
Partiel – Jeudi 9 mars 2023, 10h15-12h15

---

*Le sujet est composé de quatre exercices indépendants. Le quatrième est un exercice "bonus" à ne traiter qu'après avoir éventuellement terminé de traiter les trois premiers. Les notes de cours sont **interdites**. Il est attendu que les réponses soient justifiées avec le plus grand soin.*

Notations et rappels. Toutes les variables aléatoires sont implicitement définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On dit que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, ou $X \sim \text{Geom}(p)$ si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p.$$

On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, ou $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, si la loi de X est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et de densité

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

On dit que X suit une loi normale centrée réduite si X est à valeurs réelles et de fonction caractéristique

$$\varphi_X(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Exercice 1. [Moments de la loi gaussienne]

Soit N une variable aléatoire réelle de loi normale centrée réduite.

(1) Justifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires e^{zN} et N^k sont intégrables, avec

$$\mathbb{E}[e^{zN}] = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{z^k}{k!} \mathbb{E}[N^k].$$

ainsi [1] que $\mathbb{E}[e^{zN}] = e^{z^2/2}$.

(2) En déduire la valeur des moments $\mathbb{E}[N^k]$ pour tout $k \geq 0$.

Exercice 2. [Somme aléatoire]

Soit $(X_k)_{k \geq 0}$ une suite de variables aléatoires iid de même loi que X, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et N à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendante de la suite (X_k). Pour $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, et on pose $Z = S_N$.

(1) On note L_X la transformée de Laplace de X. Pour $n \geq 1$, déterminer la transformée de Laplace de S_n en fonction de L_X.

(2) Justifier proprement que S_n et N sont deux variables aléatoires indépendantes. Justifier proprement que Z est une variable aléatoire.

(3) Montrer que la transformée de Laplace de Z est donnée par

$$L_Z(l) = g_N(L_X(l)), \quad l \geq 0,$$

où L_X est la transformée de Laplace de X, et g_N la fonction génératrice de N.

(4) On suppose désormais que $N \sim \text{Geom}(p)$, avec $p \in (0,1)$, et $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$. Calculer g_N, L_X et L_Z, et en déduire que Z suit une loi usuelle que l'on explicitera.

---

1. Pour cette question, la réponse "c'est du cours !" n'est pas acceptée !

Exercice 3. [Non-surjectivité de la transformée de Fourier]

Dans cet exercice, on considère la transformée de Fourier, application linéaire continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans l'ensemble des fonctions continues de limite nulle à l'infini $C_0(\mathbb{R})$. L'objectif de cet exercice est de prouver que cette application n'est pas surjective. Autrement dit, il existe des fonctions continues, de limite nulle à l'infini, qui ne sont pas la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

(1) On introduit la fonction φ définie sur $[0, +\infty[$ par
$$\varphi(x) = \lim_{y \to \infty} \int_x^y \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t.$$
Montrer que la fonction φ est bien définie, et continue bornée.

(2) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction impaire. Vérifier que sa transformée de Fourier est donnée par
$$\hat{f}(\xi) = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\xi x) \mathrm{d}x.$$

(3) Montrer que pour tout $R > 1$, on a
$$\int_1^R \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi} \mathrm{d}\xi = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \left(\int_x^{Rx} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x.$$

(4) Montrer que $\int_1^R \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi} \mathrm{d}\xi$ a une limite finie quand R tend vers $+\infty$.

(5) Montrer que si une fonction impaire $g \in C_0(\mathbb{R})$ est la transformée de Fourier d'une fonction intégrable, alors cette fonction intégrable coïncide presque partout avec une fonction impaire.

(6) Construire une fonction $g \in C_0(\mathbb{R})$ qui n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

Exercice 4. (bonus) [Absence de mémoire de la loi exponentielle...]

(1) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs réelles, avec $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ et $\mathbb{P}(Y > 0) > 0$. Montrer que l'on a, pour tout $t \geq 0$,
$$\mathbb{P}(X > Y + t | X > Y \geq 0) = \mathbb{P}(X > t).$$

(2) Soit $(X_k)_{k \geq 0}$ une suite de va iid de loi $\mathrm{Exp}(\lambda)$, (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, soit $t \in \mathbb{R}_+$, et $N := \inf\{n \geq 0, S_n > t\}$. Déterminer la loi de $S_N - t$.

On pourra admettre que N est fini presque-sûrement.

(3) $(\star)$ Montrer que $t - S_{N-1}$ est indépendant de $(S_N - t)$, et déterminer sa loi. Calculer $\mathbb{E}[X_N]$. Commenter.