Examen – Jeudi 4 mai 2023, 9h-12h

Les notes de cours sont interdites. Les réponses doivent être justifiées avec le plus grand soin. Les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et on écrit v.a. i.i.d. pour "variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées". Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on note également $x \wedge y = \min(x, y)$.
On rappelle les résultats suivants vus en cours ou en TD :

— *Si $(S_n)_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ issue de 0, alors $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.*

— Cas particulier du théorème de temps d'atteinte *: Si $(S_n)_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ issue de 1 et T est le temps d'atteinte de 0 (i.e $T = \inf\{n \geq 0, S_n = 0\}$), alors*
$$\mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(S_n = 0).$$

Exercice 1.— De la bonne utilisation des théorèmes limites...

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1, autrement dit $\mathbb{P}(X_1 \geq x) = e^{-x}$ pour $x \geq 0$. On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, et on s'intéresse au comportement asymptotique de la probabilité de l'événement $\{S_n > n\}$.

Alice affirme que cette probabilité tend vers 0, en utilisant le raisonnement suivant :

Par la loi forte des grands nombres, on sait que
S_n/n tend presque-sûrement vers $\mathbb{E}[X_1] = 1$, donc
$$\mathbb{P}(S_n > n) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > 1\right) \to \mathbb{P}(1 > 1) = 0.$$

Détecter la faille du raisonnement d'Alice, et déterminer la limite de la probabilité de l'événement $\{S_n > n\}$ à l'aide d'un raisonnement valide.

Exercice 2.— Fonction caractéristique et variance

Soit X une variable aléatoire réelle et φ_X sa fonction caractéristique.

(1) On suppose, dans cette question seulement, $\mathbb{E}[X^2] < +\infty$. Justifier que φ_X est deux fois dérivable en 0, et exprimer la variance de X en fonction de $\varphi'_X(0)$ et $\varphi''_X(0)$.

(2) Montrer que l'on a, pour tout $\xi > 0$,
$$\frac{2 - \varphi_X(\xi) - \varphi_X(-\xi)}{\xi^2} = \mathbb{E}\left[\frac{1 - \cos(\xi X)}{\xi^2}\right].$$

(3) On suppose que φ_X est deux fois dérivable en 0. Montrer qu'alors
$$\mathbb{E}[X^2] \leq -\varphi''_X(0),$$
puis en déduire qu'il y a égalité.

(4) Soit $\alpha > 2$ et φ_α la fonction $\xi \mapsto e^{-|\xi|^\alpha}$. Montrer qu'il n'existe pas de v.a. réelle X de fonction caractéristique φ_α.

Exercice 3.— Convergence en loi et moments

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles convergeant en loi vers une variable aléatoire X_∞. Soit $q \in]0, +\infty[$. On suppose qu'il existe M_q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\mathbb{E}[|X_n|^q] \leq M_q < +\infty$.

(1) Montrer que X_∞ est dans L^q et $\mathbb{E}[|X_\infty|^q] \leq M_q$. On pourra commencer par considérer les quantités $\mathbb{E}\left[(|X_n| \wedge r)^q\right]$, pour un $r > 0$, puis faire tendre r vers $+\infty$.

(2) Soit $p \in]0, q[$. Montrer que pour tout $r > 0$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on a

$$\mathbb{E}[|X_n|^p \, \mathbb{1}_{|X_n|\geq r}] \leq r^{p-q} M_q,$$

et en déduire que $\mathbb{E}[|X_n|^p] \to \mathbb{E}[|X_\infty|^p]$.

(3) A-t-on nécessairement $\mathbb{E}\left[|X_n|^q\right] \to \mathbb{E}\left[|X_\infty|^q\right]$? On pourra penser à prendre X_n de la forme $a_n Y_n$, avec Y_n une variable de Bernoulli de paramètre p_n tendant vers 0.

(4) Application : On suppose désormais que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathrm{Var}(X_1) = 1$. Montrer que l'on a

$$\mathbb{E}\big[|X_1 + \ldots + X_n|\big] \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}.$$

Exercice 4.— Récurrence des marches aléatoires unidimensionnelles de pas centrés

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ des v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et $(S_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire associée, définie par $S_0 = 0$ et pour $n \geq 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. On suppose $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$.

(1) On suppose $\mathbb{E}[X_1] \neq 0$. Montrer que $|S_n|$ tend vers $+\infty$ p.s., et en déduire que la marche aléatoire est transiente.

(2) On suppose désormais $\mathbb{E}[X_1] = 0$. Montrer que l'on a alors, pour tout choix de $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k\leq n} \mathbb{P}(|S_k| \leq \varepsilon n) \to 1.$$

(3) On rappelle la définition de la fonction de Green g associée à la marche aléatoire, définie pour $l \in \mathbb{Z}$ par $g(l) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(S_n = l)$. Montrer que l'on a

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}, |l|\leq \varepsilon n} g(l) \geq \sum_{k\leq n} \mathbb{P}(|S_k| \leq \varepsilon n).$$

(4) En déduire un minorant pour $g(0)$, et conclure que la marche aléatoire est récurrente.

Exercice 5.— Marches aléatoires de pas non-intégrables

Soient $(S_n^{(1)})_{n\geq 0}$, $(S_n^{(2)})_{n\geq 0}$ et $(S_n^{(3)})_{n\geq 0}$ trois marches aléatoires simples sur $\mathbb{Z}$ issues de 0. On note $(T_k)_{k\geq 0}$ les temps de passage successifs de la marche aléatoire $(S_n^{(2)})_{n\geq 0}$ en 0, et $(T'_k)_{k\geq 0}$ ceux de la marche aléatoire $(S_n^{(2)}, S_n^{(3)})_{n\geq 0}$ en $(0, 0)$. Autrement dit, $T_0 = T'_0 = 0$ et pour tout $k \geq 0$,

$$T_{k+1} := \inf\{n > T_k, S_n^{(2)} = 0\},$$
$$T'_{k+1} := \inf\{n > T'_k, \big(S_n^{(2)}, S_n^{(3)}\big) = (0, 0)\}.$$

Pour rappel, on a montré en cours que les T_k et les T'_k sont finis presque-sûrement et que les v.a. $(T_{k+1} - T_k)$ sont i.i.d., et de même pour les v.a. $(T'_{k+1} - T'_k)$. On définit $A_k = S^{(1)}_{T_k}$ et $A'_k = S^{(1)}_{T'_k}$ pour $k \geq 0$.

(1) Montrer que A et A' sont des marches aléatoires.

(2) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(T_1 = 2n) = \frac{1}{2n-1}\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} n^{-3/2}$.
On pourra penser aux résultats rappelés en introduction.

(3) En déduire que $\mathbb{E}[|A_1|] = +\infty$.
On pourra utiliser le résultat de la dernière question de l'exercice 3.

(4) Pour $(Z_n)_{n\geq 0}$ processus à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ et $z \in \mathbb{Z}^d$, on note $N_z(Z) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{Z_n = z}$ le nombre de passages du processus Z en z. Montrer que l'on a

$$N_0(A) = N_{(0,0)}\left((S_n^{(1)}, S_n^{(2)})_{n\geq 0}\right),$$
$$N_0(A') = N_{(0,0,0)}\left((S_n^{(1)}, S_n^{(2)}, S_n^{3})_{n\geq 0}\right).$$

(5) La marche aléatoire A est-elle récurrente ? Et la marche aléatoire A' ?