Montrer que

$$\frac{X}{X+Y} \qquad \text{et} \qquad X+Y$$

sont indépendantes et déterminer leurs lois.

*Pour une fonction test $f$ mesurable positive, on a*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(\frac{X}{X+Y}, X+Y)] &= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f(\frac{x}{x+y}, x+y)\theta e^{-\theta(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{(0,1)\times\mathbb{R}_+^*} f(r,z)\theta^2 e^{-\theta z} z\mathrm{d}r\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

*en utilisant le changement de variable $(x,y) = \Phi(r,z) = (rz,(1-r)z)$, avec $\Phi$ qui est un $C^1$-difféomorphisme de $(0,1)\times\mathbb{R}_+^*$ dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$, de jacobien égal à $z$. On en déduit que $R = \frac{X}{X+Y}$ est indépendant de $Z = X+Y$, avec $R$ uniforme sur $(0,1)$ et $Z$ va à densité, de densité*

$$z \mapsto \theta^2 z e^{-\theta z}\mathbb{1}_{z>0}.$$

*Il s'agit d'une loi Gamma.*

**Exercice 3.** On se place sur $\mathbb{R}^d$, muni de la mesure de Lebesgue $\lambda_d$. Soit également $p \in [1,+\infty[$ fixé. Pour $x = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d$, on rappelle que la norme $p$ est définie par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^d |x_k|^p\right)^{1/p}$$

Pour $r \geq 0$ on considère la boule de rayon $r$ centrée en 0

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^d, \|x\|_p \leq r\}.$$

On considère également l'hypercube $C = [-1,1]^d$.

(1) Soit $X$ une variable aléatoire uniforme sur $C$. Montrer que l'on a

$$\lambda_d(C \cap B_r) = 2^d\ \mathbb{P}(\|X\|_p \leq r).$$

*On a $\mathbb{P}(\|X\|_p \leq r) = \mathbb{P}_X(\{x \in C, \|x\| \leq r\}) = \mathbb{P}_X(C \cap B_r)$. Il suffit alors d'observer que la loi de $X$ est $\mathbb{P}_X(dx) = 2^{-d}\mathbb{1}_C(x)\lambda_d(dx)$.*

(2) Dans cette question $d$ n'est plus fixé, mais l'on n'écrit pas explicitement la dépendance de $C$ et de $B_r$ en la dimension. Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que l'on a

$$\frac{\lambda_d(C \cap B_{ad^{1/p}})}{2^d} \underset{d\to+\infty}{\rightarrow} \begin{cases} 1 \text{ si } a > \frac{1}{(p+1)^{1/p}}, \\ 0 \text{ si } a < \frac{1}{(p+1)^{1/p}}. \end{cases}$$

*Observons que la loi de $X$ est une loi produit, et que les coordonnées $X_1,\dots,X_d$ sont donc des va iid, uniformes sur $[-1,1]$. Par ailleurs,*

$$\frac{1}{d}\|X\|_p^p = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^d |X_k|^p.$$

*Par un calcul de second moment ou par la loi faible $L^2$ des grands nombres, lorsque d tend vers l'infini, cette variable converge dans $L^2$ donc en probabilités vers $\mathbb{E}[|X_1|^p] = \frac{1}{p+1}$. Ainsi, sous l'hypothèse $a > \frac{1}{(p+1)^{1/p}}$ et donc $a^p > 1/(p+1)$, on a*

$$\frac{\lambda_d(C \cap B_{ad^{1/p}})}{2^d} = \mathbb{P}\left(\frac{1}{d}\|X\|_p^p \leq a^p\right) \underset{d\to+\infty}{\rightarrow} 1.$$

*Sous l'hypothèse $a < \frac{1}{(p+1)^{1/p}}$ et donc $a^p < 1/(p+1)$, on a au contraire*

$$\frac{\lambda_d(C \cap B_{ad^{1/p}})}{2^d} = \mathbb{P}\left(\frac{1}{d}\|X\|_p^p \leq a^p\right) \underset{d\to+\infty}{\rightarrow} 0.$$

**Exercice 4.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle. On suppose qu'il existe une constante $c \in ]0, \infty[$ telle que, si $Y$ est indépendante de $X$ et de même loi, alors les variables aléatoires $X+Y$ et $cX$ ont même loi. On suppose par ailleurs que $\sigma^2 := \mathrm{Var}X \in ]0, +\infty[$.

(1) Déterminer la valeur de $c$, puis montrer que $\mathbb{E}[X] = 0$.

*Comme $X$ et $Y$ sont indépendantes et de même loi, on a*

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}X + \mathrm{Var}Y = 2\mathrm{Var}X = 2\sigma^2.$$

*Par ailleurs, on a aussi*

$$\mathrm{Var}(cX) = c^2\sigma^2.$$

*Or $X+Y$ et $cX$ ont même loi et $\sigma^2 > 0$, d'où $c^2 = 2$ puis $c = \sqrt{2}$ en utilisant la positivité de c. Ensuite, on a également*

$$2\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[\sqrt{2}X] = \sqrt{2}\mathbb{E}[X],$$

*d'où $\mathbb{E}[X] = 0$.*

(2) Montrer que, si $\varphi$ est la fonction caractéristique de $X$, on a le développement limité suivant lorsque $\xi$ tend vers 0 :

$$\varphi(\xi) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}\xi^2 + o(\xi^2).$$

*La variable aléatoire $X$ est de carré intégrable, et on rappelle qu'alors sa fonction caractéristique $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^2$, avec*

$$\begin{cases} \varphi(0) & = 1 \\ \varphi'(0) & = \mathrm{i}\mathbb{E}[X] = 0, \\ \varphi''(0) & = -\mathbb{E}[X^2] = -\mathrm{Var}X = -\sigma^2. \end{cases}$$

*La formule de Taylor-Young nous donne alors directement le développement limité demandé.*

(3) Montrer que $\varphi$ satisfait l'équation fonctionnelle

$$\varphi(\xi)^2 = \varphi(c\xi),$$

et en déduire la loi de $X$.

*Le fait que $X+Y$ et $\sqrt{2}X$ aient même loi implique que*

$$\phi(\xi)^2 = \phi(\sqrt{2}\xi),$$

*et en itérant*

$$\phi(\xi)^{2^n} = \phi(2^{n/2}\xi)$$

*ce pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On réécrit cela*

$$\phi(\xi) = \phi(\xi/2^{n/2})^{2^n} = (1 - \sigma^2\frac{\xi^2}{2^n} + o(1/2^n))^{2^n},$$

*qui converge vers $\exp(-\sigma^2\xi^2/2)$. On reconnaît la fonction caractéristique associée à une variable gaussienne centrée de variance $\sigma^2$. La fonction caractéristique caractérisant la loi, on en conclut que $X$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\sigma^2$. Par ailleurs, on a raisonné jusqu'ici par condition nécessaire, mais on peut également facilement vérifier que réciproquement, si $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ alors $\varphi$ est solution de l'équation fonctionnelle proposée, et $X$ satisfait les conditions imposées dans l'énoncé.*

(4) Que se passe-t-il si, toutes choses égales par ailleurs, on suppose maintenant que $X+Y$ a la même loi que $cX+b$, pour deux constantes $c \in ]0, \infty[$ et $b \in \mathbb{R}$ ?

*Si $X+Y$ et $cX+b$ ont même loi, alors on a toujours $c = \sqrt{2}$ par le même argument, mais cette fois $2\mathbb{E}[X] = \sqrt{2}\mathbb{E}[X] + b$, soit $\mathbb{E}[X] = b/(2-\sqrt{2})$. Clairement, si $X$ et $Y$*

*ont même loi, alors il en est de même de $X+a$ et $Y+a$ pour toute constante $a$ fixée. On a donc*

$$(X-\mathbb{E}[X])+(Y-\mathbb{E}[Y]) \underset{\text{loi}}{=} \sqrt{2}(X+\frac{b}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\mathbb{E}[X])$$

*et on simplifie le membre de droite en $\sqrt{2}(X-\mathbb{E}[X])$. Comme $X-\mathbb{E}[X]$ et $Y-\mathbb{E}[Y]$ sont indépendantes, on déduit que $X-\mathbb{E}[X]$ satisfait les conditions des questions précédentes. On en déduit que $X-\mathbb{E}[X]$ est gaussienne centrée de variance $\sigma^2$, et donc que $X$ est gaussienne de moyenne $b/(2-\sqrt{2})$ et de variance $\sigma^2$.*