ENS de Lyon — 2$^{\text{e}}$ semestre 2022-2023

L3 - Intégrations et Probabilités

Corrigé de l'examen du jeudi 4 mai 2023, 9h-12h

Les notes de cours sont interdites. Les réponses doivent être justifiées avec le plus grand soin. Les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *et on écrit v.a. i.i.d. pour "variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées". Pour* $x, y \in \mathbb{R}$, *on note également* $x \wedge y = \min(x, y)$.

On rappelle les résultats suivants vus en cours ou en TD :

— *Si* $(S_n)_{n\geq 0}$ *est une marche aléatoire simple sur* $\mathbb{Z}$ *issue de 0, alors* $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

— Cas particulier du théorème de temps d'atteinte *: Si* $(S_n)_{n\geq 0}$ *est une marche aléatoire simple sur* $\mathbb{Z}$ *issue de 1 et* T *est le temps d'atteinte de 0 (i.e* $T = \inf\{n \geq 0, S_n = 0\}$*), alors*

$$\mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(S_n = 0).$$

Exercice 1.— De la bonne utilisation des théorèmes limites...

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1, autrement dit $\mathbb{P}(X_1 \geq x) = e^{-x}$ pour $x \geq 0$. On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, et on s'intéresse au comportement asymptotique de la probabilité de l'événement $\{S_n > n\}$.

Alice affirme que cette probabilité tend vers 0, en utilisant le raisonnement suivant :

Par la loi forte des grands nombres, on sait que
S_n/n *tend presque-sûrement vers* $\mathbb{E}[X_1] = 1$, *donc*

$$\mathbb{P}(S_n > n) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > 1\right) \to \mathbb{P}(1 > 1) = 0.$$

Détecter la faille du raisonnement d'Alice, et déterminer la limite de la probabilité de l'événement $\{S_n > n\}$ à l'aide d'un raisonnement valide.

Corrigé: La convergence p.s. des variables aléatoires S_n/n *vers 1 n'implique pas la convergence de l'événement* $\{S_n/n > 1\}$ *vers l'événement* $\{1 > 1\}$, *donc la limite proclamée dans le raisonnement d'Alice n'est pas justifiée.*

Par contre on peut montrer que la limite vaut $1/2$ *à l'aide du théorème central limite. En effet, les variables aléatoires* X_n *sont dans* L^2, *d'espérance 1 et de variance* $\sigma^2 =$. *Par le théorème central limite, la suite* $(S_n - n)/\sigma\sqrt{n}$ *converge en loi vers* N *une v.a. de loi normale centrée réduite, et la fonction de répartition de* N *étant continue, on en déduit*

$$\mathbb{P}(S_n > n) = \mathbb{P}((S_n - n)/\sigma\sqrt{n} > 0) \to \mathbb{P}(N > 0) = 1/2.$$

(Par ailleurs, la limsup de l'évenement $\{S_n/n > 1+\varepsilon\}$ *est incluse dans l'événement* $\{\liminf S_n/n \geq 1 + \varepsilon\}$, *donc la LGN nous permettrait de conclure* $\mathbb{P}(S_n/n > 1 + \varepsilon) \to 0$.*)*

Exercice 2.— Fonction caractéristique et variance

Soit X une variable aléatoire réelle et φ_X sa fonction caractéristique.

(1) On suppose, dans cette question seulement, $\mathbb{E}[X^2] < +\infty$. Justifier que φ_X est deux fois dérivable en 0, et exprimer la variance de X en fonction de $\varphi'_X(0)$ et $\varphi''_X(0)$.

Corrigé: Si $\mathbb{E}[X^2] < +\infty$, alors on sait que φ_X est C^2 avec, pour $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'_X(\xi) = \mathbb{E}[iXe^{i\xi X}], \quad \varphi''_X(\xi) = \mathbb{E}[-X^2 e^{i\xi X}].$$

En particulier, on a

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = -\varphi''_X(0) + \varphi'_X(0)^2.$$

(2) Montrer que l'on a, pour tout $\xi > 0$,

$$\frac{2 - \varphi_X(\xi) - \varphi_X(-\xi)}{\xi^2} = \mathbb{E}\left[\frac{1 - \cos(\xi X)}{\xi^2}\right].$$

Corrigé: Soit $\xi > 0$. Alors

$$\frac{2 - \varphi_X(\xi) - \varphi_X(-\xi)}{\xi^2} = \mathbb{E}\left[\frac{2 - e^{i\xi X} - e^{-i\xi X}}{\xi^2}\right] \qquad = 2\mathbb{E}\left[\frac{1 - \cos(\xi X)}{\xi^2}\right].$$

(3) On suppose que φ_X est deux fois dérivable en 0. Montrer qu'alors

$$\mathbb{E}[X^2] \leq -\varphi''_X(0),$$

puis en déduire qu'il y a égalité.

Corrigé: Si φ_X est 2 fois dérivable en 0, alors on a

$$\mathbb{E}\left[\frac{2 - 2\cos(\xi X)}{\xi^2}\right] = \frac{2 - \varphi_X(\xi) - \varphi_X(-\xi)}{\xi^2} \to -\varphi''_X(0)$$

lorsque ξ tend vers 0. Par ailleurs, $2 - 2\cos(\xi X)/\xi^2$ est positif ou nul, et converge simplement vers la fonction X^2 quand ξ tend vers 0. Par le lemme de Fatou, on a donc

$$\mathbb{E}[X^2] \leq \liminf \mathbb{E}\left[\frac{2 - 2\cos(\xi X)}{\xi^2}\right] = -\varphi''_X(0).$$

En particulier $\mathbb{E}[X^2] < +\infty$, et on a donc $\mathbb{E}[X^2] = -\varphi''_X(0)$ comme dans la question précédente.

(4) Soit $\alpha > 2$ et φ_α la fonction $\xi \mapsto e^{-|\xi|^\alpha}$. Montrer qu'il n'existe pas de v.a. réelle X de fonction caractéristique φ_α.

Corrigé: Remarquons que φ_α est continue sur $\mathbb{R}$ et C^2 sur $\mathbb{R}*$, avec $\varphi'_\alpha(\xi) = -\alpha|\xi|^{\alpha-1}\varphi_\alpha(\xi)$ et $\varphi''_\alpha(\xi) = \left(\alpha^2|\xi|^{2(\alpha-1)} - \alpha(\alpha-1)|\xi|^{\alpha-2}\right)\varphi_\alpha(\xi)$. En particulier, φ'_α et φ''_α tendent vers 0 en 0, et en utilisant 2 fois le théorème de limite de la dérivée, on en déduit que φ_α est 2 fois dérivable en 0, avec $\varphi'_\alpha(0) = \varphi''_\alpha(0) = 0$. Si X était une v.a. de fonction caractéristique φ_α, on aurait alors $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^2] = 0$. Mais la v.a. X serait alors p.s. égale à 0, et aurait donc pour fonction caractéristique la fonction égale à 1 partout. On aboutit à une contradiction, et φ_α n'est donc pas une fonction caractéristique.

Exercice 3.— Convergence en loi et moments

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles convergeant en loi vers une variable aléatoire X_∞. Soit $q \in]0, +\infty[$. On suppose qu'il existe M_q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\mathbb{E}[|X_n|^q] \leq M_q < +\infty$.

(1) Montrer que X_∞ est dans L^q et $\mathbb{E}[|X_\infty|^q] \leq M_q$. On pourra commencer par considérer les quantités $\mathbb{E}\left[(|X_n| \wedge r)^q\right]$, pour un $r > 0$, puis faire tendre r vers $+\infty$.

Corrigé: Pour $r > 0$, la fonction $x \mapsto |x| \wedge r$ est continue bornée, et la convergence en loi nous dit alors

$$\mathbb{E}\left[(|X_n| \wedge r)^q\right] \to \mathbb{E}\left[(|X_\infty| \wedge r)^q\right].$$

Or $\mathbb{E}\left[(|X_n| \wedge r)^q\right] \leq M_q$, donc on en déduit $\mathbb{E}\left[(|X_\infty| \wedge r)^q\right] \leq M_q$. Ensuite, on peut utiliser le théorème de convergence monotone pour en déduire $\mathbb{E}\left[|X_\infty|^q\right] \leq M_q$.

(2) Soit $p \in]0, q[$. Montrer que pour tout $r > 0$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on a

$$\mathbb{E}[|X_n|^p \ \mathbb{1}_{|X_n| \geq r}] \leq r^{p-q} M_q,$$

et en déduire que $\mathbb{E}[|X_n|^p] \to \mathbb{E}[|X_\infty|^p]$.

Corrigé: Soit donc $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On a alors

$$\mathbb{E}[|X_n|^p \ \mathbb{1}_{|X_n| \geq r}] \leq \mathbb{E}[r^{p-q}|X_n|^q \ \mathbb{1}_{|X_n| \geq r}] \leq r^{p-q}\mathbb{E}[|X_n|^q \ \mathbb{1}_{|X_n| \geq r}] \leq r^{p-q} M_q.$$

Ensuite, on écrit, pour $r > 0$,

$$\begin{aligned}
\limsup_n |\mathbb{E}[|X_n|^p] - \mathbb{E}[|X_\infty|^p]| &\leq \limsup |\mathbb{E}\left[(|X_n| \wedge r)^p\right] - \mathbb{E}\left[(|X_\infty| \wedge r)^p\right]| \\
&\quad + \limsup \left|\mathbb{E}\left[\left(|X_n|^p - (|X_n| \wedge r)^p\right) \mathbb{1}_{|X_n| \geq r}\right]\right| \\
&\quad + \limsup \left|\mathbb{E}\left[\left(|X_\infty|^p - (|X_\infty| \wedge r)^p\right) \mathbb{1}_{|X_\infty| \geq r}\right]\right| \\
&\leq 0 + 2r^{p-q} M_q.
\end{aligned}$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, on en déduit que la limsup est nulle, et donc $\mathbb{E}[|X_n|^p] \to \mathbb{E}[|X_\infty|^p]$.

(3) A-t-on nécessairement $\mathbb{E}\left[|X_n|^q\right] \to \mathbb{E}\left[|X_\infty|^q\right]$? On pourra penser à prendre X_n de la forme $a_n Y_n$, avec Y_n une variable de Bernoulli de paramètre p_n tendant vers 0.

Corrigé: La réponse est négative. Par exemple, si $X_n = a_n Y_n$ avec $Y_n \sim Bin(p_n)$, où p_n est strictement positif et tend vers 0 et $a_n = p_n^{-1/q}$, alors $\mathbb{E}[|X_n|^q] = 1$ et X_n converge en probabilité et donc en loi vers $X_\infty = 0$. Cette suite vérifie toutes les hypothèses de l'énoncé, mais on n'a pas $\mathbb{E}[|X_n|^q] \to \mathbb{E}[|X_\infty|^q]$.

(4) Application : On suppose désormais que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathrm{Var}(X_1) = 1$. Montrer que l'on a

$$\mathbb{E}\big[|X_1 + \ldots + X_n|\big] \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}.$$

Corrigé: Notons $S_n = |X_1 + \ldots + X_n|$. Par le théorème central limite, on a la convergence en loi de $S_n/\sqrt{n}$ vers N v.a. normale centrée réduite. De plus, $\mathbb{E}[(S_n/\sqrt{n})^2] = 1$. Par les questions précédente, avec $q = 2$ et $p = 1$, on en déduit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right|\right] \to \mathbb{E}[|N|] &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |x| e^{-x^2/2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x e^{-x^2/2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-e^{-x^2/2}\right]_0^{+\infty} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 4.— Récurrence des marches aléatoires unidimensionnelles de pas centrés

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ des v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et $(S_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire associée, définie par $S_0 = 0$ et pour $n \geq 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. On suppose $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$.

(1) On suppose $\mathbb{E}[X_1] \neq 0$. Montrer que $|S_n|$ tend vers $+\infty$ p.s., et en déduire que la marche aléatoire est transiente.

Corrigé: Notons $m = \mathbb{E}[X_1] \neq 0$. Alors, par la loi forte des grands nombres appliquée aux v.a. i.i.d. intégrable (X_n), on déduit que S_n/mn tend presque sûrement vers 1, et donc $|S_n|$ tend vers $+\infty$ p.s. Ainsi la marche aléatoire ne passe presque sûrement qu'un nombre fini de fois en chaque entier, autrement dit la marche est transiente.

(2) On suppose désormais $\mathbb{E}[X_1] = 0$. Montrer que l'on a alors, pour tout choix de $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k\leq n}\mathbb{P}(|S_k| \leq \varepsilon n) \to 1.$$

Corrigé: En utilisant encore la loi des grands nombres, on sait que S_n/n tend vers 0 (p.s. et donc) en probabilité. Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}(|S_n|/n \leq \varepsilon) \to 1$. En appliquant le lemme de Cesàro à cette suite, on en déduit

$$\frac{1}{n}\sum_{k\leq n}\mathbb{P}(|S_k| \leq \varepsilon k) \to 1.$$

On en déduit alors le résultat demandé en observant que l'on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k\leq n}\mathbb{P}(|S_k| \leq \varepsilon k) \leq \frac{1}{n}\sum_{k\leq n}\mathbb{P}(|S_k| \leq \varepsilon n) \leq 1.$$

(3) On rappelle la définition de la fonction de Green g associée à la marche aléatoire, définie pour $l \in \mathbb{Z}$ par $g(l) = \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(S_n = l)$. Montrer que l'on a

$$\sum_{l\in\mathbb{Z},|l|\leq\varepsilon n} g(l) \geq \sum_{k\leq n}\mathbb{P}(|S_k| \leq \varepsilon n).$$

Corrigé: On a

$$\begin{aligned}\sum_{k\leq n}\mathbb{P}(|S_k| \leq \varepsilon n) &= \sum_{k\leq n}\sum_{l\in\mathbb{Z},|l|\leq\varepsilon n}\mathbb{P}(S_k = l)\\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z},|l|\leq\varepsilon n}\sum_{k\leq n}\mathbb{P}(S_k = l) \qquad \leq \sum_{l\in\mathbb{Z},|l|\leq\varepsilon n} g(l).\end{aligned}$$

(4) En déduire un minorant pour $g(0)$, et conclure que la marche aléatoire est récurrente.

Corrigé: Rappelons que l'on a $g(l) = \mathbb{P}(T_l < \infty)g(0) \leq g(0)$, où T_l est le temps d'atteinte de l. Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1+2\lfloor\varepsilon n\rfloor}{n}g(0) &\geq \frac{1}{n}\sum_{l\in\mathbb{Z},|l|\leq\varepsilon n} g(l)\\ &\geq \frac{1}{n}\sum_{k\leq n}\mathbb{P}(|S_k| \leq \varepsilon n).\end{aligned}$$

Quand n tend vers $+\infty$, le membre de gauche tend vers $2\varepsilon g(0)$ et le membre de droite vers 1, d'où $g(0) \geq \frac{1}{2\varepsilon}$. Ceci est valable pour tout $\varepsilon > 0$, donc $g(0) = +\infty$, et un résultat du cours nous dit alors que la marche est récurrente.

Exercice 5.— Marches aléatoires de pas non-intégrables

Soient $(S_n^{(1)})_{n\geq 0}$, $(S_n^{(2)})_{n\geq 0}$ et $(S_n^{(3)})_{n\geq 0}$ trois marches aléatoires simples sur $\mathbb{Z}$ issues de 0. On note $(T_k)_{k\geq 0}$ les temps de passage successifs de la marche aléatoire $(S_n^{(2)})_{n\geq 0}$ en 0, et $(T'_k)_{k\geq 0}$ ceux de la marche aléatoire $(S_n^{(2)}, S_n^{(3)})_{n\geq 0}$ en $(0,0)$. Autrement dit, $T_0 = T'_0 = 0$ et pour tout $k \geq 0$,

$$T_{k+1} := \inf\{n > T_k, S_n^{(2)} = 0\},$$
$$T'_{k+1} := \inf\{n > T'_k, \left(S_n^{(2)}, S_n^{(3)}\right) = (0,0)\}.$$

Pour rappel, on a montré en cours que les T_k et les T'_k sont finis presque-sûrement et que les v.a. $(T_{k+1} - T_k)$ sont i.i.d., et de même pour les v.a. $(T'_{k+1} - T'_k)$. On définit $A_k = S_{T_k}^{(1)}$ et $A'_k = S_{T'_k}^{(1)}$ pour $k \geq 0$.

(1) Montrer que A et A' sont des marches aléatoires.

Corrigé: Il s'agit de voir que pour tout $k \geq 0$, la v.a. $A_{k+1} - A_k$ est indépendante de $(A_0, \ldots, A_k)$ et de même loi que A_1 (et de même pour A'). Il y a de multiples manières d'écrire cela. Par exemple, on utilise le fait que les v.a. $(T_{k+1} - T_k)$ sont i.i.d. et indépendantes de la suite $(S_n^{(1)})_{n\geq 0}$, que l'on notera plutôt $(S_n)_{n\geq 0}$ par commodité. La preuve sera alors encore valide pour montrer que A' est une marche aléatoire. Pour cela, on peut fixer $0 = t_0 \leq \ldots \leq t_k$ et $(s_0, \ldots, s_{t_k})$ et conditionner à l'événement $E = \{T_0 = t_0, \ldots, T_k = t_k, S_0 = s_0, \ldots, S_{t_k} = s_k\}$, en supposant cet événement de probabilité strictement positive. On a alors, pour $z \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{k+1} - A_k = z | E) &= \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(\{S_{t_k+n} - S_{t_k} = z\} \cap \{T_{k+1} - T_k = n\} | E) \\
&= \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(\{S_n = z\} \cap \{T_1 = n\}) \\
&= \mathbb{P}(A_1 = z).
\end{aligned}$$

où dans la deuxième ligne on a utilisé que $T_{k+1} - T_k$ est indépendant de $(T_0, \ldots, T_k)$ et $S_{t_k+n} - S_{t_k}$ indépendant que $(S_0, \ldots, S_{t_k})$, ainsi que l'indépendance de ces deux suites. On en déduit bien que $A_{k+1} - A_k$ est indépendant de $(A_0, \ldots, A_k)$ et de même loi que A_1.

(2) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(T_1 = 2n) = \frac{1}{2n-1}\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} n^{-3/2}$.
On pourra penser aux résultats rappelés en introduction.

Corrigé: Notons $S_n^{(2)} = S_n$ par commodité, et supposons que sous $\mathbb{P}_z$, le processus (S_n) soit une marche aléatoire simple issue de z. Observons que conditionnellement à l'événement $S_1 = s_1$ (avec $s_1 \in \{-1, 1\}$), le processus $(S_{n+1})_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire simple issue de s_1. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 = 2n) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(T_1 = 2n | S_1 = 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(T_1 = 2n | S_1 = -1) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}_1(T_1 = 2n-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_{-1}(T_1 = 2n-1) \qquad = \mathbb{P}_1(T_1 = 2n-1),
\end{aligned}$$

en utilisant $\mathbb{P}_1(T_1 = 2n-1) = \mathbb{P}_{-1}(T_1 = 2n-1)$ *par symétrie évidente du problème. De même, on a aussi*

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \mathbb{P}_1(S_{2n-1}) = 0.$$

Le théorème de temps d'atteinte, puis l'autre résultat rappelé en introduction, permettent alors de conclure

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_1 = 2n) &= \frac{1}{2n-1}\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \\ &\sim \frac{1}{2n}\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \sim 12\sqrt{\pi} n^{-3/2}.\end{aligned}$$

(3) En déduire que $\mathbb{E}[|A_1|] = +\infty$.
On pourra utiliser le résultat de la dernière question de l'exercice 3.

Corrigé: On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|A_1|] &= \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}[|A_{2n}|\mathbb{1}_{T_1=2n}] \\ &= \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}[|A_{2n}|]\mathbb{P}(T_1 = 2n),\end{aligned}$$

en utilisant l'indépendance de A_{2n} *et de* T_1*. Or* $\mathbb{E}[|A_{2n}|]\mathbb{P}(T_1 = 2n) \sim \frac{1}{\pi n}$ *en utilisant l'exercice 3, donc la somme est infinie, et* $\mathbb{E}[|A_1|] = +\infty$*. On n'est donc plus dans le cadre de pas intégrables comme dans l'exercice 4.*

(4) Pour $(Z_n)_{n\geq 0}$ processus à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ et $z \in \mathbb{Z}^d$, on note $N_z(Z) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{Z_n=z}$ le nombre de passages du processus Z en z. Montrer que l'on a

$$\begin{aligned}N_0(A) &= N_{(0,0)}\left((S_n^{(1)}, S_n^{(2)})_{n\geq 0}\right), \\ N_0(A') &= N_{(0,0,0)}\left((S_n^{(1)}, S_n^{(2)}, S_n^{(3)})_{n\geq 0}\right).\end{aligned}$$

Corrigé: Le résultat est immédiat (et déterministe) par construction des processus.

(5) La marche aléatoire A est-elle récurrente ? Et la marche aléatoire A' ?

Corrigé: D'après le cours, on sait que le processus $(S_n^{(1)}, S_n^{(2)})_{n\geq 0}$ *est une marche aléatoire récurrente, et le processus* $(S_n^{(1)}, S_n^{(2)}, S_n^{(3)})_{n\geq 0}$ *une marche aléatoire transiente. Ainsi,* $N_0(A)$ *est infini ps et* $N_0(A')$ *fini ps, donc la marche aléatoire* A *est récurrente et la marche aléatoire* A' *transiente. Au passage, remarquons que les sauts des marches aléatoires* A *et* A' *sont symétriques. On a alors vu en cours que l'on a ps* $\limsup A_k = \limsup A'_k = +\infty$ *et* $\liminf A_k = \liminf A'_k = -\infty$*. Il est intéressant de remarquer que le processus* A'*, tout en étant transient, oscille. En particulier, les sauts qu'il effectue lors de ses changements de signe doivent avoir une amplitude tendant vers* $+\infty$*...*