ENS de Lyon - M2 **Lundi 18 décembre 2017**

Examen de calcul stochastique (3h)

Les notes de cours sont autorisées. Tout autre document est interdit.

Dans tout le sujet, on travaille sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$ continue à droite et complète.

On rappelle le lemme de Gronwall : si $f : [0,t] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction mesurable et bornée telle que $f(s) \leq a + b\int_0^s f(r)\mathrm{d}r$ pour tout $s \in [0,t]$, avec a et b constantes positives, alors $f(s) \leq ae^{bs}$ pour tout $s \in [0,t]$.

EXERCICE I : Vrai/Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquez si elle est vraie ou non, en justifiant :

1. Si B est un $(\mathcal{F}_t)-$mouvement brownien réel issu de 0 et T est un $(\mathcal{F}_t)-$temps d'arrêt fini p.s., alors $\mathbb{E}[B_T^2] \leq \mathbb{E}[T]$.
2. Si B est un $(\mathcal{F}_t)-$mouvement brownien réel issu de 0 et T est un $(\mathcal{F}_t)-$temps d'arrêt fini p.s., alors $\mathbb{E}[B_T^2] \geq \mathbb{E}[T]$.
3. Une martingale locale (continue) positive issue de 1 est toujours une surmartingale.
4. Une martingale locale (continue) positive issue de 1 est toujours une sous-martingale.
5. Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une surmartingale continue à droite et positive. Alors M est une martingale uniformément intégrable si et seulement si elle converge p.s. vers une v.a. M_∞ qui vérifie $\mathbb{E}[M_\infty] = \mathbb{E}[M_0]$.

EXERCICE II : Processus de Bessel en dimension $d > 2$.

Dans cet exercice, on fixe deux paramètres $x_0 > 0$ et $b > 1/2$. Soit B un $(\mathcal{F}_t)-$mouvement brownien. Pour $n \geq 1/x_0$, on considère l'équation différentielle stochastique $E(n)$ suivante :

$$X_t = x_0 + B_t + b\int_0^t \left(\frac{1}{|X_s|} \wedge n\right) \mathrm{d}s$$

1. Justifier qu'il existe une unique (à indistinguabilité près) semimartingale continue adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ et solution de $E(n)$. En notant X^n cette solution, montrer que l'on a presque-sûrement

$$\limsup_{t\to+\infty} X_t^n = +\infty.$$

2. On pose $T_n := \inf\{t \geq 0, X_t^n = 1/n\}$ et f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x^{1-2b}$. Montrer que $f(X_{t\wedge T_n}^n)$ est une martingale bornée. En déduire que X^n tend presque-sûrement vers $+\infty$ sur l'événement $\{T_n = +\infty\}$, puis déterminer $\mathbb{P}(T_n < +\infty)$.
3. Pour X processus continu, on note $T_n^X := \inf\{t \geq 0, X_t = 1/n\}$. Montrer qu'il existe une unique $(\mathcal{F}_t)-$semimartingale continue solution de l'équation
$$X_t = x_0 + \int_0^t \mathbb{1}_{s<T_n^X} \mathrm{d}B_s + b\int_0^t \frac{1}{|X_s|}\mathbb{1}_{s<T_n^X}\mathrm{d}s.$$
Pour l'unicité, on pourra introduire, pour X et Y deux solutions, le processus $X_{t\wedge T_n^X\wedge T_n^Y} - Y_{t\wedge T_n^X\wedge T_n^Y}$, et utiliser le lemme de Gronwall.
4. En déduire l'existence d'une unique $(\mathcal{F}_t)-$semimartingale continue à valeurs dans $]0,+\infty[$ et solution de l'EDS
$$X_t = x_0 + B_t + b\int_0^t \frac{1}{X_s}\mathrm{d}s,$$
5. Montrer que pour $d \geq 3$, la norme d'un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ issu d'un point de norme $r > 0$, a la loi de la solution à cette EDS, avec $x_0 = r$ et $b = (d-1)/2$.
6. Dans cette question on suppose $b = 1$ et on fixe un temps (déterministe) $T < +\infty$. Montrer que pour toute fonctionnelle F mesurable bornée de l'espace des fonctions continues dans $\mathbb{R}$, on a
$$\mathbb{E}\Big[F\big((X_{t\wedge T\wedge T_n^X})_{t\geq 0}\big)\Big] = \mathbb{E}\Big[\frac{\beta_{T\wedge T_n^\beta}}{x_0}F\big((\beta_{t\wedge T\wedge T_n^\beta})_{t\geq 0}\big)\Big],$$
où β désigne un mouvement brownien réel issu de x_0, et $T_n^\beta = \inf\{t \geq 0, \beta_t = 1/n\}$. *On pourra penser au théorème de Girsanov...*
7. En déduire que, conditionnellement à l'événement $\{T_n^X < +\infty\}$, le processus $(X_{t\wedge T_n^X})_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien, issu de x_0, et stoppé à son temps d'atteinte de $1/n$. On pourra commencer par remarquer que
$$\mathbb{P}(T_n^X < +\infty | \mathcal{F}_{T\wedge T_n^X}) = \frac{1}{nX_{T\wedge T_n^X}}.$$

EXERCICE III : Décomposition polaire du mouvement brownien planaire.

On considère $(B_t, C_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien planaire, issu de $(r, 0)$, avec $r > 0$. On rappelle que la trajectoire d'un mouvement brownien planaire est continue et ne passe pas par $(0, 0)$, presque-sûrement. Par conséquent, on peut définir de manière unique (à indistinguabilité près) les processus continus $(R_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ et $(\theta_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et issu de 0, tel que pour tout $t \geq 0$, on ait
$$B_t = R_t\cos(\theta_t), \qquad C_t = R_t\sin(\theta_t).$$

1. On introduit les processus (β_t) et (γ_t) définis, pour $t \geq 0$, par

$$\beta_t = \int_0^t \frac{B_s}{R_s} \mathrm{d}B_s + \int_0^t \frac{C_s}{R_s} \mathrm{d}C_s, \qquad \gamma_t = \int_0^t \frac{-C_s}{R_s} \mathrm{d}B_s + \int_0^t \frac{B_s}{R_s} \mathrm{d}C_s.$$

   Justifier que ces processus sont bien définis, et sont deux mouvements browniens indépendants.
2. Montrer que l'on a

$$\begin{aligned} R_t &= r + \beta_t + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{R_s} \mathrm{d}s, \\ \theta_t &= \int_0^t \frac{1}{R_s} \mathrm{d}\gamma_s. \end{aligned}$$

3. Soit $A_t = \int_0^t \frac{1}{R_s^2} \mathrm{d}s$. Montrer qu'il existe un mouvement brownien α tel que l'on ait $\theta_t = \alpha_{A_t}$. Ce mouvement brownien est-il indépendant du processus R ?
4. Montrer que $(\log(R_t))_{t \geq 0}$ est une martingale locale de variation quadratique A_t.
5. On introduit $T_a := \inf\{t \geq 0, R_t = a\}$ et $T_b := \inf\{t \geq 0, R_t = b\}$, avec $0 < a < r < b$. Calculer l'espérance de $A_{T_a \wedge T_b}$.
6. En déduire l'espérance de $\sup_{t \leq T_a \wedge T_b} \theta_t$.