ENS de Lyon 2nd semestre 2022-2023

L3 - Intégrations et Probabilités

CORRIGE du partiel du Jeudi 9 mars 2023

Exercice 1. [Moments de la loi gaussienne]

Soit N une variable aléatoire réelle de loi normale centrée réduite.

(1) Justifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires e^{zN} et N^k sont intégrables, avec

$$\mathbb{E}[e^{zN}] = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z^k}{k!}\mathbb{E}[N^k].$$

ainsi que $\mathbb{E}[e^{zN}] = e^{z^2/2}$.

Pour toute fonction g mesurable,

$$\mathbb{E}[g(N)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_N(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

dès que cette intégrable a un sens, donc dès que $gf_N \in L_1(\mathbb{R})$, et on en déduit aisément que les variables aléatoires e^{zN} et N^k sont intégrables, ainsi que $e^{|z||N|}$. Par ailleurs, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $e^{zN} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z^k}{k!}N^k$, et

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{|z|^k}{k!}|N|^k\right] = \mathbb{E}[e^{|z||N|}] < +\infty,$$

donc $(k,\omega) \mapsto \frac{z^k}{k!}N(\omega)^k$ est intégrable sur $\mathbb{N}\times\Omega$, muni du produit de la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ et de $\mathbb{P}$ sur Ω. On peut alors intervertir l'ordre d'intégration par Fubini pour obtenir

$$\mathbb{E}[e^{zN}] = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z^k}{k!}\mathbb{E}[N^k].$$

On reconnait alors qu'on a une série entière en z, définie sur tout $\mathbb{C}$, et donc holomorphe sur $\mathbb{C}$. Pour montrer qu'elle coïncide avec $e^{z^2/2}$, qui est aussi une série entière et une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, il suffit de montrer que les deux fonctions coïncident sur les imaginaires purs $i\mathbb{R}$. Mais cela découle du fait que la fonction caractéristique de N est

$$\varphi_N(\xi) = \mathbb{E}[e^{i\xi N}] = e^{-\xi^2/2}.$$

(2) En déduire la valeur des moments $\mathbb{E}[N^k]$ pour tout $k \geq 0$.

Par la question précédente, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$e^{z^2/2} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\mathbb{E}[N^k]}{k!}z^k.$$

Par ailleurs, on a également

$$e^{z^2/2} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z^2k}{2^k k!}.$$

En identifiant les coefficients de cette série entière, on obtient que les moments impairs de N sont nuls (ce qu'on pouvait aussi voir en observant que N est un v.a. symétrique au sens où elle a la même loi que $-N$), et que les moments pairs sont donnés par

$$\mathbb{E}[N^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Exercice 2. [Somme aléatoire]
Soit $(X_k)_{k\geq 0}$ une suite de variables aléatoires iid de même loi que X, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et N à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendante de la suite (X_k). Pour $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, et on pose $Z = S_N$.

(1) On note L_X la transformée de Laplace de X. Pour $n \geq 1$, déterminer la transformée de Laplace de S_n en fonction de L_X.

> Pour $n \geq 1$, la transformée de Laplace de S_n est donnée par
> $$\mathbb{E}[e^{-lS_n}] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^n e^{-lX_k}\right] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[e^{-lX_k}] = \prod_{k=1}^n L_X(l) = L_X(l)^k,$$
> pour $l \geq 0$. La 2e égalité provient de l'indépendance des X_k, la 3e du fait que les (X_k) ont la même loi, i.e. celle de X.

(2) Justifier proprement que S_n et N sont deux variables aléatoires indépendantes. Justifier proprement que Z est une variable aléatoire.

> La va N est indépendante de la suite (X_k), donc par le lemme de regroupement par paquets, la tribu $\sigma(N)$ est indépendante de la tribu $\bigvee_{k=1}^n \sigma(X_k)$. Or S_n est mesurable pour cette tribu, et on a donc $\sigma(S_n) \subset \bigvee_{k=1}^n \sigma(X_k)$. Ainsi les tribus $\sigma(N)$ et $\sigma(S_n)$ sont indépendantes, autrement dit les va N et S_n sont indépendantes.
> Par ailleurs, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ est une va comme somme de va (ici indépendantes), puis $Z = \sum_{k=1}^{+\infty} S_k \mathbb{1}_{N=k}$ est à son tour une v.a somme de v.a. (et Z est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$).

(3) Montrer que la transformée de Laplace de Z est donnée par

$$L_Z(l) = g_N(L_X(l)), \quad l \geq 0,$$

où L_X est la transformée de Laplace de X, et g_N la fonction génératrice de N.

> La transformée de Laplace de Z est donnée, pour $l \geq 0$, par
> $$\begin{aligned} L_Z(l) = \mathbb{E}[e^{-lZ}] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-lS_k}\mathbb{1}_{N=k}\right] \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left[e^{-lS_k}\mathbb{1}_{N=k}\right] \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left[e^{-lS_k}\right]\mathbb{E}[\mathbb{1}_{N=k}] \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} L_X(l)^k \mathbb{P}(N=k) = g_N(L_X(l)). \end{aligned}$$

(4) On suppose désormais que $N \sim \text{Geom}(p)$, avec $p \in (0,1)$, et $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$. Calculer g_N, L_X et L_Z, et en déduire que Z suit une loi usuelle que l'on explicitera.

On a déjà, pour $t \in (0,1]$,
$$g_N(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p t^k = pt \sum_{k=0}^{+\infty} (t(1-p))^k = \frac{pt}{1-t(1-p)}.$$
Ensuite, pour $l \geq 0$,
$$L_X(l) = \int e^{-lt} \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}t = \frac{\lambda}{\lambda + l}.$$
D'où par la question précécente,
$$L_Z(l) = \frac{p\frac{\lambda}{\lambda+l}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda+l}(1-p)} = \frac{p\lambda}{p\lambda + l}.$$
On reconnait la transformée de Laplace d'une loi $\mathrm{Exp}(p\lambda)$. Comme la transformée de Laplace caractérise la loi, on en déduit donc que Z suit la loi $\mathrm{Exp}(p\lambda)$.

Exercice 3. [Non-surjectivité de la transformée de Fourier]

Dans cet exercice, on considère la transformée de Fourier, application linéaire continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans l'ensemble des fonctions continues de limite nulle à l'infini $C_0(\mathbb{R})$. L'objectif de cet exercice est de prouver que cette application n'est pas surjective. Autrement dit, il existe des fonctions continues, de limite nulle à l'infini, qui ne sont pas la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

(1) On introduit la fonction φ définie sur $[0, +\infty[$ par
$$\varphi(x) = \lim_{y\to\infty} \int_x^y \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t.$$
Montrer que la fonction φ est bien définie, et continue bornée.

Remarquons que la fonction $t \mapsto \sin(t)/t$ est prolongeable par continuité et donc localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrons que la fonction $\psi : y \mapsto \int_0^y \frac{\sin t}{t} dt$ admet une limite finie $\psi(+\infty)$ quand y tend vers l'infini. Alors ψ sera continue bornée, et l'on aura également que $\varphi(x)$ est bien définie, égale à $\psi(+\infty) - \psi(x)$, et donc également continue bornée.
Pour montrer que ψ admet une limite finie en $+\infty$, on peut remarquer qu'il s'agit d'une intégrale impropre convergente classique. Plus précisément, si l'on note
$$a_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t,$$
et $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, alors la suite (a_k) est alternée, et
$$|a_k| = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t + n\pi} \mathrm{d}t$$
décroit vers 0 par théorème de convergence dominée. On en déduit que s_n converge. Ensuite, en notant $n = \lfloor x/\pi \rfloor$, on a $|\psi(x) - s_n| \leq |a_n|$, et donc ψ converge vers la même limite (finie).

(2) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction impaire. Vérifier que sa transformée de Fourier est donnée par
$$\hat{f}(\xi) = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\xi x) \mathrm{d}x.$$

On a
$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(\xi x)\mathrm{d}x - i\int_{\mathbb{R}} f(x)\sin(\xi x)\mathrm{d}x \\ &= \qquad\qquad 0 \qquad\quad - 2i\int_{\mathbb{R}_+} f(x)\sin(\xi x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$
en utilisant la parité des fonctions intégrées pour obtenir la dernière égalité.

(3) Montrer que pour tout $R > 1$, on a
$$\int_1^R \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi}\mathrm{d}\xi = -2i\int_0^{+\infty} f(x)\left(\int_x^{Rx}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$

On a
$$\begin{aligned}\int_1^R \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi}\mathrm{d}\xi &= -2i\int_1^R\left(\int_0^{+\infty} f(x)\frac{\sin(\xi x)}{\xi}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\xi \\ &= -2i\int_0^{+\infty} f(x)\left(\int_1^R \frac{\sin(\xi x)}{\xi}\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}x \\ &= -2i\int_0^{+\infty} f(x)\left(\int_x^{Rx}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$
où l'on a échangé l'ordre d'intégration pour obtenir la deuxième égalité en utilisant que $f(x)\sin(\xi x)/\xi$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times [1, R]$, et où l'on a utilisé le simple changement de variable $t = \xi x$ pour obtenir la 3e égalité.

(4) Montrer que $\int_1^R \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi}d\xi$ a une limite finie quand R tend vers $+\infty$.

Il suffit de réécrire $\int_1^{Rx}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \varphi(x) - \varphi(Rx)$. Cette fonction de x converge simplement vers $\varphi(x)$ quand x tend vers $+\infty$, et est bornée par $2\|\varphi\|_\infty$. Ainsi on peut appliquer le théorème de convergence dominée (avec domination par $2|f(x)|\|\varphi\|_\infty$) pour obtenir
$$\int_1^R \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi}d\xi \to -2i\int_0^{+\infty} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

(5) Montrer que si une fonction impaire $g \in C_0(\mathbb{R})$ est la transformée de Fourier d'une fonction intégrable, alors cette fonction intégrable coïncide presque partout avec une fonction impaire.

Supposons $g = \hat{f}$, avec g impaire. Notons h la fonction définie par $h(x) = f(-x)$. Alors, pour tout ξ réel,
$$\hat{h}(\xi) = \int e^{-i\xi x}f(-x)\mathrm{d}x = \int e^{i\xi x}f(x)\mathrm{d}x = g(-\xi) = -g(\xi).$$
On en déduit $\widehat{f+h}(\xi) = 0$, d'où par injectivité de la transformée de Fourier, $f + h$ coïncide presque partout avec la fonction nulle, puis f coïncide p.p. avec une fonction impaire.

(6) Construire une fonction $g \in C_0(\mathbb{R})$ qui n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

Il suffit de construire une fonction g de $C_0(\mathbb{R})$, impaire, et telle que $\int_1^R \frac{g(\xi)}{\xi} \mathrm{d}\xi$ ne tend pas vers une limite finie quand R tend vers l'infini.
Si une fonction g impaire est la transformée de Fourier d'une fonction intégrable, alors elle est aussi la transformée de Fourier d'une fonction intégrable impaire d'après la question précédente, et d'après les questions (2) à (4), on a alors que $\int_1^R \frac{g(\xi)}{\xi} \mathrm{d}\xi$ tend vers une limite finie quand R tend vers l'infini.
Pour obtenir un contre-exemple, il suffit donc de trouver une fonction g de $C_0(\mathbb{R})$, impaire, et telle que $\int_1^R \frac{g(\xi)}{\xi} \mathrm{d}\xi$ ne tende pas vers une limite finie quand R tend vers l'infini.
Pour cela, on peut prendre par exemple la fonction

$$\xi \mapsto \frac{\xi}{(1+|\xi|)\ln(2+|\xi|)}.$$

Cette fonction est bien impaire et dans $C_0(\mathbb{R})$. De plus elle est positive au voisinage de $+\infty$ et équivalente à $1/\ln(\xi)$, ce qui suffit à montrer que $\int_1^R \frac{g(\xi)}{\xi} \mathrm{d}\xi$ tend vers $+\infty$ quand ξ tend vers $+\infty$.

Exercice 4. [Absence de mémoire...]

(1) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs réelles, avec $X \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$ et $\mathbb{P}(Y > 0) > 0$. Montrer que l'on a, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X > Y + t | X > Y \geq 0) = \mathbb{P}(X > t).$$

Comme les v.a. sont indépendantes, la loi de (X, Y) est $P_X(\mathrm{d}x)P_Y(\mathrm{d}y)$, ce qui permet de calculer, pour $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X > Y + t\} \cap \{Y \geq 0\}) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x > y+t} \mathbb{1}_{y \geq 0} \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x P_Y(\mathrm{d}y) \\ &= e^{-\lambda t} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{y \geq 0} P_Y(\mathrm{d}y).\end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{\mathbb{P}(\{X > Y + t\} \cap \{Y \geq 0\})}{\mathbb{P}(\{X > Y\} \cap \{Y \geq 0\})} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(X > t),$$

d'où le résultat.

(2) Soit $(X_k)_{k \geq 0}$ une suite de va iid de loi $\operatorname{Exp}(\lambda)$, (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, soit $t \in \mathbb{R}_+$, et $N := \inf\{n \geq 0, S_n > t\}$. Déterminer la loi de $S_N - t$.

On admet que N est fini p.s., ce qui est par ailleurs nécessaire pour pouvoir définir $S_N - t$. On va montrer que $S_N - t$ suit la loi $\operatorname{Exp}(\lambda)$ et est indépendante de N. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et $s \geq 0$, on a $\mathbb{P}(S_N - t > s | N = n) = e^{-\lambda s}$.
Mais $\{N = n\} = \{S_{n-1} \leq t, S_n > t\} = \{X_n > t - S_{n-1} \geq 0\}$, et sur cet événement, on a $S_N - t = X_n - (t - S_{n-1})$. D'après la question précédente et l'observation que X_n et $t - S_{n-1}$ sont indépendantes, on a

$$\mathbb{P}(S_N - t > s | N = n) = \mathbb{P}(X_n > s) = e^{-\lambda s},$$

ce qu'il fallait démontrer.

(3) ($\star$) Montrer que $t - S_{N-1}$ est indépendant de $(S_N - t)$, et déterminer sa loi. Calculer $\mathbb{E}[X_N]$. Commenter.

On peut effectuer un calcul similaire à la première question, mais avec f et g deux fonctions tests, mesurables bornées, pour obtenir

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)\mathbb{1}_{X>Y\geq 0}] = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y}g(y)\mathbb{1}_{y\geq 0}P_Y(\mathrm{d}y)\right).$$

En divisant par $\mathbb{P}(X > Y \geq 0)$, on en déduit que sous la probabilité conditionnelle à l'événement $\{X > Y \geq 0\}$, la va X suit une loi géométrique **et est indépendante de Y**.

Ensuite, comme dans la question 2, si l'on conditionne à $N = n$, alors $S_N - t$ suit la loi $\mathrm{Exp}(\lambda)$ et est indépendante de $t - S_{N-1}$. On en déduit alors que $S_N - t$ est indépendante de N et de $t - S_{N-1}$.

Si l'on n'est pas à l'aise avec cet argument d'indépendance, on peut aussi le retrouver en détaillant le calcul

$$\mathbb{E}[f(S_N - t)g(t - S_{N-1})] = (...) = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x\right)\mathbb{E}\left[\sum g(t - S_{N-1})\mathbb{1}_{N=n}\right].$$

Pour déterminer la loi de $t - S_{N-1}$, on pourrait partir du calcul ci-dessus, mais il est peut-être plus simple d'observer que :

- On a montré $\mathbb{P}(S_N - t > s) = e^{-\lambda s}$, où l'événement $S_N - t > s$ est l'événement d'absence de points de la suite (S_n) dans l'intervalle $(t, t+s]$. Ce résultat reste bien-sûr valable quelle que soit la valeur de t.
- Pour $s < t$, l'événement $t - S_{N-1} > s$ est l'événement d'absence de points de la suite (S_n) dans l'intervalle $(t - s, t]$... qui a donc également probabilité $e^{-\lambda s}$.

Ainsi la loi de $t - S_{n-1}$ est

$$\lambda e^{-\lambda s}\mathbb{1}_{]0,t[}(s)\mathrm{d}s + e^{-\lambda t}\delta_t,$$

qui a donc une partie absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et un atome en t. C'est aussi la loi de $X \wedge t$ si $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

On a alors

$$\mathbb{E}[X_N] = \mathbb{E}[S_N - t] + \mathbb{E}[t - S_{N-1}] = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}).$$

On peut commenter le fait que :

- La loi de $S_N - t$ est égale à la loi de X_1, et indépendante de $t - S_{N-1}$. Cela évoque le paradoxe de l'autobus. Si les S_n modélisent des temps de passage de bus à un arrêt, le fait d'arriver juste après le passage d'un bus ou au contraire longtemps après le passage du bus (ie $t - S_{N-1}$ petit ou grand) ne change pas que le temps restant a toujours la même loi $\mathrm{Exp}(\lambda)$.
- En particulier, le temps écoulé entre le bus qu'on prend et le précédent ($\mathbb{E}[X_N]$) est en moyenne plus important que le temps moyen de passage entre les bus ($1/\lambda$).
- Lorsque t "est grand", la loi de X_N "est" la loi exponentielle *biaisée par la taille*, i.e.

  $$\mathbb{E}[f(X_N)] = \frac{\mathbb{E}[Xf(X)]}{\mathbb{E}[X]} = \int_{\mathbb{R}_+} \lambda^2 t e^{-\lambda t} f(t)\mathrm{d}t.$$

  Cette loi a pour espérance $2/\lambda$, le double de l'espérance de la loi exponentielle.