Partiel de calcul stochastique (2h)

Les notes de cours sont autorisées. Tout autre document est interdit.

EXERCICE I

Soit B un mouvement brownien réel issu de 0, et $a < 0 < b$ réels. On note $T_a := \inf\{t \geq 0, B_t = a\}$, ainsi que $T_b := \inf\{t \geq 0, B_t = b\}$ et $T_{a,b} := T_a \wedge T_b$

1. Montrer que, pour tout *complexe* μ et tout réel x, le processus $(M_t^{\mu,x})_{t\geq 0}$ défini par

$$M_t^{\mu,x} = \exp(\mu(B_t + x) - \frac{\mu^2}{2}t)), \quad t \geq 0,$$

est une martingale complexe (cela signifie que sa partie réelle et sa partie imaginaire sont des martingales réelles). On soignera particulièrement la rédaction de cette première question.

2. Montrer que la transformée de Laplace de $T_{a,b}$ est donnée par

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda T_{a,b}}] = \frac{\cosh(\frac{b+a}{2}\sqrt{2\lambda})}{\cosh(\frac{b-a}{2}\sqrt{2\lambda})}, \qquad \lambda > 0.$$

On pourra penser à introduire la martingale $M^{\mu,x} + M^{-\mu,x}$, pour μ et x bien choisis.

3. Montrer que l'on a également

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda T_{a,b}} \mathbb{1}_{T_a < T_b}] = \frac{\sinh(b\sqrt{2\lambda})}{\sinh((b-a)\sqrt{2\lambda})}, \qquad \lambda > 0,$$

et déterminer, *à partir de cette expression*, la probabilité de l'événement $\{T_a < T_b\}$.

4. Pour $0 \leq \lambda < \frac{\pi^2}{2(b-a)^2}$, montrer, en utilisant la martingale $\mathrm{Re}(M^{i\sqrt{2\lambda}, \frac{a+b}{2}})$, que l'on a

$$\mathbb{E}[e^{\lambda T_{a,b}}] = \frac{\cos(\frac{b+a}{2}\sqrt{2\lambda})}{\cos(\frac{b-a}{2}\sqrt{2\lambda})}.$$

On pourra également proposer une deuxième méthode pour retrouver cette expression.

EXERCICE II

Soit M une (vraie) martingale continue issue de $M_0 = 0$ et bornée dans L^2. Le but de cet exercice est de montrer une inégalité reliant, pour p réel supérieur ou égal à 2, le p-ième moment de $\langle M \rangle_\infty$ et le $2p$-ième moment de $|M_\infty|$.

1. Justifier que la limite presque-sure M_∞ de M_t est bien définie et de carré intégrable. Justifier que $\langle M \rangle_\infty$ est également bien défini et fini presque sûrement. Enfin, justifier que pour tout temps d'arrêt T, on a

$$\mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_T] \le \mathbb{E}[M_\infty^2 \mathbb{1}_{T<\infty}].$$

2. En déduire que pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\mathbb{E}[(\langle M \rangle_\infty - \lambda)\, \mathbb{1}_{\langle M \rangle_\infty > \lambda}] \le \mathbb{E}[M_\infty^2 \mathbb{1}_{\langle M \rangle_\infty > \lambda}].$$

3. Montrer que, si f est une fonction croissante de classe C^1 s'annulant en 0, et si F est la primitive de f s'annulant en 0, alors

$$E[F(\langle M \rangle_\infty)] \le \mathbb{E}[M_\infty^2 f(\langle M \rangle_\infty)].$$

On pourra commencer par utiliser une autre expression de la primitive de f en faisant intervenir une intégration par parties.

4. En déduire, pour p réel supérieur ou égal à 2,

$$\mathbb{E}[(\langle M \rangle_\infty)^p] \le p\ \mathbb{E}[(\langle M \rangle_\infty)^{p-1} M_\infty^2],$$

puis, sous l'hypothèse supplémentaire $\mathbb{E}[(\langle M \rangle_\infty)^p] < \infty$,

$$\mathbb{E}[(\langle M \rangle_\infty)^p] \le p^p\ \mathbb{E}[|M_\infty|^{2p}].$$

EXERCICE III

Le but de cet exercice est de montrer que, pour M martingale locale continue, le processus M^2 est de variation quadratique finie, et de déterminer une expression de celle-ci en fonction de $\langle M \rangle$. Une application de ce résultat est ensuite proposée.

Dans les quatre premières questions, on fixe $t \ge 0$ et la notation $\Delta = \{t_0, \ldots, t_l\}$ désigne une subdivision de $[0, t]$, avec $t_0 = 0 < \ldots < t_l = t$. On notera également $|\Delta| = \min(t_i - t_{i-1}, 1 \le i \le l)$ son pas.

1. Dans les trois premières questions, on suppose que M est une (vraie) martingale continue et bornée. Justifier que

$$\sum_{i=1}^{l} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 \xrightarrow[|\Delta| \to 0]{L^2} \langle X \rangle_t.$$

2. Si H est un processus mesurable borné, justifier que l'on a également

$$\sum_{i=1}^{l} H_{t_{i-1}} \left[(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 - \langle X \rangle_{t_i} + \langle X \rangle_{t_{i-1}} \right] \xrightarrow[|\Delta| \to 0]{L^2} 0.$$

3. En déduire, sous l'hypothèse supplémentaire que H est continue,

$$\sum_{i=1}^{l} H_{t_{i-1}} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 \xrightarrow[|\Delta| \to 0]{L^2} \int_0^t H_s d\langle X \rangle_s.$$

4. Dans le cas général où M est une martingale locale continue, montrer que M^2 est un processus de variation quadratique finie, donnée par

$$\langle M^2, M^2 \rangle_t = 4 \int_0^t M_s^2 d\langle M, M \rangle_s.$$

5. Soient B et C deux mouvements browniens réels indépendants issus de 0, et $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ fixé. On définit les processus X et Y par $X_t = B_t^2 + \lambda C_t^2$ et $Y_t = B_t^2 + \lambda^2 C_t^2$.

On appelle $\mathcal{F}_t$ la complétion de la filtration canonique du processus $(B_t, C_t)_{t \geq 0}$, et $\mathcal{G}_t$ la complétion de la filtration canonique du processus $(X_t)_{t \geq 0}$. Autrement dit, $\mathcal{F}_t$ est la plus petite filtration complète rendant les processus B et C adaptés, et $\mathcal{G}_t$ est la plus petite filtration complète rendant X adapté. Clairement $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$. Montrer qu'il y a en fait égalité. On pourra commencer par montrer

$$\forall t \geq 0, \qquad \langle X, X \rangle_t = 4 \int_0^t Y_s^2 ds.$$