ENS de Lyon - M2 **Lundi 18 décembre 2017**

Examen de calcul stochastique (3h)

Les notes de cours sont autorisées. Tout autre document est interdit.

Dans tout le sujet, on travaille sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$ continue à droite et complète.

On rappelle le lemme de Gronwall : si $f : [0,t] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction mesurable et bornée telle que $f(s) \le a + b\int_0^s f(r)\mathrm{d}r$ pour tout $s \in [0,t]$, avec a et b constantes positives, alors $f(s) \le a e^{bs}$ pour tout $s \in [0,t]$.

EXERCICE I : Vrai/Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquez si elle est vraie ou non, en justifiant :

1. Si B est un $(\mathcal{F}_t)-$mouvement brownien réel issu de 0 et T est un $(\mathcal{F}_t)-$temps d'arrêt fini p.s., alors $\mathbb{E}[B_T^2] \le \mathbb{E}[T]$.

   Vrai. On sait que le processus $(B_t^2 - t)_{t\ge 0}$ est une vraie martingale. (On peut le redémontrer par exemple en utilisant $\mathbb{E}[\langle B\rangle_t] = t < +\infty$). Par conséquent $(B_{t\wedge T}^2 - t\wedge T)_{t\ge 0}$ aussi, d'où pour t fini,

   $$\mathbb{E}[B_{t\wedge T}^2] = \mathbb{E}[t\wedge T].$$

   Dans cette expression, le membre de droite tend vers $\mathbb{E}[T]$ par théorème de convergence monotone. Maintenant, le processus $B_{t\wedge T}^2$ étant positif, le lemme de Fatou nous donne

   $$\mathbb{E}[B_T^2] = \mathbb{E}[\liminf_{t\to+\infty} B_{t\wedge T}^2] \le \liminf_{t\to\infty} \mathbb{E}[B_{t\wedge T}^2] = \mathbb{E}[T].$$

   Le résultat est démontré.

2. Si B est un $(\mathcal{F}_t)-$mouvement brownien réel issu de 0 et T est un $(\mathcal{F}_t)-$temps d'arrêt fini p.s., alors $\mathbb{E}[B_T^2] \ge \mathbb{E}[T]$.

   Faux. On peut par exemple prendre $T_1 := \inf\{t \ge 0, B_t = 1\}$ le temps d'atteinte de 1 par le mouvement brownien, qui est fini presque-sûrement par récurrence du mouvement brownien. Alors $\mathbb{E}[B_{T_1}^2] = 1$ mais $\mathbb{E}[T_1] = +\infty$. Un autre contre-exemple qui ne nécessite pas le résultat $\mathbb{E}[T_1] = +\infty$ est d'utiliser le temps d'arrêt $T := \inf\{t \ge T_1, B_t = 0\}$, également fini p.s.

3. Une martingale locale (continue) positive issue de 1 est toujours une surmartingale.
Vrai. Soit M une martingale locale positive issue de 1, et soit T_n une suite de temps d'arrêt qui réduit la martingale. Alors $(M_{t\wedge T_n})_{t\geq 0}$ est une martingale, d'où, pour tout $0 \leq s \leq t$,
$$\mathbb{E}[M_{t\wedge T_n}|\mathcal{F}_s] = M_{s\wedge T_n}.$$
En utilisant le lemme de Fatou conditionnel, on obtient alors
$$\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\liminf M_{t\wedge T_n}|\mathcal{F}_s] \leq \liminf \mathbb{E}[M_{t\wedge T_n}|\mathcal{F}_s] = M_s.$$
En particulier, $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_0]] \leq \mathbb{E}[M_0] = 1$, donc les variables M_t sont bien dans L_1, et on a bien obtenu que M est une surmartingale.
4. Une martingale locale (continue) positive issue de 1 est toujours une sous-martingale.
Faux. Pour trouver un contre-exemple, il suffit de trouver une martingale locale positive issue de 1 qui n'est pas une martingale. On peut par exemple prendre l'inverse de la norme d'un mouvement brownien de dimension 3, issu du point $(1, 0, 0)$. On voit en effet facilement que ce processus tend vers 0 dans L^1 et donc n'est pas une martingale. La formule d'Itō permet par contre de vérifier qu'il s'agit d'une martingale locale (positive).
5. Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une surmartingale continue à droite et positive. Alors M est une martingale uniformément intégrable si et seulement si elle converge p.s. vers une v.a. M_∞ qui vérifie $\mathbb{E}[M_\infty] = \mathbb{E}[M_0]$.
Vrai. Le sens direct est facile, puisqu'une martingale uniformément intégrable càd converge toujours ps et dans L^1 vers M_∞, et alors $\mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_t] \to \mathbb{E}[M_\infty]$, d'où $\mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_\infty]$.
Réciproquement, supposons que M_t converge p.s. vers M_∞ (ce qui est toujours le cas pour une surmartingale càd positive), et que $\mathbb{E}[M_\infty] = \mathbb{E}[M_0]$. Il s'agit alors de montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $\mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_t] = M_t$. Déjà, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}[M_{t+n}|\mathcal{F}_t] \leq M_t$ puisque M est une surmartingale. En passant à la limite quand n tend vers l'infini, et en utilisant le lemme de Fatou conditionnel (le processus étant positif), il vient $\mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_t] \leq M_t$. Comme d'habitude, l'espérance conditionnelle est définie à un ensemble de mesure nulle près. Pour montrer que ces deux v.a. sont égales, il suffit donc de montrer qu'elles ont même espérance. Mais la propriété de surmartingale nous donne $\mathbb{E}[M_t] \leq \mathbb{E}[M_0]$ et par ailleurs, $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_t]\right] = \mathbb{E}[M_\infty] = \mathbb{E}[M_0]$ par hypothèse. On en déduit bien l'égalité demandée.

EXERCICE II : Processus de Bessel en dimension $d > 2$.

Dans cet exercice, on fixe deux paramètres $x_0 > 0$ et $b > 1/2$. Soit B un $(\mathcal{F}_t)-$mouvement brownien. Pour $n \geq 1/x_0$, on considère l'équation différentielle stochastique $E(n)$ suivante :
$$X_t = x_0 + B_t + b\int_0^t \left(\frac{1}{|X_s|} \wedge n\right) \mathrm{d}s$$

1. Justifier qu'il existe une unique (à indistinguabilité près) semimartingale continue adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ et solution de $E(n)$. En notant X^n cette solution, montrer que l'on a presque-sûrement

$$\limsup_{t\to+\infty} X_t^n = +\infty.$$

On peut invoquer le résultat du cours, qui nous assure ici qu'il y a existence forte et unicité trajectorielle pour l'EDS considérée. L'existence forte nous dit qu'il existe une solution sur tout espace de probabilité muni d'une filtration complète et d'un mouvement brownien adapté, ce qui est en particulier le cas ici. L'unicité trajectorielle nous dit que les solutions sont indistinguables (remarquons que la condition initiale $X_0 = x_0$ est fixée).

Maintenant, on a clairement $X_t^n \geq x_0 + B_t$, et on sait que l'on a p.s. $\limsup B_t = +\infty$, d'où, p.s., $\limsup X_t^n = +\infty$.

2. On pose $T_n := \inf\{t \geq 0, X_t^n = 1/n\}$ et f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^{1-2b}$. Montrer que $f(X^n_{t\wedge T_n})$ est une martingale bornée. En déduire que X^n tend presque-sûrement vers $+\infty$ sur l'événement $\{T_n = +\infty\}$, puis déterminer $\mathbb{P}(T_n < +\infty)$.

Soit g une fonction C^2 sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec f sur $[1/n, +\infty[$. Appliquons la formule d'Itō à $g(X_t^n)$:

$$g(X_t^n) = g(X_0^n) + \int_0^t g'(X_s^n)\mathrm{d}B_s + b\int_0^t \left(g'(X_s^n)\left(\frac{1}{|X_s^n|}\wedge n\right) + \frac{1}{2}g''(X_s^n)\right)\mathrm{d}s.$$

Mais pour $t \leq T_n$, les fonctions $g(X_t^n)$ et $f(X_t^n)$ coïncident, et

$$g'(X_s^n)\left(\frac{1}{|X_s^n|}\wedge n\right) + \frac{1}{2}g''(X_s^n) = 0,$$

ainsi le processus $(M_t)_{t\geq 0}$ défini par $M_t = f(X^n_{t\wedge T_n})$ est une martingale locale. En observant que $f([\frac{1}{n}, +\infty[) =]0, n^{2b-1}]$ (rappelons que $b > 1/2$), il s'agit d'une vraie martingale bornée. Elle converge donc, p.s. et L^1, vers M_∞, avec $\mathbb{E}[M_\infty] = \mathbb{E}[M_0] = x_0^{1-2b}$. On a clairement $M_\infty = f(1/n)$ sur $\{T_n < +\infty\}$. Sur l'événement $\{T_n = +\infty\}$, comme on a presque-sûrement $\limsup X_t^n = +\infty$ d'après la question précédente, et que f tend vers 0 en $+\infty$, on a que 0 est une valeur d'adhérence de M_t lorsque t tend vers l'infini, d'où $M_\infty = 0$ p.s. Cela implique que X^n tend presque-sûrement vers $+\infty$ (toujours sur l'événement $T_n = +\infty$).

On peut maintenant calculer l'espérance de M_∞ selon

$$\mathbb{E}[M_\infty] = f(1/n)\mathbb{P}(T_n < +\infty) = f(x_0),$$

d'où $\mathbb{P}(T_n < +\infty) = f(x_0)/f(1/n) = (nx_0)^{1-2b}$ (ce qui est bien plus petit que 1 puisque $n \geq 1/x_0$ et $b > 1/2$).

3. Pour X processus continu, on note $T_n^X := \inf\{t \geq 0, X_t = 1/n\}$. Montrer qu'il existe une unique $(\mathcal{F}_t)-$semimartingale continue solution de l'équation

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mathbb{1}_{s<T_n^X} \mathrm{d}B_s + b \int_0^t \frac{1}{|X_s|} \mathbb{1}_{s<T_n^X} \mathrm{d}s.$$

Pour l'unicité, on pourra introduire, pour X et Y deux solutions, le processus $X_{t\wedge T_n^X \wedge T_n^Y} - Y_{t\wedge T_n^X \wedge T_n^Y}$, et utiliser le lemme de Gronwall.

Remarquons qu'il ne s'agit pas exactement ici d'une EDS telle que considérée dans le cours, puisque $\mathbb{1}_{s<T_n^X}$ ne peut pas s'écrire comme fonction de (s, X_s). On n'a pas non plus de résultat d'unicité provenant du cours.

Néanmoins, l'équation fait sens, et il est clair que $(X^n_{t\wedge T_n})_{t\geq 0}$ en est une solution (de même que $(X^k_{t\wedge T_n^{X^k}})$ pour tout $k \geq n$).

Soient X et Y deux solutions, et $Z_t := X_{t\wedge T_n^X \wedge T_n^Y} - Y_{t\wedge T_n^X \wedge T_n^Y}$. Alors Z_t est un processus continu issu de 0, et par ailleurs, en utilisant que X et Y sont solutions de l'équation, il vient

$$Z_t = b \int_0^{t\wedge T_n^X \wedge T_n^Y} \left(\frac{1}{|X_s|} - \frac{1}{|Y_s|} \right) \mathrm{d}s.$$

Fixons $T < \infty$ et montrons que Z est indistinguable du processus nul sur $[0, T]$. En utilisant que $x \mapsto 1/|x|$ est borné par n sur $[1/n, +\infty[$, il vient que le processus $(Z_t)_{t\leq T}$ est borné par $2nbT$.

Maintenant, en utilisant que $x \mapsto 1/|x|$ est n^2-Lipschitz sur $[1/n, +\infty[$, il vient, pour $t \leq T$,

$$|Z_t| \leq bn^2 \int_0^{t\wedge T_n^X \wedge T_n^Y} |Z_s| \mathrm{d}s \leq bn^2 \int_0^t |Z_s| \mathrm{d}s.$$

On conclut alors par le lemme de Gronwall que Z est le processus nul, d'abord sur $[0, T]$, puis, T étant quelconque, sur $\mathbb{R}_+$. Par suite, les processus X et Y coïncident, au moins jusqu'à l'instant $T_n^X \wedge T_n^Y$. Mais alors on a nécessairement $T_n^X = T_n^Y$. On vérifie par ailleurs aisément (en utilisant l'équation satisfaite par les processus X et Y), que pour tout $t \geq 0$, on a $X_t = X_{t\wedge T_n^X}$ et $Y_t = Y_{t\wedge T_n^Y}$, ainsi X et Y sont indistinguables.

4. En déduire l'existence d'une unique $(\mathcal{F}_t)-$semimartingale continue à valeurs dans $]0, +\infty[$ et solution de l'EDS

$$X_t = x_0 + B_t + b \int_0^t \frac{1}{X_s} \mathrm{d}s.$$

De l'unicité de la question précédente, il vient que pour tout $k \geq n$, on a $T_n^{X^k} = T_n$, d'où en particulier $T_n \leq T_k$, et, pour tout $t \geq 0$,

$$X^k_{t\wedge T_n} = X^n_{t\wedge T_n}.$$

On définit alors X de manière non-ambiguë sur $[0, \sup T_n[$ en disant que X coïncide avec X^n sur $[0, T_n[$. Comme $\mathbb{P}(T_n < \infty) \to 0$, on obtient que $T_n$est presque-sûrement infini pour n assez grand. En particulier, $\sup T_n$ est presque-sûrement égal à $+\infty$, et X est ainsi défini (en dehors d'un ensemble négligeable) sur $[0, +\infty[$, et à valeurs dans $]0, +\infty[$. Il est alors immédiat que X est une solution de l'EDS proposée. Soit maintenant Y une autre solution. Alors on vérifie aisément que $Y_{t\wedge T_n^Y}$ est solution de l'EDS de la question 3, d'où $Y_{t\wedge T_n^Y}$ est indistinguable de $X_{t\wedge T_n^X}$. Ceci étant vrai pour tout $n \geq 1/x_0$, les processus Y et X sont indistinguables.

5. Montrer que pour $d \geq 3$, la norme d'un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ issu d'un point de norme $r > 0$, a la loi de la solution à cette EDS, avec $x_0 = r$ et $b = (d-1)/2$.

   Soit $B = (B_t^1, \dots, B_t^d)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ issu de $x = (x_1, \dots x_d)$, avec $|x| = x_0 > 0$. La fonction $|\cdot|$ est C^2 sur $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$, et, comme $d \geq 3$, le processus $(B_t^1, \dots, B_t^d)_{t\geq 0}$ ne touche pas 0, p.s. On peut donc appliquer la formule d'Itō et obtenir, en notant $R_t = |B_t|$,

$$\begin{aligned} R_t &= x_0 + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{B_s^i}{R_s} \mathrm{d}B_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \int_0^t \left(\frac{1}{R_s} - \frac{(B_s^i)^2}{R_s} \right) \mathrm{d}s \\ &= x_0 + \beta_t + \frac{d-1}{2} \int_0^t \frac{1}{R_s} \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

   où $\beta_t = \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{B_s^i}{R_s} \mathrm{d}B_s^i$ est un mouvement brownien car martingale locale de variation quadratique t.

6. Dans cette question on suppose $b = 1$ et on fixe un temps (déterministe) $T < +\infty$. Montrer que pour toute fonctionnelle F mesurable bornée de l'espace des fonctions continues dans $\mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}\Big[F\big((X_{t\wedge T\wedge T_n^X})_{t\geq 0}\big)\Big] = \mathbb{E}\Big[\frac{\beta_{T\wedge T_n^\beta}}{x_0} F\big((\beta_{t\wedge T\wedge T_n^\beta})_{t\geq 0}\big)\Big],$$

   où β désigne un mouvement brownien réel issu de x_0, et $T_n^\beta = \inf\{t \geq 0, \beta_t = 1/n\}$. *On pourra penser au théorème de Girsanov...*

   Soit $(\beta_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien issu de x_0 (sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}$. On introduit la martingale uniformément intégrable, continue et strictement positive D_t définie par $D_t = \frac{\beta_{t\wedge T\wedge T_n^\beta}}{x_0}$. On a alors $D_t = \mathcal{E}(L)_t$ avec $L_t = \int_0^{t\wedge T\wedge T_n^\beta} \frac{1}{D_s} \mathrm{d}D_s$, et l'on peut également calculer

$$\langle \beta, L\rangle_t = \int_0^{t\wedge T\wedge T_n^\beta} \frac{1}{D_s} \mathrm{d}\langle \beta, D\rangle_s = \int_0^{t\wedge T\wedge T_n^\beta} \frac{1}{\beta_s} \mathrm{d}s.$$

   On introduit enfin $\mathbb{Q}$ la mesure de probabilité absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, et de dérivée de Radon-Nikodym D_∞. Le théorème de Girsanov nous assure alors *que $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont équivalente, et que sous $\mathbb{Q}$, le processus $\gamma_t = \beta_t - x_0 - \langle \beta, L\rangle_t$ est une martingale locale issue de 0 et de crochet t, c'est à dire un mouvement brownien standard.*

Ainsi, sous $\mathbb{Q}$, le processus γ est un mouvement brownien, tandis que $(\beta_{t\wedge T\wedge T_n^\beta})_{t\geq 0}$ est solution de l'EDS stoppée de la question 3, associée à ce mouvement brownien. Ainsi, la loi de $(X_{t\wedge T\wedge T_n^X})_{t\geq 0}$ coïncide avec la loi de $(\beta_{t\wedge T\wedge T_n^\beta})_{t\geq 0}$ sous $\mathbb{Q}$, elle-même absolument continue par rapport à la loi de $(\beta_{t\wedge T\wedge T_n^\beta})_{t\geq 0}$ sous $\mathbb{P}$, et de densité $\beta_{T\wedge T_n^\beta}/x_0$. Cela se traduit par l'égalité proposée, pour toute F fonctionnelle mesurable bornée de l'espace des fonctions continues dans $\mathbb{R}$.

7. En déduire que, conditionnellement à l'événement $\{T_n^X < +\infty\}$, le processus $(X_{t\wedge T_n^X})_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien, issu de x_0, et stoppé à son temps d'atteinte de $1/n$. On pourra commencer par remarquer que

$$\mathbb{P}(T_n^X < +\infty | \mathcal{F}_{T\wedge T_n^X}) = \frac{1}{nX_{T\wedge T_n^X}}.$$

On a déjà calculé que la probabilité de l'événement $\{T_n < +\infty\}$ est égale à $1/nx_0$ (rappelons que dans cette question encore, on a $b = 1$). Par la propriété de Markov forte satisfaite par X, on a également

$$\mathbb{P}(T_n^X < +\infty | \mathcal{F}_{T\wedge T_n^X}) = \frac{1}{nX_{T\wedge T_n^X}}.$$

Soit F fonctionnelle mesurable bornée de l'espace des fonctions continues dans $\mathbb{R}$, et $G\big((X_{t\wedge T\wedge T_n^X})_{t\geq 0}\big) = \frac{1}{nX_{T\wedge T_n^X}} F\big((X_{t\wedge T\wedge T_n^X})_{t\geq 0}\big)$. Alors

$$\mathbb{E}\big[G\big((X_{t\wedge T\wedge T_n^X})_{t\geq 0}\big)\big] = \mathbb{E}\big[\big((X_{t\wedge T\wedge T_n^X})_{t\geq 0}\big)\mathbb{1}_{\{T_n^X<\infty\}}\big],$$

et par ailleurs en utilisant la question précédente,

$$\mathbb{E}\big[G\big((X_{t\wedge T\wedge T_n^X})_{t\geq 0}\big)\big] = \frac{1}{nx_0}\mathbb{E}\big[F\big((\beta_{t\wedge T\wedge T_n^\beta})_{t\geq 0}\big)\big].$$

En divisant l'expression précédente par $\frac{1}{nx_0} = \mathbb{P}(T_n^X < \infty)$, il vient

$$\mathbb{E}\big[\big((X_{t\wedge T\wedge T_n^X})_{t\geq 0}\big) \bigm| T_n^X < \infty\big] = \mathbb{E}\big[F\big((\beta_{t\wedge T\wedge T_n^\beta})_{t\geq 0}\big)\big],$$

ce qui termine la preuve.

EXERCICE III : Décomposition polaire du mouvement brownien planaire.

On considère $(B_t, C_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien planaire, issu de $(r, 0)$, avec $r > 0$. On rappelle que la trajectoire d'un mouvement brownien planaire est continue et ne passe pas par $(0, 0)$, presque-sûrement. Par conséquent, on peut définir de manière unique (à indistinguabilité près) les processus continus $(R_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et $(\theta_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et issu de 0, tel que pour tout $t \geq 0$, on ait

$$B_t = R_t \cos(\theta_t), \qquad C_t = R_t \sin(\theta_t).$$

1. On introduit les processus (β_t) et (γ_t) définis, pour $t \geq 0$, par

$$\beta_t = \int_0^t \frac{B_s}{R_s} \mathrm{d}B_s + \int_0^t \frac{C_s}{R_s} \mathrm{d}C_s, \qquad \gamma_t = \int_0^t \frac{-C_s}{R_s} \mathrm{d}B_s + \int_0^t \frac{B_s}{R_s} \mathrm{d}C_s.$$

Justifier que ces processus sont bien définis, et sont deux mouvements browniens indépendants.

Il suffit de faire appel au théorème de Lévy-Knight, qui dit que le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ est caractérisé par le fait que ses coordonnées sont des martingales locales (issues de 0) de variation quadratique t et orthogonales (i.e. de crochet nul). Ici β et γ sont des martingales locales, et l'on vérifie facilement $\langle \beta \rangle_t = t = \langle \gamma \rangle_t$ et $\langle \beta, \gamma \rangle_t = 0$. Donc (β, γ) est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^2$, ce qui signifie que β et γ sont des mouvements browniens indépendants.

2. Montrer que l'on a

$$\begin{aligned} R_t &= r + \beta_t + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{R_s} \mathrm{d}s, \\ \theta_t &= \int_0^t \frac{1}{R_s} \mathrm{d}\gamma_s. \end{aligned}$$

Le processus R est obtenu en appliquant la fonction $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ à (B_t, C_t). Comme le processus (B_t, C_t) est presque-sûrement à valeurs dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, et que la fonction est C^2 sur cet ensemble, on peut utiliser la formule d'Itō pour obtenir

$$R_t = r + \int_0^t \frac{B_s}{R_s} \mathrm{d}B_s + \int_0^t \frac{C_s}{R_s} \mathrm{d}C_s + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{1}{R_s} - \frac{B_s^2}{R_s^3} + \frac{1}{R_s} - \frac{C_s^2}{R_s^3} \right) \mathrm{d}s,$$

d'où le résultat demandé pour R.

Pour le processus θ, une difficulté vient de ce que θ ne peut pas s'écrire comme fonction de (B_t, C_t). Certes, on peut l'exprimer comme $Arctan(C_t/B_t)$, mais seulement jusqu'au premier instant T vérifiant $B_T = 0$ (et $\theta_T \in \{-\pi/2, \pi/2\}$)... On pourrait donc exprimer $\theta_{t \wedge T}$, puis conditionner à $\mathcal{F}_T$ pour obtenir une nouvelle fonction exprimant θ à partir de cet instant (et jusqu'au premier instant après T où $C_t = 0$), etc... mais c'est laborieux !

Une solution élégante consiste à introduire le revêtement universel de $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, que l'on encode par $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \times \mathbb{Z}$. Mais attention, il faut mettre sur cet espace une bonne topologie qui en fait un revêtement universel, par exemple une topologie telle que l'application définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et qui à (r, θ) associe (r, θ, n), où $\theta \in]n - \pi, n + \pi]$, soit un homéomorphisme. On appelle f la deuxième coordonnée de sa bijection réciproque.

Si l'on définit le processus N_t par $N_t = n$ si $\theta_t \in]n - \pi, n + \pi]$, alors (B_t, C_t, N_t) est un processus continu sur le revêtement universel (c'est le relèvement issu de $(r, 0, 0)$ du *processus* $(B_t, C_t)_{t\geq 0}$*), et l'on a maintenant* $\theta_t = f(B_t, C_t, N_t)$*. On peut maintenant vérifier que* f *est* C^2 *et que ses dérivées sont données par*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,n) &= \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,n) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,n) &= \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,n) = \frac{-2xy}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

De là il vient par la formule d'Itō

$$\theta_t = \int_0^t \frac{-C_s}{R_s^2}\mathrm{d}B_s + \int_0^t \frac{B_s}{R_s^2}\mathrm{d}C_s,$$

d'où le résultat pour θ*.*

Je ne m'attendais évidemment pas à ce que vous imaginiez cette solution (qui par ailleurs utilise la formule d'Itō sur le revêtement universel sans beaucoup de justification). À vrai dire, j'avais un peu trop vite pensé qu'en définissant $\tau_t = \int_0^t \frac{1}{R_s}\mathrm{d}\gamma_s$*, on pourrait facilement vérifier* $R_t \cos\tau_t = B_t$ *et* $R_t \sin\tau_t = C_t$*, et alors nécessairement* $\tau_t = \theta_t$*. Ce n'est en fait pas si évident... À la place, on peut vérifier que les deux couples de processus* $(\cos\theta_t, \sin\theta_t)$ *et* $(\cos\tau_t, \sin\tau_t)$ *vérifient le même système d'équations aux dérivées partielles stochastiques, pour laquelle on peut prouver l'unicité trajectorielle en invoquant le lemme de Gronwall... Je me demande s'il n'y a pas plus simple, mais je n'ai pas trouvé !*

3. Soit $A_t = \int_0^t \frac{1}{R_s^2}\mathrm{d}s$. Montrer qu'il existe un mouvement brownien α tel que l'on ait $\theta_t = \alpha_{A_t}$. Ce mouvement brownien est-il indépendant du processus R ?

   On vérifie aisément $\langle\theta\rangle_t = A_t$*, et par ailleurs* A_t *tend vers l'infini presque-sûrement, par exemple parce que le mouvement brownien planaire est un processus de Markov récurrent. Le théorème de Dubins-Schwarz nous dit alors que l'on peut écrire* $\theta_t = \alpha_{A_t}$*, avec* α *mouvement brownien, et plus précisément* $\alpha_t = \theta_{A_t^{-1}}$*, où* A^{-1} *est la bijection réciproque de* A *(notons au passage que* A *est une bijection strictement croissante de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}_+$*). Notons que, conditionnellement à la réalisation du mouvement brownien* β *et donc du processus* R*, le processus* α *reste une martingale locale de crochet* t*, c'est-à-dire un mouvement brownien (en utilisant l'indépendance de* β *et* γ*). Ainsi,* α *est indépendant de* R*.*

4. Montrer que $(\log(R_t))_{t\geq 0}$ est une martingale locale de variation quadratique A_t.

   Le processus R *est presque-sûrement à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$*, donc le processus* $(\log(R_t))_{t\geq 0}$ *est bien défini, et par ailleurs la formule d'Itō, licite, nous donne*

$$\begin{aligned}\log(R_t) &= \log r + \int_0^t \frac{1}{R_s}\mathrm{d}\beta_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{R_s^2}\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{-1}{R_s^2}\mathrm{d}\langle\beta\rangle_s\\ &= \log r + \int_0^t \frac{1}{R_s}\mathrm{d}\beta_s.\end{aligned}$$

   Donc $(\log(R_t))$ *est une martingale de variation quadratique* A*.*

5. On introduit $T_a := \inf\{t \geq 0, R_t = a\}$ et $T_b := \inf\{t \geq 0, R_t = b\}$, avec $0 < a < r < b$. Calculer l'espérance de $A_{T_a \wedge T_b}$.

   $(\log(R_{t\wedge T_a \wedge T_b}))_{t\geq 0}$ *est une vraie martingale bornée qui converge p.s. vers* $\log R_{T_a\wedge T_b} = \mathbb{1}_{T_a<T_b} \log a + \mathbb{1}_{T_b<T_a} \log b$. *Le théorème d'arrêt nous donne alors facilement* $\mathbb{P}(T_a < T_b) = \frac{\log b - \log r}{\log b - \log a}$.

   Par ailleurs la martingale bornée est a fortiori bornée dans L^2, *d'où* $\mathbb{E}[A_{T_a\wedge T_b}] = \mathbb{E}[(\log R_{T_a\wedge T_b})^2 - (\log r)^2] = \log(b/r)\log(r/a)$, *après calcul.*

6. En déduire l'espérance de $\sup_{t\leq T_a\wedge T_b} \theta_t$.

   Oups... Erreur d'énoncé : Je voulais demander l'espérance du carré du supremum...

   On écrit $(\sup_{t\leq T_a\wedge T_b} \theta_t)^2 = (\sup_{t\leq A_{T_a\wedge T_b}} \alpha_t)^2$. *Conditionnellement à* $A_{T_a\wedge T_b}$, *ce supremum a la même loi que* $|\alpha_{A_{T_a\wedge T_b}}|$, *donc son carré est le carré d'une variable normale centrée de variance* $A_{T_a\wedge T_b}$, *donc est d'espérance* $A_{T_a\wedge T_b}$. *Il suffit alors de prendre l'espérance de cette espérance conditionnelle pour obtenir*

$$\mathbb{E}[(\sup_{t\leq T_a\wedge T_b} \theta_t)^2] = \log(b/r)\log(r/a).$$