UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1

N° d'ordre : 54-2004

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme

d'habilitation à diriger des recherches par

Emmanuel Lévêque

du laboratoire de physique de l'École normale supérieure de Lyon – CNRS (UMR 5672)

Contributions à la description de l'agitation turbulente d'un fluide visqueux incompressible

soutenu le 10 Décembre 2004

après avis de :

Jean-Pierre Bertoglio	directeur de recherche du CNRS
	Laboratoire de Mécanique des Fluides et Acoustique, École Centrale Lyon - CNRS - UCBL
Olivier Cadot	maître de conférence à l'École Nationale Supérieure des Techniques Avancées - Paris
	Unité de MÉcanique - Dynamique des Fluides et Acoustique
Thierry Dombre	professeur à l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1
	Centre de Recherche sur les Très Basses Températures, CNRS – UJF – INPG
	-

devant le jury composé de :

Isabelle Baraffe	chargée de recherche du CNRS
	Centre de Recherche Astronomique de Lyon, ENS-Lyon – CNRS – UCBL
Christophe Baudet	professeur à l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1
	Laboratoire Écoulements Géophysiques et Industriels, CNRS – UJF – INPG
Jean-Pierre Bertoglio	
Lyderic Bocquet	professeur à l'Université Claude Bernard - Lyon 1
	Laboratoire de Physique de la Matière Condensée et Nanostructures, CNRS – UCBL
Olivier Cadot	
Thierry Dombre	
Krzysztof Gawedski	directeur de recherche du CNRS
	laboratoire de physique, ENS-Lyon – CNRS

Table des matières

Première partie I Travaux de recherche

1.	Con	texte et	problématique de la turbulence	3
	1.1	Le phé	énomène physique; l'attitude du mécanicien	4
		1.1.1	L'écoulement de Poiseuille, en régime laminaire	4
		1.1.2	La transition laminaire – turbulent	6
		1.1.3	Les contraintes turbulentes, ou contraintes de Reynolds	6
		1.1.4	La cinétique de l'écoulement moyen	8
		1.1.5	Le problème de fermeture des équations du mouvement moyen	10
	1.2	Du co	ncept de viscosité turbulente à celui de cascade d'énergie	10
		1.2.1	Le concept d'une viscosité turbulente et ses limites	11
		1.2.2	Le concept de cascade d'énergie de Richardson	13
	1.3	La turl	bulence comme problème de mécanique statistique ;	
		l'attitu	de du physicien	13
		1.3.1	Les équations de Navier-Stokes forcées	13
		1.3.2	La fonction de corrélation de la vitesse ; construction des macro et micro-échelles	
			de la turbulence	17
	1.4	La diff	ficulté du problème statistique	21
		1.4.1	Les équations statistiques de l'écoulement turbulent	21
		1.4.2	La représentation et la formulation du problème statistique	23
		1.4.3	Les états d'équilibre du système inviscide	26
		1.4.4	La turbulence à énergie constante	27
		1.4.5	La cascade d'énergie et la statistique hors-équilibre	29
		1.4.6	Une loi statistique de la cascade d'énergie : la théorie de Kolmogorov (1941)	30
		1.4.7	Au delà de la théorie de Kolmogorov	35
		1.4.8	Le formalisme de cascade multiplicative de Castaing	40
	1.5	Présen	tation des travaux	41
2.	Hiér	archie	statistique et structures dynamiques intermittentes	43
	2.1	Une al	osence de consensus mais quelques idées maîtresses	43
	2.2	Le mo	dèle de hiérarchie statistique	44
		2.2.1	Les ingrédients	44
		2.2.2	L'existence d'une fluctuation extrême identifiable	46
		2.2.3	La condition de fermeture statistique	47

i

1

		2.2.4 Application au modèle en couche de la turbulence : classe d'universalité des ex-	
		posants relatifs	.8
	2.3	La solution du modèle de hiérarchie statistique : le propagateur log-Poisson 5	1
	2.4	Article présenté	2
		2.4.1 «Some experimental support for an underlying log-poisson process in turbu-	
		lence», E. LÉVÊQUE, 2004	2
	2.5	La généralité du modèle de hiérarchie statistique 6	0
3.	Con	cilier cascade d'énergie et viscosité turbulente, à quel prix?	53
	3.1	Quelques considérations matérielles, mais néanmoins importantes 6	64
	3.2	La cascade d'énergie de la turbulence homogène et isotrope	6
		3.2.1 Le nombre d'onde dissipatif de Kolmogorov	8
		3.2.2 Le point d'inflexion du flux d'énergie	8
		3.2.3 Le rythme de la cascade d'énergie	9
	3.3	Modèle réduit des équations de Navier-Stokes	0
	3.4	Article présenté	2
		3.4.1 «Finite-mode spectral model of homogeneous and isotropic Navier-Stokes tur-	
		bulence : A rapidly depleted energy cascade»,	
		E. LÉVÊQUE & C. R. KOUDELLA, <i>Physical Review Letters</i> , vol. 86, 2001, p. 4033 7	2
4.	Cata	astrophe ultra-violette de la turbulence?	7
	4.1	L'intermittence aux petites échelles ; observations expérimentales et numériques 7	8
	4.2	Le cadre descriptif de la cascade, à toutes les échelles	0
	4.3	Article présenté	4
		4.3.1 «On the rapid increase of intermittency in the near-dissipation range of fully	
		developed turbulence», L. CHEVILLARD, B. CASTAING & E. LÉVÊQUE 8	4
5.	Арр	roche Lagrangienne de l'intermittence	1
	5.1	L'outil numérique	2
	5.2	Au sujet des corrélations Eulériennes et Lagrangiennes de vitesse 9	2
		5.2.1 Construction de la marche (aléatoire) d'une particule de fluide 9	6
	5.3	Articles présentés	0
		5.3.1 «Long-time correlations in lagrangian dynamics: A key to intermittency in tur-	
		bulence», N. MORDANT, J. DELOUR, E. LÉVÊQUE, A. ARNÉODO & JF.	
		PINTON, <i>Physical Review Letters</i> , vol. 89 (25), 2002, n ^o 254502. \ldots 10	0
		5.3.2 Experimental and Numerical Study of the Lagrangian Dynamics of High Rey-	
		nolds Turbulence», N. MORDANT, E. LEVEQUE & JF. PINTON, New Journal	
		of Physics, vol. 6, 2004, n° 116)4
6.	Turk	bulence au voisinage d'une paroi solide	.9
	6.1	Présentation du problème	.9
	6.2	Description de l'écoulement moyen près d'une paroi solide	0
		6.2.1 Les différentes zones de la couche limite	2
	6.3	Description statistique de la turbulence dans la zone logarithmique	4
		6.3.1 Echelles caractéristiques et lois d'échelle ; approche phénoménologique 15	4
		6.3.2 Les fonctions de structure généralisées de la vitesse	5
	6.4	Applications importantes à suivre	6
		6.4.1 Le cadre général de la modélisation sous-maille de la turbulence	6
		6.4.2 Le modèle de Smagorinsky	7

	6.4.3	Le raffinement du modèle de Smagorinsky près d'une paroi plane	158
	6.4.4	«Modified Smagorinsky model for boundary layer flow»	159
6.5	Article	présenté	162
	6.5.1	«Shear effects in non-homogeneous turublence», F. TOSCHI, E. LÉVÊQUE, &	
		G. RUIZ-CHAVARRIA, Physical Review Letters, vol. 85 (7), 2000, p. 1436	162
Deuxiè	me parti	e II Production et Activités Scientifiques	167
1. Pub	olications	s scientifiques	169
2. Act	ivités et 1	responsabilités	
liées	s au méti	ier de chercheur	173

Première partie

TRAVAUX DE RECHERCHE

Contexte et problématique de la turbulence

Tout d'abord, voici quelques propos très généraux sur le contexte et la problématique de la turbulence :

- le terme *turbulence* est attribué à une grande variété de phénomènes physiques dans lesquels un comportement violent et irrégulier se présente. Ici, nous l'utiliserons en référence au mouvement d'agitation (tridimensionnel) d'un fluide Newtonien supposé incompressible; mouvement gouverné par les équations mathématiques de Navier-Stokes.
- la turbulence est un système dynamique chaotique avec un très grand nombre de degrés de liberté, mais son désordre échappe aux descriptions de la mécanique statistique à l'équilibre : la turbulence est un phénomène fortement hors-équilibre.
- la turbulence est profondément liée à la structure non-linéaire des équations déterministes qui la gouvernent (les équations de Navier-Stokes); la solution de ces équations met en jeu des mouvements tourbillonnants très variés, en interaction permanente et simultanée.

Ces propriétés particulières confèrent au phénomène d'agitation turbulente une complexité difficile à cerner. Ainsi, depuis la fin du XIX^{ième} siècle et les premiers travaux d'Osborne Reynolds, on recherche l'information objective, qui permettrait l'élaboration d'une théorie descriptive et prédictive des écoulements turbulents. Il s'agit là d'un vaste programme de recherche, en grande partie inachevé, qui motive toujours de nombreux travaux scientifiques [1] (livre récent sur le sujet).



FIG. 1.1 – Turbulence dans un film de savon (Hamid Kellay, université de Bordeaux 1).

Deux attitudes, différentes dans leur forme mais cohérentes sur le fond, sont généralement adoptées dans l'appréhension des écoulements turbulents :

- la première consiste à aborder le sujet comme un problème de mécanique des fluides: c'est l'*attitude du mécanicien*. Le mécanicien s'attache à la cinétique de l'écoulement. Il exprime des bilans de conservation: masse, quantité de mouvement, énergie interne, etc., tient compte de la géométrie et des conditions aux bords, pour dégager un comportement global de l'écoulement; un comportement à grande échelle. Il s'agit, par exemple, de déterminer la perte de charge dans une conduite, l'efficacité de la dispersion d'un polluant ou les contraintes mécaniques exercées par l'écoulement sur un obstacle.
- la seconde attitude consiste à aborder la turbulence comme un problème de physique statistique :
 c'est l'*attitude du physicien*. Le physicien s'intéresse aux processus stochastiques élémentaires de l'agitation du fluide. Il veut comprendre le comportement du système dans son détail; à petite échelle. Il s'agit principalement de mettre en évidence des propriétés statistiques universelles des fluctuations turbulentes.

La difficulté du problème de la turbulence réside principalement dans le fait qu'il n'y a pas de séparation entre les grandes et les petites échelles : on ne peut pas traiter le comportement à grande échelle sans tenir compte explicitement du détail des mécanismes mis en jeu à petite échelle, et inversement. Les deux attitudes, mécanique et physique, sont donc fortement liées l'une à l'autre. Dans ce mémoire, je tacherai d'aborder la problématique de la turbulence en mêlant ces deux attitudes : en rappelant que dans le traitement statistique il s'agit aussi d'un problème de mécanique des fluides, et d'autre part que des considérations statistiques sont inévitables dans la description de la mécanique mise en jeu.

Ce premier chapitre introduit les principaux concepts inhérents à la description du mouvement turbulent d'un fluide. Il s'agira aussi de poser les questions, de soulever les points qui me paraissent intéressants et surtout motivent les travaux présentés dans les chapitres suivants (deux à six). Dans un premier temps, nous aborderons la turbulence du point de vue de la mécanique des fluides (section 1.1) puis nous montrerons qu'un traitement statistique est nécessaire (section 1.2). Dans un second temps, nous présenterons le problème statistique de la turbulence (section 1.3) et les difficultés rencontrées (section 1.4). Enfin, les travaux présentés dans ce mémoire seront introduits (section 1.5) puis développés dans les chapitres suivants.

La rédaction de ce chapitre d'introduction a été un exercice laborieux, qui m'a conduit à faire le point sur mes connaissances et chercher à en présenter une synthèse originale, accessible (je l'espère) au plus grand nombre.

1.1 Le phénomène physique ; l'attitude du mécanicien

1.1.1 L'écoulement de Poiseuille, en régime laminaire

Considérons l'écoulement permanent d'un liquide visqueux (incompressible) dans un tube fin incliné : il s'agit de l'écoulement de Poiseuille (1841) [2]. Les trajectoires du fluide sont rectilignes et parallèles à l'axe du tube, de sorte que u(r) est la seule composante non nulle de la vitesse (figure 1.2). Le mouvement se décompose ainsi en filets de fluide parallèles, glissant les uns sur les autres sans se mélanger : l'écoulement est *laminaire*.



FIG. 1.2 – Schéma de l'écoulement de Poiseuille dans un tube fin (capillaire) incliné. g désigne l'accélération gravitationnelle.

La force de frottement visqueux (par unité de surface) entre les filets, résultant des mécanismes de collision entre les particules du fluide, s'écrit

$$\tau(r) = -\mu \frac{du(r)}{dr}.$$
(1.1)

 μ est la *viscosité dynamique* du fluide. Cette notion de viscosité remonte à Newton (1687) qui proposa l'idée d'une résistance intérieure, proportionnelle à la vitesse relative des éléments de fluide [3].

La quantité $q = p + \rho gz$, où p et ρ sont respectivement la pression et la masse volumique du fluide, représente la charge de l'écoulement : c'est une force par unité de surface. Cette force est constante sur une section du tube et diminue linéairement le long de l'axe du fait de la viscosité du fluide. En hydraulique, on dit qu'il y a *perte de charge* [4] (cours de mécanique des fluides). Plus précisément, la conservation de la quantité de mouvement impose l'équation

$$\tau(r) = \frac{1}{2}Gr,\tag{1.2}$$

où la constante $G \equiv -dq(Z)/dZ > 0$ désigne la diminution de la charge par unité de longueur. Les équations (1.1) et (1.2) conduisent au profil de vitesse parabolique

$$u(r) = \frac{G}{4\mu}(R^2 - r^2)$$
(1.3)

vérifiant la condition de vitesse nulle à la paroi.

Pour le débit volumique Q, on obtient

$$Q \equiv \int_{0}^{R} 2\pi r u(r) dr = \frac{\pi G R^4}{8\mu}.$$
 (1.4)

Il s'agit de la loi mise en évidence expérimentalement par Hagen (1839) [5] et Poiseuille (1840) [6].

La puissance dissipée (par unité de masse) par l'écoulement est donnée par

$$\varepsilon_{\rm diss.} = \frac{GU}{\rho} \tag{1.5}$$

où $U \equiv Q/\pi R^2$ est la vitesse moyenne (sur une section). Il en suit ainsi

$$G = \frac{8\mu U}{R^2} \quad \text{puis} \quad \varepsilon_{\text{diss.}} = 8\nu \frac{U^2}{R^2} \tag{1.6}$$



FIG. 1.3 – Le profil moyen de vitesse est parabolique en régime laminaire. En régime turbulent, ce n'est plus le cas. La vitesse moyenne $\overline{u}(r)$ varie rapidement au voisinage de la paroi et est pratiquement constante au centre du tube. Cette variation rapide de la vitesse définit une couche limite, dont l'étude sera abordée au chapitre 6.

en notant $\nu \equiv \mu/\rho$ la *viscosité cinématique* du fluide. Ce taux de dissipation correspond à la puissance qu'il faut dépenser pour maintenir le régime d'écoulement permanent, c'est à dire pour compenser le travail des forces visqueuses. Nous obtenons que la puissance dissipée $\varepsilon_{diss.}$ est directement proportionnelle à la viscosité du fluide et augmente avec le carré de la vitesse moyenne.

En réalité, les calculs précédents ne s'avèrent valables que pour des tubes de très petite section. On peut s'en rendre compte en calculant la vitesse moyenne dans un tube de rayon 1 cm incliné d'une pente de 0,1%. L'eau prend, d'après la loi de Poiseuille, sous l'action de la seule pesanteur (en supposant que la pression est la même aux deux extrémités du tube), une vitesse de l'ordre de 10 cm/s. Dans un tube de rayon 1 m, la loi de Poiseuille donnerait une vitesse de 1 km/s. Les vitesses que l'on observe en pratique sont beaucoup plus petites. D'autre part, le profil moyen de vitesse n'est plus parabolique : la vitesse varie très rapidement au voisinage des parois et est pratiquement constante au centre du tube (figure 1.3). Enfin, la perte de charge par unité de longueur n'est plus proportionnelle à U (selon l'équation (1.6)) mais plutôt à U^2 . La puissance dissipée, quant à elle, n'est plus proportionnelle à U^2 mais à une puissance de U voisine de 3.

1.1.2 La transition laminaire – turbulent

On a pu expliquer ces différences en remarquant que, dès que les vitesses dépassent certaines valeurs critiques, la permanence et la régularité de l'écoulement cessent. Des mouvements irréguliers et tourbillonnants, dans lesquels les particules de fluide suivent des trajectoires enchevêtrées, prennent place. Les gradients de vitesse sont alors beaucoup plus importants et par conséquent, les résistances (visqueuses) très supérieures à celles qui correspondraient à un mouvement régulier de même vitesse moyenne. On passe du régime d'écoulement laminaire à celui d'*écoulement turbulent*.

Reynolds (1883) a mis en évidence cette transition en introduisant dans l'écoulement, à l'intérieur d'un tube de verre, un filet de fluide coloré (figure 1.4). À partir d'une certaine vitesse, le filet se trouble et se perd dans le liquide extérieur (figure 1.5 (b) et (c)). Le mouvement laminaire est stable pour les faibles vitesses et instable à partir d'une certaine vitesse critique.

1.1.3 Les contraintes turbulentes, ou contraintes de Reynolds

En régime turbulent, la vitesse (tridimensionnelle) du fluide en un point donné de l'espace subit des fluctuations temporelles rapides et sans période définie (figure 1.6). On est ainsi amené à considérer chaque composante de la vitesse $u_i(\vec{x},t)$, au point \vec{x} à l'instant t, comme la résultante d'une vi-



FIG. 1.4 – Gravure de l'expérience d'Osborne Reynolds, extraite de l'article «An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels», O. REYNOLDS, Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, vol. 174, 1883, p. 935-982.

tesse moyenne $\overline{u_i}(\vec{x},t)$ variant lentement en fonction de \vec{x} et de t, et d'une vitesse d'agitation $u'_i(\vec{x},t) \equiv u_i(\vec{x},t) - \overline{u_i}(\vec{x},t)$ variant très rapidement en fonction de \vec{x} et de t [7].

En théorie, la vitesse moyenne est définie comme la moyenne statistique sur des réalisations indépendantes de l'écoulement. En pratique, cette estimation est difficile à mettre en oeuvre. Dans le cas d'un écoulement turbulent (statistiquement) stationnaire, on invoque une propriété d'ergodicité pour assimiler la moyenne d'ensemble à une moyenne temporelle [8]:

$$\overline{u_i}(\vec{x}) \approx \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} u_i(\vec{x},\tau) d\tau$$
(1.7)

en choisissant l'intervalle de temps T très grand devant les périodes temporelles de la vitesse turbulente.

Quoique nulle en moyenne, la vitesse d'agitation intervient dans les lois du mouvement moyen. En effet, le produit $u_i u_j$ se décompose selon $(\overline{u_i} + u'_i)(\overline{u_j} + u'_j)$ et il en suit

$$\overline{u_i u_j} = \overline{u_i} \ \overline{u_j} + \overline{u'_i u'_j}.$$
(1.8)

Nous voyons donc que

- l'énergie cinétique moyenne de l'unité de volume $\frac{1}{2}\rho \overline{u_i u_i}$ est la somme de l'énergie cinétique de l'écoulement moyen $\frac{1}{2}\rho \overline{u_i} \overline{u_i}$ et de l'énergie cinétique d'agitation turbulente $\frac{1}{2}\rho \overline{u'_i u'_i}$.
- le tenseur d'impulsion $\sigma_{ij} = -\rho \overline{u_i u_j}$ est la somme du tenseur correspondant aux vitesses moyennes $-\rho \overline{u_i} \overline{u_j}$ et du tenseur $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ correspondant aux vitesses d'agitation turbulente.



FIG. 1.5 – (*a*): régime d'écoulement laminaire – (*b*): «The colour band would all at once mix up with the surrounding water, and fill the rest of the tube with a mass of coloured water» – (*c*): «On viewing the tube by the light of an electric spark, the mass of colour resolved itself into a mass of more or less distinct curls, showing eddies»

Par conséquent, pour tenir compte de la turbulence dans l'étude du mouvement moyen, il faut ajouter aux contraintes associées aux vitesses moyennes, les contraintes $\sigma'_{ij} \equiv -\rho \overline{u'_i u'_j}$ liées à l'agitation turbulente. Ces dernières sont appelées les *contraintes de Reynolds* (1895) [9].

1.1.4 La cinétique de l'écoulement moyen

les équations cinétiques :

Historiquement, les équations qui régissent le mouvement d'un fluide visqueux (Newtonien) sont connues depuis le début du XIX^{ième} siècle. Il s'agit des équations de Navier-Stokes; forme locale du principe fondamental de la dynamique énonçant la conservation de la quantité de mouvement [12] [4]. Pour chaque composante $u_i(\vec{x},t)$ de la vitesse:

$$\frac{Du_i}{Dt} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}.$$
(1.9)

Par ailleurs, nous supposons que la masse volumique ρ du fluide ne varie pas, c'est à dire que le fluide est *incompressible*. La conservation de la masse impose alors la contrainte supplémentaire

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \tag{1.10}$$

qui est aussi satisfaite par la vitesse moyenne $\overline{u_i}$ et la vitesse d'agitation u'_i .

En moyennant les équations de Navier-Stokes, on obtient pour chaque composante $\overline{u_i}(\vec{x},t)$ de la vitesse moyenne :

$$\frac{\overline{D}\overline{u_i}}{\overline{D}t} \equiv \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i'u_j'}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_j}.$$
(1.11)

Ce sont les équations du mouvement moyen.

Pour l'énergie cinétique (par unité de masse) $\overline{e_c} \equiv \frac{1}{2}\overline{u_i}^2$:

$$\frac{\overline{D}\overline{e_c}}{\overline{D}t} \equiv \frac{\partial\overline{e_c}}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial\overline{e_c}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{1}{\rho}\overline{u_j}\,\overline{p} + \left(2\nu\overline{S_{ij}} - \overline{u_i'u_j'}\right)\overline{u_i} \right) - \left(2\nu\overline{S_{ij}} - \overline{u_i'u_j'}\right)\overline{S_{ij}}.$$
 (1.12)



FIG. 1.6 – On peut enregistrer les fluctuations temporelles de vitesse turbulente en un point donné de l'espace, au moyen d'un anémomètre à fil chaud [10]. Il s'agit ici d'une mesure de vitesse, loin dans le sillage d'un cylindre vertical (réalisée par Christophe Baudet, Antoine Naert, Sergio Ciliberto et Gerardo Ruiz-Chavarria au laboratoire de physique de l'ENS-Lyon, 1995 [11]). Le fluide est l'air.

$$\overline{S_{ij}} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right)$$
(1.13)

représente le tenseur des vitesses moyennes de déformation [13] (cours de turbulence).

la transition laminaire-turbulent et le nombre de Reynolds :

La transition laminaire — turbulent est relative à la prépondérance du terme d'agitation turbulente $\overline{u'_i u'_j}$ (transport convectif) vis-à vis du terme de dissipation visqueuse $-2\nu \overline{S_{ij}}$ (transport diffusif). De manière heuristique, Reynolds proposa de quantifier l'efficacité relative de ces deux mécanismes (au sein de l'écoulement) par le nombre sans dimension

$$Re \equiv \frac{UL}{\nu}$$
 : nombre de Reynolds (1.14)

U et L caractérisent la vitesse et la taille de l'écoulement. À partir des équations dynamiques, on retrouve le nombre de Reynolds en considérant

$$\int_{\mathcal{V}} -\overline{u'_i u'_j} \,\overline{S_{ij}} \sim \frac{U^3}{L} \quad \text{et} \quad \int_{\mathcal{V}} \|\overline{S}\|^2 \sim \frac{U^2}{L^2}.$$
(1.15)

 $\int_{\mathcal{V}}$ désigne une moyenne sur l'écoulement et ~ signifie «se comporte comme » (à une constante multiplicative d'ordre un près).

Le régime turbulent correspond aux grands nombres de Reynolds et marque l'importance des contraintes liées à l'agitation turbulente par rapport aux contraintes visqueuses. Dans ce cas, la viscosité

cinématique ν n'est plus un paramètre pertinent (de l'écoulement moyen) et l'équation bilan de l'énergie cinétique devient

redistribue l'énergie au sein de l'écoulement moyen

$$\frac{\overline{D}\overline{e_c}}{\overline{D}t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad \left(-\frac{1}{\rho} \overline{u_j} \,\overline{p} - \overline{u_i' u_j'} \,\overline{u_i} \right) + \underbrace{\overline{u_i' u_j'} \,\overline{S_{ij}}}_{\text{transfert vers l'agitation turbulente}} . (1.16)$$

Le terme $\overline{u'_i u'_j}$ $\overline{S_{ij}}$ est important : il représente un transfert d'énergie cinétique vers la turbulence. Cette énergie cédée par le mouvement moyen sera finalement dissipée en chaleur par l'agitation du fluide à très petite échelle. La puissance dissipée (par unité de masse) par l'écoulement s'écrit donc $\int_{\mathcal{V}} -\overline{u'_i u'_j} \overline{S_{ij}} \sim U^3/L$, d'après les estimations (1.15).

Pour illustrer ces propos, revenons à l'écoulement de Poiseuille. En régime turbulent, la perte de charge par unité de longueur s'exprime sous la forme $G(\rho, U, R)$. Un argument d'analyse dimensionnelle conduit à

$$G \sim \frac{\rho U^2}{R}.\tag{1.17}$$

Cette prédiction est en accord avec les observations expérimentales. Quant à la puissance dissipée, elle devient

$$\varepsilon_{\text{diss.}} = \frac{GU}{\rho} \sim \frac{U^3}{R},$$
(1.18)

ce qui est cohérent avec le raisonnement précédent.

1.1.5 Le problème de fermeture des équations du mouvement moyen

Pour caractériser le tenseur des contraintes turbulentes σ'_{ij} , il faudrait connaître en chaque point et à chaque instant les propriétés du mouvement d'agitation. C'est là l'objet de nombreux travaux fondés sur des considérations statistiques, où $u'_i(\vec{x},t)$ est considérée comme une fonction aléatoire de la position \vec{x} et du temps t.

À partir des équations dynamiques, on serait tenté de calculer $\overline{u'_i u'_j}$ en considérant

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} = \overline{u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial t}} + \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial t}}$$
(1.19)

et en substituant les équations dynamiques pour $\partial u'_i/\partial t$ et $\partial u'_j/\partial t$. On aboutit de cette manière à une expression impliquant les corrélations triples $\overline{u'_i u'_j u'_k}$. De même, l'équation pour les corrélations triples implique les corrélations quadruples, et ainsi de suite. Ce problème, dit de *fermeture statistique*, est inhérent à la non-linéarité des équations de l'hydrodynamique. Ceci signifie qu'une *information* supplémentaire, sur la nature de la solution turbulente des équations de Navier-Stokes, est nécessaire pour décrire les contraintes de Reynolds avec un nombre fini de paramètres (macroscopiques).

1.2 Du concept de viscosité turbulente à celui de cascade d'énergie, ou la nécessité d'étudier le phénomène d'agitation turbulente dans son détail spatio-temporel

Comme nous l'avons présentée dans l'introduction, l'attitude du mécanicien consiste à aborder la cinétique de l'écoulement turbulent dans son ensemble. C'est la démarche suivie par Osborne Reynolds.

L'étude du mouvement moyen a du sens car elle permet d'accéder aux caractéristiques importantes de l'écoulement : perte de charge, force de traînée, coefficient de mélange, etc. Cependant, le problème de fermeture des équations du mouvement moyen souligne aussi la nécessité de caractériser la nature (statistique) de l'agitation turbulente. Nous allons voir que cette nature est complexe et échappe à une description classique. Il s'avère ainsi nécessaire d'étudier la turbulence dans son détail spatio-temporel : c'est l'attitude prise par le physicien. De ce point de vue, le problème est souvent idéalisé. Le désordre turbulent est supposé (localement) statistiquement homogène et isotrope, la vitesse du fluide est décomposée en modes de Fourier ou encore en ondelettes [14] (thèse de S. Roux) [15] (livres sur le sujet). Il s'agit principalement de caractériser les corrélations spatiales et temporelles du mouvement d'agitation turbulente.

1.2.1 Le concept d'une viscosité turbulente et ses limites

l'approche phénoménologique de la viscosité turbulente :

Supposons que l'écoulement moyen se décompose en filets horizontaux, et que la vitesse moyenne $\overline{u_x}$ soit croissante suivant la direction verticale y:

- les particules de fluide qui pénètrent dans un filet par le bas $(u'_y > 0)$ ont en moyenne une vitesse horizontale plus petite que la vitesse moyenne du filet : $u'_x < 0$.
- les particules qui pénètrent par le haut $(u'_y < 0)$ ont quant à elles une vitesse horizontale plus grande que la vitesse moyenne du filet : $u'_x > 0$.

Ainsi, dans les deux situations $\sigma'_{xy} \equiv -\rho \overline{u'_x u'_y} > 0.$

Le même raisonnement s'applique lorsque la vitesse moyenne $\overline{u_x}$ est décroissante suivant y, et conduit cette fois à $\sigma'_{xy} \equiv -\rho \overline{u'_x u'_y} < 0$.

Cette description phénoménologique suggère l'existence d'un frottement turbulent responsable d'échanges de quantité de mouvement entre les filets du mouvement moyen : des régions rapides vers les régions lentes. Ainsi, Boussinesq (1877) proposa d'écrire

$$\sigma'_{xy} = \mu_{\text{turb.}} \frac{d\overline{u_x}}{dy} \tag{1.20}$$

où le coefficient de proportionnalité $\mu_{turb.} > 0$ s'interprète comme une viscosité turbulente.

Il s'agit ici de traiter la turbulence comme un état de la matière en considérant les mouvements turbulents comme des mouvements moléculaires, mais avec des molécules dont le libre parcours moyen serait macroscopique et non plus microscopique [16]. Dans le cadre de cette approximation, le tenseur (complet) des contraintes de Reynolds, symétrique et de trace nulle, s'exprime sous la forme

$$\sigma_{ij}' = \mu_{\text{turb.}} \overline{S_{ij}} - \frac{1}{3} \rho \overline{u_k'}^2 \delta_{ij}$$
(1.21)

et la viscosité turbulente $\mu_{turb.}(\vec{x},t)$ peut a priori dépendre de la position \vec{x} et du temps t. Ce concept est aujourd'hui à la base de très nombreux modèles numériques de la turbulence, utilisés dans l'industrie. Nous reparlerons de la viscosité turbulente dans les chapitres 3 et 6, lorsque nous aborderons le problème de la modélisation numérique des grandes échelles de la turbulence.

l'ordre de grandeur et la modélisation de la viscosité turbulente :

Il est possible d'établir l'ordre de grandeur de la viscosité turbulente en considérant la puissance dissipée localement, c'est à dire $\varepsilon = -\overline{u'_i u'_j} \overline{S_{ij}}$ (par unité de masse). L'hypothèse de viscosité turbulente conduit à

$$\varepsilon = 2\nu_{\text{turb.}} \|\overline{S}\|^2. \tag{1.22}$$

En comparant ces deux expressions, on obtient donc

$$\frac{\nu_{\text{turb.}}}{\nu} \sim \frac{-u_i' u_j' \,\overline{S_{ij}}}{\nu \, \|\overline{S}\|^2}.\tag{1.23}$$

On retrouve ici une estimation (locale) de la prépondérance des effets d'agitation turbulente vis à vis des effets de dissipation visqueuse (sur l'écoulement moyen). La viscosité moléculaire est ainsi multipliée par un facteur de l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds pour donner la viscosité turbulente. Ce résultat fournit une explication du caractère fortement dissipatif de l'agitation turbulente.

La viscosité cinématique turbulente ν_{turb} est homogène au produit d'une vitesse par une longueur, suggérant d'écrire en analogie avec la théorie cinétique des gaz :

$$\nu_{\text{turb.}} = u'\ell_{\text{m}} \tag{1.24}$$

où u' et ℓ_m désignent respectivement la vitesse caractéristique et la *longueur de mélange* de la turbulence [17].

On a $-\overline{u'_i u'_j} \overline{S_{ij}} \sim {u'}^2 \|\overline{S}\|$ d'où $u' \sim \ell_m \|\overline{S}\|$ puis $\nu_{turb} \sim \ell_m^2 \|\overline{S}\|$ en utilisant les équations (1.22) et (1.24). Si l'on revient maintenant à la puissance dissipée, on obtient $\varepsilon \sim \ell_m^2 \|\overline{S}\|^3 \sim {u'}^3/\ell_m$ et donc finalement

$$\ell_{\rm m} \sim L \quad \text{et} \quad u' \sim U \tag{1.25}$$

en comparant avec l'estimation U^3/L de la puissance dissipée globale (par unité de masse). Ce résultat indique que la turbulence implique des mouvements dont la taille et l'énergie sont de l'ordre de grandeur de celles de l'écoulement moyen. On s'attend ainsi à ce que la turbulence marque profondément la cinétique globale du système. Par la suite, nous verrons que l'agitation turbulente implique des mouvements, non seulement à l'échelle de l'écoulement, mais sur un continuum d'échelles allant de la taille de l'écoulement à l'échelle de la dissipation moléculaire.

Au delà de ce modèle de longueur de mélange, une alternative consiste à construire des lois de comportement de certaines quantités susceptibles de caractériser la viscosité turbulente. Par exemple, on peut chercher à modéliser la viscosité turbulente selon

$$\nu_{\rm turb} = C \frac{k^2}{\varepsilon},\tag{1.26}$$

où k et ε représentent respectivement l'énergie cinétique et la puissance dissipée de l'agitation turbulente. Il s'agit de la classe des célèbres modèles $(k - \varepsilon)$ [18] (cours de turbulence), qui nécessitent par ailleurs d'utiliser deux équations modèles supplémentaires (fermées) satisfaites par les deux quantités k et ε .

les limites du concept d'une viscosité turbulente :

L'analogie avec les mouvements moléculaires comporte de sévères limitations théoriques. Dans un gaz dilué de sphères dures, les particules se percutent de façon ponctuelle, aléatoire et indépendante. Cette interaction est bien décrite en terme de probabilité de transition relative à la collision entre deux

13

particules. D'autre part, le libre parcours moyen des particules est très petit devant l'échelle de variation spatiale de la vitesse du gaz, c'est à dire la taille du système : on suppose qu'il y a une séparation d'échelle entre l'agitation moléculaire et le mouvement du gaz. Ces hypothèses conduisent à l'introduction d'un coefficient phénoménologique de diffusion, appelé viscosité (moléculaire). Au contraire, l'agitation turbulente résulte de l'interaction continue, simultanée, d'une multitude de mouvements tourbillonnants dont les échelles (spatiales) atteignent la taille du système (figure 1.7). Les hypothèses faites en cinétique des gaz sont donc profondément mises en défaut. Les énergies cinétiques respectives des tourbillons en interaction peuvent être significativement différentes. L'agitation turbulente serait l'analogue d'un gaz dont la température changerait d'un ordre de grandeur sur le libre parcours moyen des particules en interaction. On perçoit dès à présent que le problème de mécanique statistique, relatif aux échanges d'énergie entre les tourbillons turbulents, ne pourra pas être traité de manière habituelle : il s'agit d'un système thermodynamique dans un état (fortement) *hors-équilibre*.

1.2.2 Le concept de cascade d'énergie de Richardson

A l'époque où fut introduit le concept de viscosité turbulente, Lewis Richardson (1922) suggéra l'idée d'une *cascade d'énergie* vers les petites échelles [19] : des mouvements tourbillonnants à l'échelle de l'écoulement moyen sont générateurs de tourbillons à des échelles un peu plus petites, qui eux-mêmes gênèrent des mouvements à des échelles plus petites, etc. Ce processus de cascade d'énergie se termine finalement lorsque les mouvements de très petite taille sont amortis sous l'effet de la viscosité moléculaire. Ce concept de cascade fait abstraction de l'écoulement moyen et se focalise sur l'organisation spatio-temporelle de l'agitation turbulente. En particulier, il ne s'agit pas d'un mouvement localisé à une échelle de mélange mais d'une hiérarchie de mouvements en interaction permanente, réalisant un transfert d'énergie des grandes vers les petites échelles. De manière phénoménologique, Richardson a ainsi introduit une première information sur la nature de l'agitation turbulente. Cette information marquera profondément l'approche du problème de la turbulence.

Une description phénoménologique de la cascade d'énergie, portant sur le temps caractéristique du transfert d'énergie à travers les échelles, sera proposée au chapitre 3.

1.3 La turbulence comme problème de mécanique statistique ; l'attitude du physicien

1.3.1 Les équations de Navier-Stokes forcées

les équations cinétiques de l'agitation turbulente :

Le physicien s'intéresse à l'agitation turbulente. À partir des équations de Navier-Stokes, on peut établir pour chaque composante $u'_i(\vec{x},t)$:

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i' u_j' - \overline{u_i' u_j'} \right) + \left(u_j' \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \overline{u_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_j}$$
(1.27)

et pour l'énergie cinétique moyenne $\overline{e_c'} \equiv \frac{1}{2} \overline{{u_k'}^2}$ (par unité de masse) :

$$\frac{\overline{D}}{\overline{Dt}}\overline{e_c'} \equiv \frac{\partial \overline{e_c'}}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial \overline{e_c'}}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\overline{u_i'u_i'u_j'} + \frac{1}{\rho}\overline{u_j'p'} - 2\nu\overline{u_i'S_{ij}'}\right)}_{(1.28)} \quad \underbrace{-\overline{u_i'u_j'}\overline{S_{ij}}}_{(1.28)} \quad \underbrace{-\overline{u_i'u_j'}\overline{S_{ij}}}_{(1.28)}$$

redistribue l'énergie



FIG. 1.7 – Dessin de Léonard de Vinci (1508) représentant le mouvement turbulent d'un fluide autour d'un obstacle (en haut) et dans une chute (en bas).



FIG. 1.8 – Représentation schématique des échanges moyens d'énergie dans un écoulement pleinement turbulent, statistiquement stationnaire et homogène [18]. La turbulence est pleinement développée lorsque $2\nu \|\overline{S}\|^2 \ll -\overline{u'_i u'_i} \overline{S_{ij}}$.

 S'_{ij} désigne le tenseur des vitesses turbulentes de déformation

$$S'_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right).$$
(1.29)

On retrouve le terme $-\overline{u'_i u'_j} \overline{S_{ij}}$ de l'équation (1.12), qui représente ici une production d'énergie (turbulente); le terme $-2\nu \|S'\|^2$ représente la dissipation moléculaire; le terme de transport convectif $-\partial()/\partial x_j$ redistribue l'énergie (en la conservant) au sein de l'agitation turbulente. En régime station-naire et homogène, ce bilan d'énergie devient

$$-\overline{u_i'u_j'}\,\overline{S_{ij}} = 2\nu \overline{\|S'\|^2}.\tag{1.30}$$

Les différents échanges d'énergie mis en jeu sont représentés sur le schéma de la figure 1.8.

la micro-échelle de l'agitation turbulente et le nombre de Reynolds turbulent :

La description des variations (spatiales) fines de la vitesse suggère l'introduction d'une micro-échelle turbulente. Il s'agit d'exprimer les gradients de la vitesse turbulente sous la forme $\overline{||S'||^2} \sim (u'/\lambda)^2$. Pour le taux moyen de dissipation locale :

$$\varepsilon = -\overline{u'_i u'_j} \,\overline{S_{ij}} \sim \nu \left(\frac{u'}{\lambda}\right)^2. \tag{1.31}$$

L'échelle caractéristique λ est la *micro-échelle (turbulente) de Taylor* (1938) [20].

En considérant $-\overline{u'_i u'_j} \overline{S_{ij}} \sim u'^2 \|\overline{S}\|$, on obtient $\|\overline{S}\| \sim \nu/\lambda^2$. Ainsi, la prépondérance locale des effets turbulents par rapport aux effets visqueux (sur le mouvement moyen) se ré-écrit

$$\frac{-\overline{u_i'u_j'}\,\overline{S_{ij}}}{\nu\|\overline{S}\|^2} \sim \left(\frac{u'\lambda}{\nu}\right)^2. \tag{1.32}$$

Cette nouvelle estimation conduit à la définition du nombre sans dimension

$$R_{\lambda} \equiv \frac{u'\lambda}{\nu}$$
 : nombre de Reynolds turbulent. (1.33)

Le régime de turbulence pleinement développée est atteint pour les grands nombres de Reynolds turbulents. En utilisant l'équation bilan (1.30), on obtient également que la turbulence est pleinement développée lorsque

$$R_{\lambda} \sim \frac{\sqrt{\|S'\|^2}}{\|\overline{S}\|} \gg 1, \tag{1.34}$$

c'est à dire lorsque les gradients de la vitesse turbulente sont grands (en moyenne quadratique) comparés à ceux de la vitesse moyenne.

Il est important de préciser que la description de l'agitation turbulente est nécessairement locale (en espace) car la turbulence est excitée par les gradients de vitesse moyenne $\overline{S_{ij}}$, qui ne sont pas uniformes au sein d'un écoulement. Pour l'écoulement dans le tube incliné, on s'attend à ce que les propriétés statistiques de l'agitation turbulente près de la paroi, où les gradients de vitesse moyenne sont grands, soient très différentes des propriétés loin de la paroi, où ces gradients sont presque nuls. Le nombre de Reynolds turbulent et les propriétés de la turbulence dépendent ainsi de la distance à la paroi. On parle dans ce cas de *turbulence inhomogène*. Ce point sera abordé au chapitre 6.

Dans la pratique, on préfère définir un nombre de Reynolds local proportionnel à R_{λ}^2 [21] (thèse de Laurent Chevillard). Par abus de langage, on parle fréquemment du nombre de Reynolds en désignant le nombre de Reynolds local :

$$Re_{\text{local}} \equiv \frac{u'L}{\nu} \sim R_{\lambda}^2.$$
 (1.35)

L représente la longueur de corrélation de la vitesse turbulente (voir la section suivante).

le lien avec la cascade de Richardson :

La cascade d'énergie vers les petites échelles est assurée par le terme convectif de l'équation (1.28). Ce terme non-linéaire transmet l'énergie fournie par l'écoulement moyen (à l'échelle des gradients de la vitesse moyenne) vers les petites échelles où elle sera finalement dissipée en chaleur.

En régime de turbulence développée, on obtient

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j} + \frac{1}{\rho} \overline{u'_j p'} - 2\nu \overline{u'_i S'_{ij}} \right) \approx -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j} + \frac{1}{\rho} \overline{u'_j p'} \right)$$
(1.36)

et l'équation globale de la cascade d'énergie devient

le modèle du physicien :

Le physicien se place dans le référentiel de l'écoulement moyen (l'hypothèse d'homogénéité locale est sous-entendue) et se concentre sur la dynamique de la cascade turbulente. Il considère pour les composantes $u'_i(\vec{x},t)$ de la vitesse turbulente, les équations de Navier-Stokes forcées :

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_j} + f_i, \qquad (1.38)$$

où la force extérieure $f_i(\vec{x},t)$ rend compte de l'influence de l'écoulement moyen sur l'agitation turbulente. Cette force stochastique assure une production constante d'énergie à grande échelle de sorte que

$$\overline{f_i u_i'} \approx -\overline{u_i' u_j'} \,\overline{S_{ij}}.\tag{1.39}$$

Dans la suite, nous examinerons les propriétés statistiques de la solution de l'équation (1.38). Pour simplifier les notations, les primes seront omis pour représenter les fluctuations turbulentes et la densité volumique du fluide sera prise égale à un : $\rho = 1$.

1.3.2 La fonction de corrélation de la vitesse ; construction des macro et micro-échelles de la turbulence

L'objet central de la description statistique de l'agitation turbulente (supposée stationnaire) est la fonction de corrélation spatiale (à deux points) de la vitesse [22]:

$$R_{ij}(\vec{x},\vec{r},t) \equiv \langle u_i(\vec{x},t)u_j(\vec{x}+\vec{r},t)\rangle \tag{1.40}$$

où $\langle . \rangle$ représente la moyenne d'ensemble (notation du physicien).

Dans le cadre (académique) d'une statistique stationnaire, homogène, isotrope et sans hélicité¹, la fonction de corrélation ne dépend que de l'échelle $r \equiv |\vec{r}|$. Il est alors judicieux de considérer séparément les corrélations longitudinales et transverses [23], en écrivant

$$R_{\parallel}(r) = \frac{1}{3} \langle u_i^2 \rangle f(r) \quad \text{et} \quad R_{\perp}(r) = \frac{1}{3} \langle u_i^2 \rangle g(r).$$
(1.41)

On obtient alors

$$R_{ij}(r) = \frac{1}{3} \langle u_i^2 \rangle \left(\frac{f(r) - g(r)}{r^2} r_i r_j + g(r) \delta_{ij} \right)$$
(1.42)

et la condition d'incompressibilité impose la relation supplémentaire

$$g(r) = f(r) + \frac{r}{2} \frac{df(r)}{dr}.$$
(1.43)

On voit ainsi que l'étude des corrélations de la vitesse turbulente se réduit à celle des seules corrélations longitudinales (figure 1.9).

la construction (explicite) des macro et micro-échelles de la turbulence :

- pour une séparation nulle, la fonction de corrélation $R_{\parallel}(0) = \frac{1}{3} \langle u_i^2 \rangle > 0$: il s'agit d'une mesure de l'intensité énergétique de l'agitation turbulente.
- pour des séparations suffisamment grandes, on peut considérer que $u_{\parallel}(\vec{x},t)$ et $u_{\parallel}(\vec{x}+\vec{r},t)$ ne sont plus corrélées de sorte que $R_{\parallel}(r) = 0$.

Le comportement de $R_{\parallel}(r)$ permet ainsi de définir une longueur de corrélation spatiale, ou macroéchelle de la turbulence (figure 1.10). Cette macro-échelle caractérise la taille des plus grands tourbillons de l'agitation du fluide ; elle est généralement estimée par

$$L \equiv \int_0^\infty f(r)dr \quad : \acute{e}chelle \ int\acute{e}grale \ de \ la \ turbulence. \tag{1.44}$$



FIG. 1.9 – *L'outil central de la description statistique de l'agitation turbulente, supposée stationnaire, homogène, isotrope et sans hélicité, est la fonction de corrélation spatiale longitudinale :* $R_{\parallel}(r) \equiv \langle u_{\parallel}(\vec{x} + \vec{r}, t)u_{\parallel}(\vec{x}, t) \rangle \equiv \frac{1}{3} \langle u_i^2 \rangle f(r)$.



FIG. 1.10 – Mesure dans le sillage turbulent d'un cylindre vertical (C. Baudet et al., 1995), suffisamment loin de l'obstacle pour supposer que la statistique turbulente soit homogène, isotrope et sans hélicité. On retrouve pour l'échelle intégrale une longueur de l'ordre de grandeur du diamètre du cylindre (D = 0.10 m). On peut néanmoins remarquer que l'échelle intégrale donnée par l'équation (1.44) sous-estime assez largement la portée des corrélations de la vitesse.



FIG. 1.11 – Le spectre (en échelle) de la turbulence pleinement développée est très étendu. On peut montrer explicitement que $L/\lambda_{\parallel} \sim R_{\lambda}$ (nombre de Reynolds turbulent).

Les mesures expérimentales indiquent que l'échelle intégrale est de l'ordre de grandeur de la taille de l'écoulement, ce qui signifie encore que l'agitation turbulente est corrélée à l'échelle du système. Cette observation est cohérente avec le raisonnement mené pour estimer la longueur de mélange turbulent (section 1.2.1).

Il est également possible de construire une micro-échelle λ_{\parallel} en caractérisant le comportement de f(r) au voisinage de 0. En effet, la condition d'homogénéité spatiale impose f'(0) = 0 et

$$f(r) = 1 - \left(\frac{r}{\lambda_{\parallel}}\right)^2 + \mathcal{O}(r^4) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\lambda_{\parallel}^2} = -\frac{1}{2}\frac{d^2f}{dr^2}(0).$$
 (1.45)

Si l'on considère l'incrément de vitesse longitudinal $\delta u_{\parallel}(r) \equiv u_{\parallel}(\vec{x} + \vec{r}, t) - u_{\parallel}(\vec{x}, t)$, on obtient d'une part

$$\frac{\langle \delta u_{\parallel}(r)^2 \rangle}{2 \langle u_{\parallel}^2 \rangle} \approx \left(\frac{r}{\lambda_{\parallel}}\right)^2 \quad \text{pour} \quad r \to 0 \tag{1.46}$$

et d'autre part

$$\frac{\langle \delta u_{\parallel}(r)^2 \rangle}{2 \langle u_{\parallel}^2 \rangle} \approx 1 \quad \text{pour} \quad r \gtrsim L.$$
(1.47)

La représentation de $\langle \delta u_{\parallel}(r)^2 \rangle / 2 \langle u_{\parallel}^2 \rangle$ en fonction de l'échelle r permet ainsi de visualiser la séparation entre la macro-échelle et la micro-échelle de la turbulence. Cette séparation définit l'étendue en échelle de l'agitation turbulente (voir la figure 1.11).

Pour le tenseur des vitesses turbulentes de déformation, l'hypothèse d'isotropie conduit à

$$\langle \|S\|^2 \rangle \sim \lim_{r \to 0} \frac{\langle \delta u_{\parallel}(r)^2 \rangle}{r^2} \sim \frac{\langle u_{\parallel}^2 \rangle}{\lambda_{\parallel}^2}.$$
 (1.48)

^{1.} Les corrélations croisées sont nulles, e.g., $\langle u_x(\vec{x},t)u_y(\vec{x}+r\vec{e_x},t)\rangle = 0.$

 λ_{\parallel} est donc bien conforme à la définition de micro-échelle turbulente formulée par Taylor (section 1.3.1). Cependant, on aurait pu construire de la même manière une micro-échelle λ_{\perp} à partir de la fonction de corrélation transverse. En pratique, c'est d'ailleurs λ_{\perp} que l'on choisit pour représenter la micro-échelle turbulente λ de Taylor. On a $\lambda_{\perp} = \lambda_{\parallel}/\sqrt{2}$ par l'équation (1.43) d'où

$$\frac{1}{\lambda^2} = \lim_{r \to 0} \frac{\left\langle \delta u_{\parallel}(r)^2 \right\rangle}{\left\langle u_{\parallel}^2 \right\rangle r^2}.$$
(1.49)

La puissance dissipée moyenne s'écrit alors

$$\varepsilon = 15\nu \frac{u_{\rm rms}^2}{\lambda^2} \tag{1.50}$$

où $u_{\rm rms} \equiv \langle u_{\parallel}^2 \rangle^{1/2}$ est l'écart type de chaque composante de la vitesse [23].

La puissance dissipée moyenne ε permet d'établir le lien entre la macro-échelle et la micro-échelle de la turbulence. En régime stationnaire, ε désigne la puissance qu'il faut fournir à grande échelle pour maintenir la permanence de l'agitation turbulente. Ainsi, par un argument d'analyse dimensionnelle on peut estimer $\varepsilon \sim u_{\rm rms}^3/L$. On obtient alors

$$\left(\frac{L}{\lambda}\right) \sim R_{\lambda}.\tag{1.51}$$

L'étendue en échelle de l'agitation turbulente est proportionnelle au nombre de Reynolds turbulent.

à propos de la micro-échelle turbulente de Taylor :

Par construction, la micro-échelle de Taylor représente l'échelle caractéristique des fluctuations spatiales les plus fines de la vitesse. Selon Taylor : « *it may be regarded as a measure of the diameters of the smallest eddies which are responsible for the dissipation of energy* ».

La relation $\langle ||S||^2 \rangle \sim (u_{\rm rms}/\lambda)^2$ sous-entend l'existence d'un processus d'agitation décorrélé à l'échelle λ , mais cette hypothèse n'est pas valable car $\lambda \ll L!$ Il convient donc de considérer les corrélations de la vitesse turbulente à l'échelle des gradients. Ce constat motive l'introduction d'une micro-échelle η satisfaisant la relation

$$\left\langle \|S\|^2 \right\rangle \sim \frac{\left\langle \delta u_{\parallel}(\eta)^2 \right\rangle}{\eta^2}.$$
 (1.52)

Dans ce cas, il est nécessaire de décrire le comportement de $\langle \delta u_{\parallel}(r)^2 \rangle$ en fonction de l'échelle r pour déterminer η . Il s'agit de l'approche suivie par Kolmogorov (1941).

Nous avons vu que la fonction de corrélation $R_{\parallel}(r)$ contenait des informations importantes sur la portée des interactions de la turbulence, et constituait de ce fait un outil essentiel pour la construction d'une description statistique. La fonction de corrélation $R_{\parallel}(r)$ détermine aussi le spectre d'énergie (en nombre d'onde) de la turbulence. À ce jour, il n'y a pas de théorie pour décrire $R_{\parallel}(r)$. Ainsi, lorsqu'il est mentionné que la turbulence reste un problème non résolu, cela sous-entend en tout premier lieu que l'on ne sait pas décrire le comportement de $R_{\parallel}(r)$ à partir de principes physiques fondamentaux.

l'hypothèse de turbulence gelée :

Dans le cadre (idéalisé) d'une turbulence homogène, les fluctuations turbulentes sont solutions des équations de Navier-Stokes dans le référentiel de l'écoulement moyen :

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}.$$
(1.53)

Cela signifie que la turbulence se développe indépendamment du mouvement d'advection, ou en d'autres termes, que la turbulence est passivement transportée par l'écoulement moyen. Si la vitesse moyenne U est grande devant la vitesse caractéristique de l'agitation $u_{\rm rms}$, il est alors légitime de considérer que le profil spatial de vitesse turbulente est transporté par l'écoulement moyen sans se déformer sur des temps très courts : il s'agit de l'hypothèse de *turbulence gelée* [1].

Si l'on introduit le taux de turbulence

$$\mathcal{T} \equiv \frac{u_{\rm rms}}{U},\tag{1.54}$$

l'hypothèse de turbulence gelée est valide pour les faibles taux de turbulence : dans la pratique on considère $T \leq 10\%$ comme une condition acceptable. Les résultats expérimentaux présentés dans ce mémoire utilisent cette hypothèse.

1.4 La difficulté du problème statistique

La théorie statistique de la turbulence fait référence aux propriétés statistiques de la solution des équations de Navier-Stokes. Le besoin d'une description statistique apparaît naturellement du fait de la complexité intrinsèque de cette solution et de sa sensibilité à de faibles perturbations des conditions aux bords et initiale. Il semble ainsi judicieux d'examiner un ensemble de réalisations plutôt que chaque réalisation individuellement, et de vouloir mettre en évidence des lois de probabilité simples [24] (livre sur la mécanique statistique de la turbulence).

La statistique des fluctuations observées dans les expériences en laboratoire, ou dans les simulations numériques directes des équations de Navier-Stokes, est complexe. La distribution à un point de la vitesse turbulente est proche d'une distribution Gaussienne mais les distributions conjointes à plusieurs points (\vec{x},t) s'écartent nettement de la loi Gaussienne : ce comportement est heuristiquement associé à la concentration de vorticité le long de filaments.

Enfin, mentionnons que le problème statistique de la turbulence est d'un intérêt considérable du point de vue de la mécanique statistique des systèmes irréversibles [25] (article de vulgarisation).

1.4.1 Les équations statistiques de l'écoulement turbulent

Nous allons tout d'abord raisonner de manière très générale.

Pour construire une description statistique du champ de vitesse, considérons un ensemble infini de réalisations de l'écoulement et établissons des moyennes sur ces réalisations [23]. Pour chacune de ces réalisations, la vitesse $\vec{v}(\vec{x},t)$ s'écrit comme la somme de deux composantes, moyenne et fluctuante :

$$v_i(\vec{x},t) \equiv U_i(\vec{x},t) + u_i(\vec{x},t).$$
 (1.55)

La statistique de la partie fluctuante nous intéresse plus particulièrement. Elle est décrite par l'ensemble (infini) des fonctions de corrélation

$$U_{ij}(\vec{x},t;\vec{x'},t') = \left\langle u_i(\vec{x},t)u_j(\vec{x'},t') \right\rangle,$$
(1.56)
$$U_{ijk}(\vec{x},t;\vec{x'},t';\vec{x''},t'') = \left\langle u_i(\vec{x},t)u_j(\vec{x'},t')u_k(\vec{x''},t'') \right\rangle,$$
etc.

Le problème statistique est a priori bien posé, si à l'instant initial t_0 on donne la vitesse moyenne $U_i(\vec{x},t_0)$ et la fonction de corrélation $U_{ij}(\vec{x},t_0;\vec{x}',t_0')$ et si l'on suppose que la distribution de la vitesse turbulente $\vec{u}(\vec{x},t_0)$ est Gaussienne.

Aux temps $t > t_0$, la distribution de $\vec{u}(\vec{x},t)$ n'est plus forcément Gaussienne du fait des corrélations imposées par la dynamique (non-linéaire) des équations de Navier-Stokes. Cette évolution est gouvernée par l'ensemble (infini) des équations statistiques satisfaites par les fonctions de corrélation (1.56).

l'équation statistique pour la fonction de corrélation $U_{ij}(\vec{x},t;\vec{x'},t')$:

Ne serait-ce que pour se rendre compte de la faisabilité des calculs!

- On considère la vitesse $\vec{v}(\vec{x},t)$ du fluide (incompressible) dans un domaine \mathcal{V} .
- la première étape consiste à éliminer la pression des équations de Navier-Stokes.
 - La pression est solution de l'équation de Poisson

$$\nabla^2 p(\vec{x},t) = -\frac{\partial^2 v_i v_j}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x},t), \quad \vec{x} \in \mathcal{V}.$$
(1.57)

On peut exprimer $p(\vec{x},t)$ sous la forme

$$p(\vec{x},t) = -\int_{\mathcal{V}} d^3 y D(\vec{x},\vec{y}) \frac{\partial^2 v_i v_j}{\partial y_i \partial y_j} (\vec{y},t) - \nu \int_{\partial \mathcal{V}} d^3 y D(\vec{x},\vec{y}) n_i \frac{\partial^2 v_i(\vec{y},t)}{\partial n(\vec{y})^2}$$
(1.58)

avec par convention $\partial^2/\partial n^2 \equiv n_j n_m \partial^2/\partial x_j \partial x_m$. La fonction de Green du Laplacien D(x,y) est la solution pour $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$ de l'équation

$$\nabla_{\vec{x}}^2 D(\vec{x}, \vec{y}) = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial D(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n(\vec{x})} = 0, \quad \vec{x} \in \partial \mathcal{V}.$$
(1.59)

Le terme de surface de (1.58) est lié à la condition aux bords imposée à la vitesse. On considère ici que la composante normale à $\partial \mathcal{V}$ est nulle : $n_i(\vec{x})v_i(\vec{x},t) = 0$, ce qui revient encore à poser

$$\frac{\partial p(\vec{x},t)}{\partial n(\vec{x})} = \nu n_i(\vec{x}) \frac{\partial^2 v_i(\vec{x},t)}{\partial n(\vec{x})^2}, \quad \vec{x} \in \partial \mathcal{V}.$$
(1.60)

 l'étape suivante consiste à ré-injecter l'expression de la pression (1.58) dans les équations de Navier-Stokes. On obtient alors une équation de la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right) v_i(\vec{x}, t) = -L_{ij}(\nabla) v_j(\vec{x}, t) - \frac{1}{2} P_{ijm}(\nabla) v_j(\vec{x}, t) v_m(\vec{x}, t),$$
(1.61)

où les opérateurs intégro-différentiels $Lij(\nabla)$ et $P_{ijm}(\nabla)$ sont définis par

$$P_{ijm}(\nabla) \equiv P_{ij}(\nabla)\frac{\partial}{\partial x_m} + P_{im}(\nabla)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

avec
$$P_{ij}(\nabla)f(\vec{x}) \equiv \delta_{ij}f(\vec{x}) - \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\int_{\mathcal{V}} d^3y D(\vec{x},\vec{y})f(\vec{y}) \quad (1.62)$$

et
$$L_{ij}(\nabla)f(x) \equiv \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\partial \mathcal{V}} d^2 y D(\vec{x}, \vec{y}) n_j(\vec{y}) \frac{\partial^2 f(\vec{y})}{\partial n(\vec{y})^2}.$$
 (1.63)

Un terme supplémentaire de forçage peut apparaître au membre de droite de l'équation (1.61) si le fluide est soumis à un champ de force extérieure. Par exemple, pour l'écoulement dans un tube incliné (infiniment long) il faudrait rajouter un terme $-\rho g \vec{e_z}$ pour représenter la force de pesanteur s'exerçant sur le fluide.

Si l'on considère maintenant $v_i = U_i + u_i$ avec $\langle u_i \rangle = 0$, on établit d'une part

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right) U_i(\vec{x}, t) + L_{ij}(\nabla) U_j(\vec{x}, t) =$$

$$-\frac{1}{2} P_{ijk}(\nabla) U_j(\vec{x}, t) U_k(\vec{x}, t) - \frac{1}{2} P_{ijk}(\nabla) U_{jk}(\vec{x}, t; \vec{x}, t)$$

$$(1.64)$$

et d'autre part

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla_{\vec{x}}^{2}\right) U_{il}(\vec{x},t;\vec{x'},t') + L_{ij}(\nabla_{\vec{x}}) U_{jl}(\vec{x},t;\vec{x'},t') = (1.65)$$

$$-P_{ijk}(\nabla_{\vec{x}}) U_{j}(\vec{x},t) U_{kl}(\vec{x},t;\vec{x'},t') - \frac{1}{2} P_{ijk}(\nabla_{\vec{x}}) U_{jkl}(\vec{x},t;\vec{x},t;\vec{x'},t').$$

On observe que la corrélation triple U_{jkl} intervient dans l'équation statistique de U_{il} , ce qui signifie qu'il est nécessaire de considérer l'équation statistique pour U_{jkl} . De la même manière, on peut montrer que les corrélations triples s'expriment en fonction des corrélations quadruples, et ainsi de suite. Cette situation, que l'on avait déjà rencontrée dans l'étude du mouvement moyen, constitue une difficulté majeure [26]. Une condition de fermeture statistique sera proposée au chapitre 2, sur la base d'arguments phénoménologiques.

1.4.2 La représentation et la formulation du problème statistique

Nous allons maintenant nous placer dans un cadre idéalisé. Comme paradigme du problème statistique de la turbulence, nous allons considérer la solution tronquée des équations de Navier-Stokes forcées dans une boîte cubique de côté L avec des conditions périodiques sur toutes les faces [27] (cours sur la mécanique statistique de la turbulence).

la solution tronquée de la turbulence :

Le développement en série de Fourier de la vitesse turbulente (de moyenne nulle) est donné par

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \sum_{\vec{k}} \vec{\hat{u}}(\vec{k},t) \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x}) \quad \text{avec} \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}^3$$
(1.66)

et les modes de Fourier sont solutions de l'équation dynamique

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \underbrace{\nu k^2)\hat{u}_{\alpha}(\vec{k},t)}_{\vec{k},\vec{k},\vec{k}} = -\frac{i}{2}P_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k})\sum_{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k}}\hat{u}_{\beta}(\vec{p},t)\hat{u}_{\gamma}(\vec{q},t) + \underbrace{P_{\alpha\beta}(\vec{k})f_{\beta}(\vec{k},t)}_{\vec{k},\vec{k},\vec{k}}$$
(1.67)

redistribue l'énergie entre les modes $k_0 \lesssim k \lesssim k_d$

où

$$P_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k}) \equiv k_{\beta}P_{\alpha\gamma}(\vec{k}) + k_{\gamma}P_{\alpha\beta}(\vec{k}) \quad \text{et} \quad P_{\alpha\beta}(\vec{k}) \equiv \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{k^2}$$
(1.68)

est l'opérateur de projection sur l'espace des fonctions de divergence nulle.

L'opérateur $P_{\alpha\beta}(\vec{k})$ préserve la condition d'incompressibilité imposée au temps initial :

$$k_{\alpha}\hat{u}_{\alpha}(\vec{k},t) = 0. \tag{1.69}$$

Une solution tronquée est obtenue en limitant la dynamique d'interaction (par triade) des équations de Navier-Stokes aux excitations dont le nombre d'onde est inférieur à une certaine coupure (spectrale) k_c :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right)\hat{u}_{\alpha}(\vec{k},t) = -\frac{i}{2}P_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k})\sum_{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k}}^{|\vec{p}|,|\vec{q}|\leq k_c}\hat{u}_{\beta}(\vec{p},t)\hat{u}_{\gamma}(\vec{q},t) + P_{\alpha\beta}(\vec{k})f_{\beta}(\vec{k},t) \quad \text{pour} \quad |\vec{k}| \leq k_c.$$
(1.70)

Nous allons étudier la statistique de cette famille de systèmes dont les paramètres sont la force extérieure $\vec{f}(\vec{k},t)$, la viscosité cinématique ν et le nombre d'onde de coupure k_c . À force fixée, la limite thermodynamique (infinité de degrés de liberté excités) est obtenue en prenant

$$\lim_{\nu \to 0} \left(\lim_{k_c \to \infty} () \right). \tag{1.71}$$

L'ordre des limites est important, c'est ce que nous allons maintenant examiner.

une remarque sur l'influence de la coupure k_c :

En régime de turbulence développée stationnaire, la puissance dissipée compense (en moyenne) le taux de production d'énergie cinétique : $\varepsilon = \sum_{\vec{k}} \Re \langle P_{\alpha\beta}(\vec{k}) \hat{u}^*_{\alpha}(\vec{k},t) f_{\beta}(\vec{k},t) \rangle$. La viscosité cinématique n'apparaît donc pas dans le bilan global de dissipation turbulente. Cependant, la viscosité reste un paramètre important du problème lorsque l'on examine la dynamique individuelle des modes de Fourier.

Le coefficient d'amortissement visqueux s'écrit νk^2 pour les modes de nombre d'onde k. On s'attend ainsi à ce que les modes de la vitesse turbulente soient fortement atténués au delà d'un certain nombre d'onde k_d . Une estimation de k_d peut être obtenue en égalant l'amplitude du terme d'interaction non-linéaire, qui entretient l'agitation turbulente, et l'amplitude du terme de dissipation visqueuse, qui l'atténue, soit

$$E(k)^{3/2}k^{3/2} \approx \nu k^2 E(k)$$
 pour $k \approx k_{\rm d}$. (1.72)

E(k) désigne le spectre moyen d'énergie turbulente. Le nombre d'onde de *coupure dissipative* k_d est ainsi donné par

$$\left(\frac{E(k_{\rm d})}{k_{\rm d}}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \nu.$$
 (1.73)

À force extérieure et viscosité données, k_d est fixé. Si l'on choisit la coupure k_c de la solution tronquée de sorte que $k_c > k_d$, la solution tronquée constitue une bonne approximation de la solution complète des équations de Navier-Stokes, car les modes négligés (ou filtrés) sont tous presqu'éteints. En revanche, si l'on choisit $k_c < k_d$ on observe que la solution tronquée est très différente de la solution complète. Cela signifie que pour bien traiter la dynamique de la turbulence, il est nécessaire de tenir compte des interactions non-linéaires entre tous les modes de Fourier excités, c'est à dire entre les modes de nombre d'onde

$$0 < k \le k_{\rm d}.\tag{1.74}$$

Dans la limite des faibles viscosités : $k_d \to \infty$. Il est donc important de considérer d'abord la limite $k_c \to \infty$ avant de prendre $\nu \to 0$.

On peut résoudre numériquement le système dynamique (1.70) par une méthode *pseudo-spectrale* [28] (livre sur les méthodes spectrales).

- si l'on choisit la coupure de la représentation numérique (discrète) $k_c \gtrsim k_d$, la solution numérique est une bonne approximation de la solution (continue) des équations de Navier-Stokes. Dans ce cas, on dit que l'on effectue une *simulation numérique directe* (DNS pour *Direct Numerical Simulation*) des équations de Navier-Stokes.
- si l'on choisit $k_c < k_d$, pour économiser des ressources informatiques par exemple, il est alors nécessaire de modéliser les interactions (dites *sous-maille*) entre les modes résolus et les modes filtrés. En général, on tient compte de ces interactions en ajoutant une composante turbulente $\nu_{turb.}(\vec{k},t)$ à la viscosité cinématique :

$$-\frac{i}{2}P_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k})\sum_{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k} \text{ avec } |\vec{p}|,|\vec{q}|>k_{c}}\hat{u}_{\beta}(\vec{p},t)\hat{u}_{\gamma}(\vec{q},t)\approx-\nu_{\text{turb.}}(\vec{k},t)k^{2}\hat{u}_{\alpha}(\vec{k},t).$$
(1.75)

Il s'agit de la problématique abordée dans le chapitre 3.

la représentation du système :

Revenons à la solution tronquée des équations de Navier-Stokes : $\vec{u}(\vec{x},t) = \sum_{k < k_c} \vec{\hat{u}}(\vec{k},t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x})$.

Les coefficients de Fourier $\vec{u}(\vec{k})$ ne sont pas linéairement indépendants : ils satisfont la condition d'incompressibilité (1.69) et la relation de conjugaison

$$\hat{u}_{\alpha}(-\vec{k}) = \hat{u}_{\alpha}^{\star}(\vec{k}). \tag{1.76}$$

Il est préférable de travailler avec un ensemble de variables indépendantes. Pour ce faire, on considère les parties réelle et imaginaire des composantes de Fourier indépendantes vis à vis des contraintes (1.69) et (1.76). On les ordonne en un ensemble $\{q_{\alpha}\}_{\alpha=1,...,N}$. Cet ensemble représente les degrés de liberté indépendants de notre système.

Pour chaque vecteur d'onde, on décompose $\vec{u}(\vec{k})$ sur une base orthonormée $(\vec{n}_1(\vec{k}), \vec{n}_2(\vec{k}))$ dans le plan perpendiculaire à \vec{k} . On considère ensuite les parties réelle et imaginaire indépendantes de cette décomposition, que l'on note $q_{\alpha}/\sqrt{2}$.

Les équations dynamiques pour les q_{α} se mettent sous la forme

$$\dot{q}_{\alpha} + \nu_{\alpha} q_{\alpha} = \sum_{\beta\gamma} A_{\alpha\beta\gamma} q_{\beta} q_{\gamma} + f_{\alpha} \qquad (A_{\alpha\beta\gamma} = A_{\alpha\gamma\beta}).$$
(1.77)

 ν_{α} et $A_{\alpha\beta\gamma}$ correspondent respectivement aux coefficients de dissipation et de couplage non-linéaire des équations de Navier-Stokes. L'énergie cinétique (par unité de masse) du système est donnée par

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2. \tag{1.78}$$

au sujet du tenseur $A_{\alpha\beta\gamma}$:

Le tenseur d'interaction $A_{\alpha\beta\gamma}$ caractérise le couplage non-linéaire entre les différents degrés de liberté de l'agitation turbulente. Dans le cas inviscide ($\nu = 0$) et sans forçage :

- l'énergie totale E(t) est conservée, soit

$$\dot{E} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} A_{\alpha\beta\gamma} q_{\alpha} q_{\beta} q_{\gamma} = 0 \quad (\nu_{\alpha}, f_{\alpha} = 0).$$
(1.79)

Il en suit que pour tout triplet (α, β, γ) :

$$A_{\alpha\beta\gamma} + A_{\beta\gamma\alpha} + A_{\gamma\alpha\beta} = 0. \tag{1.80}$$

- un second invariant du mouvement, appelé hélicité, est défini par

$$H(t) = i \sum_{|k| \le K} \epsilon_{ijm} k_m \hat{u}_i(\vec{k}, t) \hat{u}_j^*(\vec{k}, t) \quad : \quad \dot{H} = 0.$$
(1.81)

- enfin, de nombreuses composantes du tenseur $A_{\alpha\beta\gamma}$ sont nulles. En effet, en considérant l'équation (1.70) on remarque que $A_{\alpha\beta\gamma} \neq 0$ si et seulement si les variables q_{α} , q_{β} et q_{γ} correspondent aux vecteurs d'ondes \vec{k} , $\vec{k'}$ et $\vec{k''}$ tels que $\vec{k} \pm \vec{k'} \pm \vec{k''} = \vec{0}$. On peut alors établir que

$$A_{\alpha\beta\gamma} \neq 0$$
 si et seulement si α, β, γ tous différents. (1.82)

On peut constater que les deux invariants quadratiques (l'énergie et l'hélicité) sont des invariants de la dynamique inviscide des équations de Navier-Stokes (sans forçage) qui persistent lors de l'introduction de la coupure k_c . Il existe une infinité d'invariants des équations continues : toute circulation de la vitesse sur un contour fermé est une constante du mouvement, mais ces invariants ne sont pas préservés après coupure.

1.4.3 Les états d'équilibre du système inviscide

Nous nous intéressons tout d'abord à l'état statistique du système conservatif : $\nu = 0$, $\vec{f} = \vec{0}$. Il s'agit de mettre en place une méthode et d'examiner comment celle-ci peut, ou ne peut pas, être étendue au cas de la turbulence, c'est à dire pour $\nu > 0$ et $\vec{f} \neq \vec{0}$.

La conservation du volume dans l'espace des phases s'exprime par

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \dot{q}_{\alpha}}{\partial q_{\alpha}} = 0 \quad (\nu_{\alpha} = 0), \tag{1.83}$$

qui peut être vue comme l'analogue du théorème de Liouville pour les variables canoniques d'un système Hamiltonien [29] (livre de physique statistique). La densité de probabilité du champ de vitesse tronquée (au temps t) est définie par $\rho(\vec{q},t)$ avec la condition de normalisation $\int \rho d\mu = 1$; $d\mu = \prod dq_{\alpha}$ désigne

l'élément de volume infinitésimal dans l'espace des phases. La conservation de la probabilité s'exprime alors sous la forme

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \frac{\partial\rho}{\partial q_{\alpha}} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha\beta\gamma} q_{\beta}q_{\gamma} \frac{\partial\rho}{\partial q_{\alpha}} = 0.$$
(1.84)

À l'équilibre $\partial \rho / \partial t = 0$:

$$\sum_{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha\beta\gamma} q_{\beta}q_{\gamma} \frac{\partial\rho}{\partial q_{\alpha}} = 0.$$
(1.85)

l'état d'équipartition de l'énergie :

Une constante du mouvement est particulièrement importante, il s'agit de l'énergie cinétique totale du système. La densité $\rho = \rho(E)$ est une solution de l'équation (1.85). Le principe de maximum d'entropie conduit au choix particulier de la distribution de Maxwell-Boltzmann

$$\rho(E) \sim \exp\left(-\beta E\right). \tag{1.86}$$

Cette distribution correspond à l'état d'équipartition de l'énergie :

$$\langle q_{\alpha}^2 \rangle \sim \frac{1}{\beta}.$$
 (1.87)

Dans cette formulation généralisée du postulat fondamental de la mécanique statistique, le paramètre β apparaît comme un multiplicateur de Lagrange fixé par la valeur de l'énergie totale. Si l'on revient aux composantes de Fourier, on obtient

$$\langle \hat{u}_i(\vec{k},t)\hat{u}_j^{\star}(\vec{k},t)\rangle = \frac{1}{\beta}P_{ij}(\vec{k}) \quad \text{pour} \quad |\vec{k}| \le k_c.$$

$$(1.88)$$

Cet état statistique est effectivement observé lorsque l'on simule numériquement l'équation (1.70) avec $\nu = 0$ et $\vec{f} = \vec{0}$.

Si l'on prend en compte la conservation de l'hélicité, la densité de probabilité à l'équilibre s'écrit

$$\rho(E,H) \sim \exp(-\beta(E-\xi H)) \tag{1.89}$$

où ξ s'interprète comme le potentiel chimique associé à l'hélicité. L'équilibre thermodynamique est caractérisé par

$$\langle q_{\alpha}^2 \rangle \sim \frac{\beta}{\beta^2 - \xi k_{\alpha}^2}.$$
 (1.90)

On peut remarquer que les coefficients $A_{\alpha\beta\gamma}$ n'interviennent pas dans la distribution d'équilibre. Cela implique que toute modification du tenseur $A_{\alpha\beta\gamma}$ préservant l'énergie et l'hélicité ne modifie pas la statistique de l'équilibre thermodynamique. Cette propriété ne sera pas vérifiée pour la turbulence, dont l'état statistique dépend, de manière cruciale, de la structure des interactions mises en jeu.

1.4.4 La turbulence à énergie constante

Nous nous plaçons maintenant en régime turbulent : $\nu > 0$ et $\vec{f} \neq 0$. Nous supposons que la force $f_{\alpha}(t)$ est ajustée à tout instant t de manière à ce que l'énergie totale du système reste constante. Dans l'espace des phases, la trajectoire du système est ainsi contrainte à rester sur la surface d'énergie constante $E = 1/2\sum_{\alpha} q_{\alpha}^2$. Allons nous pour autant obtenir un état stationnaire d'équipartition de l'énergie?

Pour répondre à cette question, on peut effectuer une simulation numérique directe des équations de Navier-Stokes. À chaque pas d'intégration, l'énergie dissipée est ré-injectée à faible nombre d'onde. On observe alors que le système évolue vers un état statistique stationnaire d'énergie constante, mais celui-ci ne correspond pas à l'état d'équipartition de l'énergie entre les degrés de liberté (figure 1.12). Le spectre d'énergie décroît rapidement en suivant la prédiction de la théorie Kolmogorov (1941) $E(k) \sim k^{-5/3}$, soit

$$\langle q_{\alpha}^2 \rangle \sim k_{\alpha}^{-\frac{11}{3}}.$$
 (1.91)



FIG. 1.12 – Spectre d'énergie stationnaire en nombre d'onde d'une simulation numérique directe des équations de Navier-Stokes à énergie constante (E. Lévêque). La prédiction de la théorie de Kolmogorov (1941) est donnée par $E(k) \sim k^{-5/3}$. L'énergie n'est pas distribuée uniformément entre les modes de Fourier : le système n'est pas à l'équilibre thermodynamique.

comment comprendre ces différences?

Le système isolé, inviscide et sans forçage, conserve l'énergie dans son mouvement. Cette contrainte détermine les états microscopiques accessibles du système et rien ne permet de privilégier (a priori) certains états par rapport aux autres. Le postulat fondamental de la mécanique statistique consiste alors à admettre qu'à l'équilibre tous les états accessibles sont équiprobables, ou encore, que la distribution d'équilibre est, parmi toutes celles qui vérifie la contrainte imposée au système, celle qui maximise l'entropie statistique [30]

$$S = \int \rho \log \rho d\mu. \tag{1.92}$$

Pourquoi ce même raisonnement ne s'applique-t-il pas au système turbulent à énergie constante?

Dans le cas de la turbulence, tous les états accessibles ne sont pas équiprobables. Il y a des états microscopiques privilégiés : il s'agit des états participant au transfert d'énergie des petits vers les grands nombres d'onde. Le postulat fondamental de la mécanique statistique, valable pour le système isolé, est ainsi mis en défaut par le phénomène de cascade d'énergie. L'état statistique (stationnaire) réalisé par le système dissipatif turbulent est un état (fortement) hors-équilibre.

Tout postulat physique doit être confronté à l'expérience : il s'agit ici de savoir si les probabilités des états microscopiques accessibles sont égales. Ce postulat n'est pas évident. En effet, si la préparation du système l'a placé dans un état particulier à t_0 , son état à l'instant t ultérieur est parfaitement déterminé par les équations dynamiques (déterministes), on s'attend donc à ce que seuls certains états microscopiques accessibles soient atteints. C'est le comportement chaotique du système, sa sensibilité à une perturbation infinitésimale, qui assure la validité du postulat fondamental : ainsi un système isolé et à l'équilibre, visite successivement et régulièrement tous les états microscopiques accessibles [29]. Dans le cas de la turbulence, le système est chaotique mais suit des chemins particuliers dans l'espace des phases, de sorte que tous les états accessibles ne sont pas visités avec la même fréquence. On attribue ce comportement particulier à la présence du terme de dissipation $-\nu k^2 \vec{u}(\vec{k},t)$ qui contraint le système à développer une dynamique (particulière) de cascade d'énergie. Dans ce cas, la spécificité des interactions entre les degrés de liberté du système (la structure du tenseur $A_{\alpha\beta\gamma}$) devient importante. L'ensemble des chemins parcourus dans l'espace des phases définit l'attracteur du système. L'attracteur de la turbulence est très complexe : on dit qu'il est *étrange* [31].

1.4.5 La cascade d'énergie et la statistique hors-équilibre

Quant une force extérieure $\vec{f}(t)$ s'exerce sur le système, la situation devient compliquée lorsqu'il s'agit par exemple d'évaluer le tenseur de corrélation $\langle q_{\alpha}(t)q_{\beta}(t')\rangle$. On peut considérer le développement de Taylor

$$\vec{q}(t') = \vec{q}(t) + \dot{\vec{q}}(t)(t'-t) + \ddot{\vec{q}}(t)\frac{(t'-t)^2}{2} + \dots$$

et utiliser l'équation dynamique pour estimer toutes les dérivées de $\vec{q}(t)$, mais alors il faut connaître non seulement $\vec{f}(t)$ mais aussi toutes ses dérivées.

En toute généralité, une description statistique complète nécessite la détermination d'une densité de probabilité

$$\Psi\left(\left(\vec{q}(t), \vec{f}(t)\right)\right) \tag{1.93}$$

définie sur l'espace des paires de fonctions $\left(\vec{q}(t), \vec{f}(t)\right)$ satisfaisant l'équation dynamique (1.77).

On peut s'affranchir de cette dépendance vis à vis de $\vec{f}(t)$, en posant par exemple

$$f_{\alpha} = \nu_{\alpha}{}'q_{\alpha} \tag{1.94}$$

où $\nu_{\alpha}' > 0$ est un coefficient d'entraînement de la vitesse à faible nombre d'onde. On se ramène ainsi à une description classique, où la densité de probabilité $\rho(\vec{q}(t),t)$ est solution de l'équation de Liouville

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathcal{L}\rho = 0 \tag{1.95}$$

avec l'opérateur

$$\mathcal{L} = -\sum_{\alpha} \left((\nu_{\alpha} - \nu_{\alpha}') \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} q_{\alpha} - \sum_{\beta\gamma} A_{\alpha\beta\gamma} q_{\beta} q_{\gamma} \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \right).$$
(1.96)

On peut aussi supposer que la force $\vec{f}(t)$ est Gaussienne, de moyenne nulle et δ -corrélée en temps. Dans ce cas la contribution du forçage apparaît comme un terme de diffusion dans l'équation de Liouville précédente.

Le problème reste néanmoins très difficile car la détermination de la densité de probabilité $\rho(\vec{q})$ ne peut pas être menée de manière directe : une approche perturbative doit être envisagée. Sur ce sujet, deux travaux remarquables doivent être mentionnés. Il s'agit de l'approche perturbative proposée par Kraichnan [32] et de l'approche variationnelle de l'équation de Liouville (1.96) proposée par Qian [33]. Ces deux méthodes permettent de retrouver analytiquement le spectre d'énergie prédit par Kolmogorov (1941). Cependant, elles ne parviennent pas à décrire le comportement anormal des corrélations d'ordre supérieur de la vitesse turbulente [34]. Ce comportement anormal fait référence au phénomène d'*intermittence*, que nous présenterons dans la section 1.4.7.

l'approche de Kolmogorov :

L'approche de Kolmogorov (1941) est fondamentale car elle permet de prédire à partir d'arguments d'analyse dimensionnelle simples, le spectre d'énergie de la turbulence [1]. Pour construire la statistique hors-équilibre de la turbulence, Kolmogorov «exploite» une propriété essentielle du système : la cascade d'énergie vers les petites échelles.

1.4.6 Une loi statistique de la cascade d'énergie : la théorie de Kolmogorov (1941)

les hypothèses de similarité de Kolmogorov :

L'approche de Kolmogorov diffère de celle de Taylor, en considérant les distributions des incréments de la vitesse

$$\delta u_i(\vec{x}, \vec{r}, t) \equiv u_i(\vec{x} + \vec{r}, t) - u_i(\vec{x}, t).$$
(1.97)

Kolmogorov suppose que la statistique de δu_i est stationnaire, homogène et isotrope (sans hélicité). Cette hypothèse est moins stricte que celle de Taylor, en considérant des propriétés d'invariance non plus sur la vitesse mais sur les incréments spatiaux de la vitesse. On parle ici d'invariance locale plutôt que d'invariance globale. Comment les distributions de $\delta u_i(r)$ évoluent-elles avec l'échelle r?

La théorie de Kolmogorov repose sur deux hypothèses de similarité [36] :

- pour des échelles r petites devant l'échelle intégrale L, les distributions des incréments de vitesse $\delta u_i(r)$ sont universelles (indépendantes du mécanisme de forçage) et sont fixées par la viscosité cinématique ν et le taux moyen d'énergie dissipée par unité de masse ε .

En particulier, si l'on considère le second moment longitudinal

$$B_{\parallel}(r) \equiv \langle \delta u_{\parallel}(r)^2 \rangle, \qquad (1.98)$$

on obtient

$$B_{\parallel}(r) = \sqrt{\nu \varepsilon} \Phi(\frac{r}{\eta}). \tag{1.99}$$

 η est l'échelle élémentaire de la cascade d'énergie et $\Phi()$ est une fonction universelle sans dimension. Un argument d'analyse dimensionnelle donne

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}.\tag{1.100}$$

- pour des échelles r grandes devant η , les distributions de $\delta u_i(r)$ ne dépendent pas de ν .

On obtient ainsi aux échelles $\eta \ll r \ll L$:

$$\langle \delta u_{\parallel}(r)^2 \rangle = B \ (\varepsilon r)^{2/3} \tag{1.101}$$

où B est une constante universelle.

L'intervalle d'échelles $\eta \ll r \ll L$ est la *zone inertielle* : ce sont les effets inertiels du mouvement qui dominent à ces échelles.

On peut remarquer que la loi d'échelle (1.101) ne fait intervenir aucune échelle caractéristique. Cette propriété sous-entend que l'énergie se propage de manière auto-similaire (au sens statistique) à travers les échelles [35] (thèse de P. Chainais).


FIG. 1.13 – Spectre d'énergie en nombre d'onde, mesuré expérimentalement dans un jet turbulent (C. Baudet et A. Naert au laboratoire de Physique de l'ENS-Lyon). Le signal temporel de vitesse est enregistré en un point fixe de l'écoulement. La turbulence est homogène et isotrope en espace ; le nombre de Reynolds turbulent $R_{\lambda} \approx 390$. On observe une loi de décroissance du spectre en accord avec la prédiction de Kolmogorov $E(k) \sim k^{-5/3}$. On a utilisé ici l'hypothèse de turbulence gelée : $\omega = Uk$ où U est la composante moyenne de la vitesse.

à propos des micro-échelles de Taylor et de Kolmogorov :

L'échelle élémentaire η peut être vue comme l'échelle de coupure (ultra-violette) de la cascade d'énergie : la turbulence accomplit un transfert conservatif d'énergie jusqu'à l'échelle η , puis toute l'énergie est dissipée. Ainsi, on retrouve à partir des équations (1.100) et (1.101)

$$\varepsilon \sim \nu \frac{\langle \delta u_{\parallel}(\eta)^2 \rangle}{\eta^2}.$$
 (1.102)

La micro-échelle de Taylor correspond, quant à elle, à l'échelle caractéristique des fluctuations de vitesse (supposée indépendantes) contribuant à la dissipation :

~

$$\varepsilon \sim \nu \frac{u_{\rm rms}^2}{\lambda^2}.$$
 (1.103)

En rassemblant ces deux estimations, on obtient finalement

$$\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2 \sim \frac{u_{\rm rms}^2}{\langle \delta u_{\parallel}(\eta)^2 \rangle}.$$
 (1.104)

Le rapport λ/η met ainsi en évidence les corrélations spatiales du champ de vitesse aux plus petites échelles. En utilisant les définitions de ces deux échelles, on obtient explicitement

$$\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2 = \sqrt{15}R_\lambda. \tag{1.105}$$

Cette équation met l'accent sur l'importance des corrélations du champ de vitesse à très petite échelle dans le régime de turbulence pleinement développée. Cette propriété différencie nettement l'agitation turbulente d'un bruit (blanc) classique.

la prédiction du spectre d'énergie :

Dans l'hypothèse où le spectre d'énergie E(k) décroît suffisamment rapidement à très grand nombre d'onde, on obtient à partir de l'équation (1.101) la célèbre prédiction

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}.$$
(1.106)

C est la *constante de Kolmogorov*. Cette expression caractérise la variance des fluctuations turbulentes aux nombres d'onde où la dynamique est dominée par le terme d'interaction non-linéaire. Ce spectre est bien vérifié expérimentalement (figure 1.13) et numériquement (figure 1.12).

On peut étendre la prédiction de Kolmogorov à tous les nombres d'onde :

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}f(\frac{k}{k_d}),$$
(1.107)

où f() est une fonction universelle et

$$k_d = \left(\frac{\varepsilon}{\nu^3}\right)^{1/4} \sim \frac{1}{\eta} \tag{1.108}$$

est le nombre d'onde (dissipatif) de Kolmogorov.

Au chapitre 3, un autre nombre d'onde caractéristique sera introduit en raisonnant non plus sur le spectre mais sur la fonction de transfert d'énergie.

la mécanique de la cascade ; l'étirement de la vorticité :

Derrière les hypothèses de similarité de la théorie de Kolmogorov (1941), conduisant au spectre d'énergie $E(k) \sim k^{-5/3}$, se cache l'image d'une cascade d'énergie par interactions locales en nombre d'onde : la décroissance rapide du spectre suggère que seuls les modes de même nombre d'onde interagissent entre eux pour transférer de l'énergie à des nombres d'onde plus petits. D'un point de vue mécanique, si l'on considère un tourbillon d'une certaine taille, les mouvements à plus grandes échelles ont principalement pour effet de le transporter sans le déformer. D'autre part, les mouvements à plus petites échelles, plus rapides, sont en moyenne nuls à l'échelle de notre tourbillon et de ce fait le perturbent peu. Finalement, les seuls mouvements susceptibles d'affecter significativement la stabilité d'un tourbillon sont les tourbillons de même taille. Le mécanisme responsable du transfert d'énergie vers des échelles plus petites est alors celui de l'étirement de la vorticité.

un peu de cinématique :

La vorticité est définie comme le champ rotationnel de la vitesse :

$$\vec{\omega}(\vec{x},t) = \vec{\nabla} \times \vec{u}(\vec{x},t). \tag{1.109}$$

En prenant le rotationnel des équations de Navier-Stokes, on obtient l'équation dynamique

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} \equiv \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{\omega} = (\vec{\omega}.\vec{\nabla})\vec{u} + \nu\Delta\omega.$$
(1.110)

Pour illustrer le rôle fondamental du terme $(\vec{\omega}, \vec{\nabla})\vec{u}$ dans le mécanisme de transfert d'énergie, considérons l'équation précédente sans dissipation :

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\vec{\omega}.\vec{\nabla})\vec{u}.$$
(1.111)



FIG. 1.14 – Pour un fluide parfait (inviscide), le théorème de Helmholtz indique qu'une ligne de vorticité demeure constamment une ligne de vorticité [4]. Comme la nature chaotique de la turbulence tend à séparer deux éléments de fluide très proches, la ligne de vorticité a tendance à s'étirer.

Cette équation est identique à celle qui décrit la séparation de deux éléments de fluide très proches par un champ de vitesse \vec{u} :

$$\frac{D\vec{\delta s}}{Dt} = (\vec{\delta s}.\vec{\nabla})\vec{u} \tag{1.112}$$

où $\vec{\delta s}$ représente la distance initiale entre les deux éléments.

Si l'on choisit $\vec{\delta s}$ le long d'une ligne de vorticité, on obtient

$$\frac{D\delta s}{Dt} = \underbrace{\frac{\omega_i \omega_j}{\omega^2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta s}_{Dt} = \frac{1}{\omega^2} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\omega^2}{2}\right) \delta s} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2} \frac{D\omega^2}{\omega^2} = \frac{D\delta s}{\delta s}.$$
(1.113)

On en déduit ainsi que $\omega/\delta s$ est conservé et donc que l'allongement de la ligne de vorticité s'accompagne d'une intensification de la vorticité (figure 1.14). Une distribution initiale de vorticité aura ainsi tendance à s'étirer et se concentrer sur des objets géométriques fins et allongés (figure 1.15). Ces objets sont des *filaments de vorticité*. Nous utiliserons explicitement cette information dans le modèle d'exposants d'échelle présenté dans le chapitre 2.

La théorie de Kolmogorov repose sur l'hypothèse d'un transfert d'énergie homogène en espace, car seule la valeur moyenne de la dissipation est prise en compte. Au contraire, le mécanisme d'étirement de la vorticité indique que ce transfert est principalement réalisé par des objets étirés, qui ne remplissent qu'une faible partie de l'espace. Le mécanisme d'étirement de la vorticité semble donc remettre en cause l'approche de Kolmogorov.

la généralisation de la théorie de Kolmogorov :

On peut généraliser la théorie de Kolmogorov à tous les moments statistiques de $\delta u_{\parallel}(r)$ ou *fonctions* de structure de la vitesse : $S_p(r) \equiv \langle |\delta u_{\parallel}(r)|^p \rangle$. Les hypothèses de similarité conduisent à la prédiction

$$\langle |\delta u_{\parallel}(r)|^{p} \rangle = B_{p} (\varepsilon r)^{p/3} \quad : \quad \eta \ll r \ll L.$$
(1.114)



FIG. 1.15 – Instantané de la solution numérique des équations de Navier-Stokes (domaine cubique avec conditions aux bords périodiques, forçage aléatoire isotrope à faible nombre d'onde) où l'on a représenté les iso-surfaces de forte enstrophie $\omega^2(\vec{x},t) \equiv |\vec{\nabla} \times \vec{u}(\vec{x},t)|^2$. L'activité tourbillonnante se concentre sur une faible fraction de l'espace : le long de filaments.

Les constantes B_p sont universelles.

À partir de l'équation (1.114), on obtient que tous les moments normalisés

$$\frac{\langle |\delta u_{\parallel}(r)|^{p} \rangle}{\langle |\delta u_{\parallel}(r)|^{2} \rangle^{p/2}}$$
(1.115)

sont universels, indépendants du taux moyen de dissipation ε et de l'échelle r (dans la zone inertielle). Nous verrons que cette prédiction est contredite par les données expérimentales et numériques (figure 1.16).

une équation statistique exacte en turbulence homogène et isotrope :

À partir des équations de Navier-Stokes, on peut établir une équation exacte reliant le comportement des fonctions de structure longitudinales d'ordre deux et trois [37] :

$$-\frac{2}{3}\varepsilon(t) - \frac{1}{2}\frac{\partial\langle\delta u_{\parallel}(r,t)^{2}\rangle}{\partial t} = \frac{1}{6r^{4}}\frac{\partial r^{4}\langle\delta u_{\parallel}(r,t)^{3}\rangle}{\partial r} - \frac{\nu}{r^{4}}\frac{\partial}{\partial r}r^{4}\frac{\partial\langle\delta u_{\parallel}(r,t)^{2}\rangle}{\partial r}$$
(1.116)

avec

$$\varepsilon(t) = -\frac{3}{2} \frac{du_{\rm rms}(t)^2}{dt} = \frac{15\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \langle \delta u_{\parallel}(r,t)^2 \rangle|_{r=0}.$$
(1.117)

Cette équation est satisfaite dans le cadre d'une turbulence en déclin, c'est à dire sans production d'énergie cinétique à grande échelle [38]. Dans le cas d'une turbulence stationnaire, on montre de la même manière qu'aux échelles petites par rapport à l'échelle de forçage [39]:

$$-\frac{4}{5}\varepsilon r = \langle \delta u_{\parallel}(r)^3 \rangle - 6\nu \frac{d\langle \delta u_{\parallel}(r)^2 \rangle}{dr}.$$
(1.118)

L'équation de Karman-Howarth (1.118) établit qu'aux échelles inertielles

$$\langle \delta u_{\parallel}(r)^3 \rangle = -\frac{4}{5}\varepsilon r.$$
 (1.119)

Cette équation indique que la distribution de $\delta u_{\parallel}(r)$ n'est pas symétrique. Cette dissymétrie peut s'interpréter comme une signature de l'irréversibilité (temporelle) de la dynamique turbulente. En effet, en changeant t en -t, l'incrément de vitesse $\delta u_{\parallel}(r)$ devient $-\delta u_{\parallel}(r)$; si le système était réversible la distribution de $\delta u_{\parallel}(r)$ serait symétrique et le moment d'ordre trois serait nul.

1.4.7 Au delà de la théorie de Kolmogorov : prendre en compte le phénomène d'intermittence

L'hypothèse d'un comportement en lois de puissance des fonctions de structure de la vitesse (dans la zone inertielle) n'est pas remise en cause par l'expérience mais les exposants d'échelle mesurés ne varient pas linéairement avec l'ordre p [40]:

$$S_p(r) \sim r^{\zeta_p}$$
 mais $\zeta_p \neq \frac{p}{3}$ (sauf $\zeta_3 = 1$). (1.120)

Cet écart à la loi de Kolmogorov $\zeta_p = p/3$ est la signature d'une forte intermittence aux petites échelles.

Aux petites échelles (sous-entendues petites devant l'échelle intégrale) l'agitation turbulente du fluide s'organise en une assemblée de structures tourbillonnantes intenses, séparées par des régions plus calmes et plus désordonnées (figure 1.15). L'intermittence fait référence à ce comportement et rend compte de



FIG. 1.16 – Le coefficient d'aplatissement de la distribution de $\delta u_{\parallel}(r)$ est défini comme le moment renormalisé d'ordre 4 : $F(r) = \langle \delta u_{\parallel}(r)^4 \rangle / \langle \delta u_{\parallel}(r)^2 \rangle^2$ (C. Baudet et al.). Pour une distribution Gaussienne centrée, F = 3. On observe que F(r) n'est pas constant aux échelles $r \leq L$ (échelle intégrale). Les hypothèses de similarité de Kolmogorov sont donc clairement mises en défaut.

l'importance des zones actives par rapport aux zones calmes. De manière plus quantitative, la statistique de l'agitation du fluide à l'échelle r est caractérisée par l'incrément spatial de vitesse $\delta u_{\parallel}(r)$. Du fait de l'intermittence, la distribution de $\delta u_{\parallel}(r)$ s'écarte fortement d'une distribution Gaussienne à petite échelle. Cet écart peut être quantifié par le coefficient d'aplatissement

$$F(r) \equiv \frac{\langle \delta u_{\parallel}(r)^4 \rangle}{\langle \delta u_{\parallel}(r)^2 \rangle^2}.$$
(1.121)

On observe sur la figure 1.16 que l'intermittence augmente lorsque l'échelle r décroît. Une description originale de l'intermittence sera présentée dans le chapitre 4.

la théorie (raffinée) de Kolmogorov et Oboukhov :

En 1962, Kolmogorov et Oboukhov [41] ont proposé de raffiner la théorie de Kolmogorov (1941) en attribuant un rôle prépondérant à la distribution spatiale du taux de dissipation (par unité de masse) :

$$\varepsilon(\vec{x},t) \equiv 2\nu \|S(\vec{x},t)\|^2 = \frac{\nu}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u_i(\vec{x},t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\vec{x},t)}{\partial x_i} \right)^2 > 0.$$
(1.122)

Localement, le taux de dissipation à l'échelle r est défini par la moyenne (spatiale)

$$\varepsilon_r(\vec{x},t) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \int_{|\vec{y}| < r} \varepsilon(\vec{x}+\vec{y},t) d\vec{y}.$$
(1.123)

Les hypothèses de similarité précédentes sont reprises, en considérant que la turbulence est localement conditionnée à l'échelle r par la valeur de $\varepsilon_r(\vec{x},t)$:

$$B_{\parallel}(\vec{x},t,r|\varepsilon_r(\vec{x},t)) = B(\vec{x},t)r^{2/3}\varepsilon_r(\vec{x},t)^{2/3}.$$
(1.124)

Par intégration sur toutes les valeurs possibles de $\varepsilon_r(\vec{x},t)$:

$$B_{\parallel}(\vec{x},t,r) = B(\vec{x},t)r^{2/3} \left\langle \varepsilon_r(\vec{x},t)^{2/3} \right\rangle.$$
(1.125)

Dans le cadre d'une statistique homogène et stationnaire

$$B_{\parallel}(r) = B(\varepsilon r)^{2/3} \left(\frac{L}{r}\right)^{-\mu}$$
(1.126)

en notant

$$\langle \varepsilon_r(\vec{x},t)^{2/3} \rangle \equiv \varepsilon^{2/3} \left(\frac{L}{r}\right)^{-\mu}.$$
 (1.127)

Le paramètre μ est le *paramètre d'intermittence* : il caractérise l'écart à la prédiction de la théorie de Kolmogorov (1941) pour le moment d'ordre deux.

D'une manière plus générale, on obtient pour les fonctions de structure de la vitesse

$$\langle |\delta u_{\parallel}(r)|^{p} \rangle = B_{p}(\varepsilon r)^{p/3} \frac{\langle \varepsilon_{r}^{p/3} \rangle}{\varepsilon^{p/3}}.$$
(1.128)

Les corrections à la loi linéaire $\zeta_p = p/3$ sont donc contenues dans le comportement du terme $\langle \varepsilon_r^{p/3} \rangle / \varepsilon^{p/3}$ en fonction de l'échelle r:

si
$$\frac{\langle \varepsilon_r^{p/3} \rangle}{\varepsilon^{p/3}} \sim \left(\frac{r}{L}\right)^{\tau_{p/3}}$$
 alors $\zeta_p = \frac{p}{3} + \tau_{p/3}$. (1.129)

De manière heuristique, Kolmogorov et Oboukhov associent ainsi le phénomène d'intermittence aux fluctuations du taux de dissipation d'énergie, et ouvrent par la même occasion une boîte de Pandore contenant l'ensemble des distributions statistiques possibles pour le taux de dissipation [42] [43].

la statistique log-normale :

Kolmogorov et Oboukhov ont proposé un candidat plausible pour la statistique de ε_r : il s'agit du modèle log-normal, dans lequel la distribution de log ε_r est supposée Gaussienne :

$$\mathcal{P}(\log \varepsilon_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_r^2}} \exp\left(\frac{-(\log \varepsilon_r - m_r)^2}{2\sigma_r^2}\right).$$
(1.130)

Les paramètres m_r et σ_r^2 représentent respectivement la moyenne et la variance de $\log \varepsilon_r$. Le modèle log-normal conduit à la prédiction du spectre des exposants

$$\zeta_p = \frac{p}{3} + \frac{1}{2}\mu p(p-3)$$
 avec $\mu > 0.$ (1.131)

Le choix d'une statistique log-normale pour ε_r est raisonnable mais reste arbitraire. Il s'agit principalement d'obtenir une correction quadratique à la théorie linéaire précédente (voir le chapitre 4).



FIG. 1.17 – Coupe du champ de dissipation $\varepsilon(\vec{x},t)$ obtenue par simulation numérique directe des équations de Navier-Stokes (E. Lévêque). L'intensité de la dissipation est représentée par une barre de couleurs graduée de 0 à 1. Le champ de dissipation est organisé spatialement. On observe que la dissipation se concentre sur des structures fines.

au sujet du taux de dissipation :

Dans la théorie de Kolmogorov (1941), la statistique des fluctuations inertielles de la vitesse est fixée par le taux moyen de dissipation ε . Cette hypothèse se justifie si l'on considère que ε représente aussi le flux moyen d'énergie de la cascade (par conservation de l'énergie) et peut de ce fait être interprétée comme une grandeur inertielle.

La théorie de Kolmogorov (1941) ne suppose pas que $\varepsilon(\vec{x},t)$ est constant mais seulement que les fluctuations de $\varepsilon(\vec{x},t)$ ne sont présentes qu'à des échelles plus petites que l'échelle de coupure η . Aux échelles inertielles, les fluctuations du taux de dissipation sont négligées et l'on considère $\varepsilon_r(\vec{x},t) \approx \varepsilon$.

Dans la théorie raffinée de 1962, Kolmogorov et Oboukhov prennent en compte les fluctuations inertielles de $\varepsilon(\vec{x},t)$. Cependant, la considération du taux de dissipation à une échelle inertielle r n'est pas véritablement satisfaisante car $\varepsilon_r(\vec{x},t)$ reste une grandeur dissipative. Il n'y a donc a priori aucune raison de vouloir relier la statistique de $\delta u_{\parallel}(r)$ et celle de ε_r [42]. Il semblerait plus naturel de considérer une quantité directement liée au transfert d'énergie à l'échelle r [45].

au sujet de la cascade :

Dans la théorie raffinée de Kolmogorov et Oboukhov (1962) les distributions de $\delta u_{\parallel}(r)$ sont fixées par la viscosité cinématique ν , le taux moyen d'énergie dissipée ε et l'échelle intégrale L. L'introduction de l'échelle intégrale L est motivée par l'idée d'un transfert d'énergie résultant de la répétition d'un même processus élémentaire de fission des tourbillons en tourbillons plus petits : le pas de la cascade. Le nombre de pas nécessaires pour propager une excitation de l'échelle intégrale L à l'échelle r est alors mesuré par $\log(r/L)$. Il est aussi sous-entendu que chaque pas de cascade est indépendant des pas précédents. Cette représentation de la cascade d'énergie conduit au concept de *processus multiplicatif* à travers les échelles, qui sera par la suite développé par Bernard Castaing [46].

Enfin, dans la théorie de Kolmogorov (1941) les exposants d'échelle sont fixés par un argument dimensionnel. Ici, toutes les valeurs positives du paramètre μ sont a priori permises : c'est la structure du tenseur des interactions $A_{\alpha\beta\gamma}$ qui fixe la valeur du paramètre d'intermittence μ ; ce lien n'a pas encore pu être établi.

la log-normalité et l'étirement de la vorticité :

Dans le contexte du mécanisme d'étirement de la vorticité, l'augmentation de l'intermittence vers les petites échelles est liée à une activité tourbillonnante se concentrant sur une fraction volumique de l'espace de plus en plus faible.

Un modèle simple consiste à supposer que la vorticité est étirée par un taux d'étirement aléatoire :

$$\frac{D\omega}{Dt} = b(t)\omega \tag{1.132}$$

où b(t) représente l'étirement effectif du champ de vitesse. b(t) est supposé aléatoire et indépendant de $\omega(t)$. Cette équation conduit à

$$\log\left(\frac{\omega(t)}{\omega(0)}\right) = \int_0^t b(s)ds. \tag{1.133}$$

Pour t grand devant le temps de cohérence de b(s), la statistique de $\omega(t)$ devient log-normale. En supposant $\varepsilon(\vec{x},t) \sim \nu \omega^2(\vec{x},t)$ cette dynamique fournit un argument en faveur du modèle de Kolmogorov et Oboukhov (1962). Cependant, si l'on choisit une équation modèle plus réaliste pour la vorticité, en considérant par exemple une corrélation entre b(t) et $\omega(t)$, on obtient une nouvelle loi statistique pour

 $\omega(t)$. Finalement, on peut s'interroger sur le processus stochastique sélectionné par le mécanisme d'étirement de la vorticité. Il s'agit là d'une autre façon d'aborder la problématique de la turbulence [44] (article de revue).

Enfin, mentionnons que l'importance de la dynamique du fluide dans l'approche statistique motive naturellement une approche Lagrangienne du problème. Ce point de vue permet de s'affranchir des effets d'advection par les mouvements à grande échelle, et de se concentrer sur le mécanisme du transfert d'énergie vers les petites échelles. Cette approche sera développée dans le chapitre 5.

1.4.8 Le formalisme de cascade multiplicative de Castaing

Le formalisme développé par Bernard Castaing reprend l'idée d'un processus de cascade multiplicative à travers les échelles, et permet de traiter tous les processus stochastiques a priori possibles.

L'hypothèse d'auto-similarité (statistique) formulée dans la théorie de Kolmogorov (1941) implique que la distribution de $\delta u_{\parallel}(r)$ à l'échelle r est à un facteur de dilatation près, noté W(r/L), identique à celle de $\delta u_{\parallel}(L)$ à l'échelle intégrale :

$$\mathcal{P}_r(x) = \frac{1}{\mathcal{W}} \mathcal{P}_L(\frac{x}{\mathcal{W}}). \tag{1.134}$$

Les lois d'échelle $\langle |\delta u_{\parallel}(r)|^p \rangle = B_p(\varepsilon r)^{p/3}$ sont retrouvées pour $\mathcal{W}(r/L) = (r/L)^{1/3}$.

Une généralisation immédiate de cette relation d'auto-similarité est obtenue en supposant que le facteur de dilatation W(r/L) n'est pas fixe mais peut fluctuer (en restant positif). Il en suit

$$\mathcal{P}_{r}(x) = \int G_{r,L}(\log \mathcal{W}) \frac{1}{\mathcal{W}} \mathcal{P}_{L}(\frac{x}{\mathcal{W}}) d\log \mathcal{W}$$
(1.135)

où la fonction $G_{r,L}$ représente la distribution de la variable $\log W(r/L)$. Toute l'information concernant la forme de la distribution de $\delta u_{\parallel}(r)$ est contenue dans le *propagateur* $G_{r,L}$.

L'identité (1.135) repose sur des hypothèses très générales. En effet, si la distribution de $\delta u_{\parallel}(r)$ est fixée de manière univoque par la distribution de $\delta u_{\parallel}(L)$, et non pas par toute la succession des distributions entre les échelles r et L, cela signifie que le processus de cascade à travers les échelles est supposé Markovien. Une autre hypothèse apparaît si l'on considère la distribution Q_r de la variable $\log |\delta u_{\parallel}(r)|$. L'équation (1.135) est équivalente à la relation de convolution

$$Q_r = G_{r,L} \otimes Q_L, \tag{1.136}$$

ce qui revient encore à poser

$$|\delta u_{\parallel}(r)| = \mathcal{W}(\frac{r}{L}) \cdot |\delta u_{\parallel}(L)|$$
(1.137)

en supposant que les variables stochastiques W(r/L) et $|\delta u_{\parallel}(L)|$ sont indépendantes. La variable W(r/L) peut ainsi être vue comme un *multiplicateur* mettant en correspondance les fluctuations des incréments de vitesse aux échelles L et r. La description de la cascade se ramène ainsi à la caractérisation de la distribution de $\log W(r/L)$: le propagateur $G_{r,L}$.

Ce formalisme sera utilisé dans le chapitre 4 pour rendre compte de la déformation des distributions de $\delta u_{\parallel}(r)$ dans la zone dissipative.

1.5 Présentation des travaux

- Chapitre deux : «Hiérarchie statistique et structures dynamiques intermittentes»

Le problème de la turbulence réside en grande partie dans la difficulté d'inclure dans la description statistique, une information (objective et pertinente) concernant la dynamique du mouvement. De manière très schématique, on peut cependant mentionner les points suivants :

• <u>la cascade d'énergie</u>: Richardson (1922) a introduit une première information importante sur la turbulence, à savoir que la dynamique du fluide réalise une cascade (conservative) d'énergie des grandes vers les petites échelles. Des résultats expérimentaux et numériques ont montré qu'il était nécessaire de spécifier le mécanisme de la cascade.

• <u>l'étirement de la vorticité et l'intermittence</u> : le transfert d'énergie vers les petites échelles se réalise par un étirement de la vorticité. Ce mécanisme est responsable de fluctuations anormalement élevées et conduit à une statistique fortement non-Gaussienne des incréments de vitesse à petite échelle : il s'agit du phénomène d'intermittence.

• <u>les filaments de vorticité</u> : Le mécanisme d'étirement de la vorticité conduit asymptotiquement à la formation d'objets dynamiques identifiables : les filaments de vorticité. On peut les détecter, leur associer un temps de vie, une extension spatiale et un taux de transfert d'énergie. Ces événements participent aux fluctuations extrêmes du système.

Le modèle de hiérarchie statistique intègre ces différents points. Il propose une structure hiérarchique des fluctuations turbulentes, qui permet d'inclure les caractéristiques des fluctuations extrêmes dans la description statistique. Ce modèle est cohérent avec la réalisation (sous-jacente) d'un processus de cascade multiplicative suivant une loi log-Poisson. Sur ce point, nous présenterons un travail récent où ce processus est explicitement identifié.

- Chapitre trois : «Concilier cascade d'énergie et viscosité turbulente : à quel prix?»

Nous reprendrons de manière plus formelle la description de la cascade d'énergie. Par des raisonnements phénoménologiques, il est possible de caractériser cette cascade en raisonnant sur le taux de transfert d'énergie vers les petites échelles. Il apparaît que la cascade ne se fait pas au même rythme à toutes les échelles : des grandes vers les petites échelles, elle s'accélère dans la zone inertielle puis se ralentit progressivement dans la zone dissipative. Ce comportement dynamique met en évidence un nouveau nombre d'onde caractéristique, qui sépare les zones d'accélération et de décélération de la cascade. Quelle est la signification physique de ce nombre d'onde caractéristique? Peut-on relier ce nombre caractéristique à la portée des interactions entre modes de Fourier? Ces questions seront abordées. Nous montrerons aussi qu'il est possible de thermaliser l'agitation turbulente au delà de ce nombre d'onde caractéristique, sans perturber la dynamique des modes de la zone inertielle. Ce travail propose une nouvelle approche de la simulation numérique des grandes échelles de la turbulence : il s'agit ici de coupler la dynamique des équations de Navier-Stokes avec un thermostat très visqueux à grand nombre d'onde.

- Chapitre quatre : «Catastrophe ultra-violette de la turbulence?»

L'intermittence rend compte de la prépondérance des zones actives par rapport aux zones calmes du mouvement turbulent. Sur la base de raisonnements simples, nous proposerons une description quantitative (sans paramètre ad hoc) de l'intermittence, de l'échelle intégrale jusqu'aux plus petites échelles de l'agitation turbulente. Nous montrerons en particulier que cette intermittence augmente fortement aux très petites échelles, lorsque les effets dissipatifs s'intensifient. Cela peut paraître a priori contradictoire car l'on s'attendrait à ce que la dissipation régularise l'écoulement, mais peut

néanmoins se comprendre en considérant que les effets dissipatifs ne sont pas uniformes : ils sont importants dans les régions calmes et désordonnées alors que la dissipation peine à adoucir les singularités du champ de vitesse associés aux structures cohérentes. Les effets dissipatifs renforcent donc le contraste entre les régions actives et calmes, d'où une augmentation de l'intermittence. Ces arguments phénoménologiques seront repris de manière explicite et quantitative. Nous montrerons en particulier que cette augmentation de l'intermittence dépend du nombre de Reynolds et diverge avec celui-ci.

- Chapitre cinq : « Approche Lagrangienne de l'intermittence »

L'approche Lagrangienne en turbulence consiste à étudier la dynamique des particules de fluide de l'écoulement. Le mécanisme de transfert d'énergie se formule naturellement en terme de suivi de particules puisqu'il s'agit de comprendre comment un tourbillon se déforme, dans son mouvement d'advection par les grandes structures, pour transmettre son énergie à plus petite échelle. Notre approche est principalement phénoménologique, motivée par des résultats numériques et expérimentaux. Nous montrerons que l'accélération des particules de fluide manifeste un comportement complexe : son module reste corrélé sur des temps longs (comparable au temps intégrale de corrélation de la vitesse) alors que sa direction se décorrèle sur des temps très courts. Un modèle de marche au hasard pour décrire ce mouvement sera proposé.

- Chapitre six : « Turbulence près d'une paroi »

Bien que l'agitation turbulente soit entretenue par les gradients de la vitesse moyenne, le tenseur $\partial \overline{u_i}/\partial x_j$ n'intervient pas dans la description statistique des fluctuations turbulentes. En fait, il est habituellement sous-entendu qu'à une échelle suffisamment petite devant l'échelle intégrale, la dynamique des tourbillons est dominée par le mécanisme d'étirement de la vorticité et ressent peu le gradient de vitesse moyenne : ce gradient est considéré comme nul à l'échelle du tourbillon. Il existe néanmoins des situations où cette hypothèse n'est plus valable, par exemple près d'une paroi solide. Dans ce cas, l'agitation turbulente est affectée à toutes les échelles par le gradient de vitesse moyenne, appelé cisaillement.

Nous proposerons une description unifiée de la turbulence en présence, ou non, d'un cisaillement. Cette description conduit à l'introduction d'une fonction de structure généralisée du champ de vitesse, comportant un terme supplémentaire relatif au cisaillement. Cette description théorique est en bon accord avec les données expérimentales.

Une application directe de ce travail concerne la modélisation numérique de la turbulence. Les méthodes de simulation des grandes échelles rencontrent des problèmes près des parois : lorsque l'on s'approche de la paroi le cisaillement s'intensifie et ses effets sur la dynamique turbulente deviennent prépondérants ; les conditions de fermeture des équations aux grandes échelles doivent être modifiées. Nous proposerons une solution qui repose sur la considération des fonctions de structure généralisées au lieu des fonctions de structure usuelles, et qui de ce fait incorpore directement les effets du cisaillement. De cette façon, les zones «loin de la paroi» et «près de la paroi» peuvent être traitées de manière unique : la viscosité turbulente n'est plus ajustée de manière ad hoc en fonction de la distance à la paroi.

Hiérarchie statistique et structures dynamiques intermittentes

2.1 Une absence de consensus mais quelques idées maîtresses

De très nombreuses études expérimentales, numériques et théoriques ont été menées depuis les premiers travaux d'Osborne Reynolds (1883). Cependant, il n'existe pas encore, aujourd'hui, de véritable consensus sur ce qui pourrait constituer une solution du problème de la turbulence [25] [48] (articles sur les challenges de la turbulence). On peut néanmoins identifier quelques propriétés fondamentales sur lesquelles une majorité de gens s'accordent :

– tout d'abord, un écoulement turbulent est intrinsèquement désordonné. Le chaos est spatio-temporel et implique un très grand nombre de mouvements tourbillonnants en interaction permanente et simultanée. L'état statistique qui décrit ces interactions met en défaut les lois de l'équilibre thermodynamique; les corrélations mises en jeu sont spécifiques à la forme mathématique des équations du mouvement (les équations de Navier-Stokes).

— les interactions entre tourbillons assurent un transfert d'énergie des grandes échelles, où l'agitation est entretenue par les gradients de vitesse moyenne, vers les petites échelles où elle est dissipée en chaleur par friction moléculaire.

– un ordre spatio-temporel est visible (par intermittence) dans le désordre apparent de l'agitation turbulente. Cet ordre apparaît sous la forme de mouvements isolés de forte vorticité. Expérimentalement, il a été possible de visualiser ces mouvements particuliers en introduisant de minuscules bulles d'air dans un écoulement liquide [49]. Les bulles viennent se placer préférentiellement dans les zones où la rotation du fluide est grande. Ainsi, on observe par instant une concentration importante de bulles le long de filaments, puis les bulles se dispersent avant que cela ne se reproduise ailleurs. Si l'oeil (de la caméra) décèle cet ordre ponctuel, c'est parce qu'il s'impose de manière forte. Ces mouvements d'enroulement du fluide sont en général très intenses, d'autre part ils sont étendus. Les zones d'*influence* et de *dépendance* des filaments de vorticité peuvent atteindre la taille du système. À cet instant, le système développe une dynamique particulière, qui réalise une cohérence (de phase) entre ces degrés de liberté, et conduit à une fluctuation anormalement grande du mouvement d'agitation. On peut y trouver là l'origine des fluctuations non-Gaussiennes de la turbulence [50].

L'importance des structures dynamiques cohérentes : *ordre dans le désordre* apparent de la turbulence, est maintenant devenue évidente [51]. Ces observations stimulent une approche statistique nouvelle. En effet, la présence de ces structures suggère l'importance des lois de la dynamique des fluides dans la description statistique. Dans ce contexte, nous avons proposé une description des lois d'échelle des corrélations spatiales du champ de vitesse turbulente :

• «Universal scaling laws in fully developed turbulence», Z.-S. SHE & E. LÉVÊQUE, *Physical Review Letters*, vol. 72, 1994, p. 334

Cette description conduit à une prédiction (sans paramètre ad hoc) des exposants d'échelle des fonctions de structures de la vitesse, en très bon accord avec les données expérimentales et numériques. L'idée maîtresse est l'existence d'une relation de hiérarchie entre fonctions de structure d'ordre croissant. Cette relation caractérise l'interaction des structures dynamiques et établit ainsi, de manière concrète, un lien entre statistique et dynamique. Les seuls paramètres qui entrent en jeu sont relatifs à la nature des structures dynamiques cohérentes : leur dimension fractale et leur exposant d'échelle (exposant d'Hölder de la singularité associée). Dans cette description, les caractéristiques des fluctuations extrêmes gouvernent la statistique. Cette approche s'oppose clairement à une description classique et stimule un intérêt théorique [52] [53] [54].

Le très bon accord entre les prédictions du modèle de hiérarchie statistique et les résultats expérimentaux est encourageant. Afin d'aller plus loin dans la validation, et pour approfondir le lien entre statistique et dynamique, nous avons conduit une étude détaillée du modèle en couche de la turbulence (homogène et isotrope). Le modèle en couche de la turbulence est un système dynamique modèle, qui manifeste les propriétés essentielles d'un système turbulent, mais avec un nombre (très) restreint de degrés de liberté. Des études numériques et analytiques peuvent être menées plus facilement qu'avec les équations de Navier-Stokes : il constitue de ce fait un outil d'étude de la turbulence très intéressant. Nous avons mis en évidence que les propriétés statistiques du modèle en couche dépendent de la nature des événements extrêmes (en modifiant le mécanisme de dissipation à petite échelle). Cependant, cette dépendance disparaît lorsque les fonctions de structure sont représentées les unes en fonction des autres : le comportement relatif des fonctions de structure est universel. Ce résultat est important car la notion d'universalité est centrale en turbulence ; la détermination des propriétés robustes, intrinsèques, des systèmes turbulents est un point essentiel [55]. Nous avons proposé une interprétation théorique de l'universalité de ces comportements relatifs.

Dans ce chapitre, nous rappellerons et discuterons les principaux tenants et aboutissants du modèle de hiérarchie statistique, et les résultats obtenus pour le modèle en couche de la turbulence (section 2.2). Dubrulle (1994) et She & Waymire (1995) ont montré que la statistique du modèle de hiérarchie est exactement réalisée par un processus (multiplicatif) de cascade suivant une loi log-Poisson. Sur ce point, nous présenterons des résultats récents sur l'identification de ce processus (sous-jacent) log-Poisson à partir de données expérimentales (section 2.3). Enfin, nous mentionnerons très rapidement la généralité du modèle de hiérarchie statistique (section 2.4).

2.2 Le modèle de hiérarchie statistique

2.2.1 Les ingrédients

La dynamique globale de l'agitation turbulente résulte de l'interaction de structures spatio-temporelles présentant différents niveaux d'intensité et de cohérence. Nous proposons de caractériser cet ensemble de structures par une suite croissante de niveaux (typiques) d'amplitude de fluctuations, définis comme le rapport de moments successifs du taux de dissipation à l'échelle r :

$$\varepsilon_r^{(p)} \equiv \frac{\langle \varepsilon_r^{p+1} \rangle}{\langle \varepsilon_r^p \rangle}, \quad p = 0, 1, \text{ etc.}$$
 (2.1)

On rejoint ici l'approche de Kolmogorov et Oboukhov (1962), qui attribue au champ de dissipation $\varepsilon(\vec{x},t)$ un rôle prépondérant dans la description statistique de la turbulence.

Si l'on introduit la famille de distributions (indexée par p)

$$Q_p(\varepsilon_r) \equiv \frac{\varepsilon_r^p P(\varepsilon_r)}{\langle \varepsilon_r^p \rangle}$$
(2.2)

où $P(\varepsilon_r)$ désigne la distribution de ε_r , le niveau de fluctuation d'ordre p peut être vu comme la dissipation moyenne pondérée par la distribution Q_p (figure 2.1):

$$\varepsilon_r^{(p)} = \int_0^\infty \varepsilon_r Q_p(\varepsilon_r) d\varepsilon_r = \langle \varepsilon_r \rangle_{Q_p}.$$
(2.3)



FIG. 2.1 – Q_p désigne ici la densité de probabilité du champ de dissipation normalisé $\varepsilon(\vec{x},t)/\varepsilon$. Lorsque l'ordre p augmente, le poids de la distribution Q_p porte sur des amplitudes de plus en plus grandes (données numériques, E. Lévêque).

La hiérarchie définie par l'équation (2.1) s'étend du champ moyen $\varepsilon_r^{(0)} \equiv \varepsilon$ aux fluctuations extrêmes $\varepsilon_r^{(\infty)} \equiv \lim_{p \to \infty} \varepsilon_r^{(p)}$. En termes de lois d'échelle, chaque élément est associé à un exposant λ_p tel que

$$\varepsilon_r^{(p)} \equiv \frac{\langle \varepsilon_r^{p+1} \rangle}{\langle \varepsilon_r^p \rangle} \sim r^{\lambda_p}.$$
(2.4)

Nous nous plaçons ici dans le contexte d'une turbulence pleinement développée, homogène et isotrope. L'hypothèse de lois d'échelle pour le champ de dissipation s'écrit $\langle \varepsilon_r^p \rangle \sim r^{\tau_p}$ d'où $\lambda_p \equiv \tau_{p+1} - \tau_p$. Par construction, la suite des exposants λ_p est nécessairement décroissante :

$$\underbrace{\lambda_0 = 0}_{\varepsilon_r^{(0)} = \langle \varepsilon_r \rangle = \varepsilon \text{ par definition}} \ge \lambda_1 \ge \dots \ge \lambda_\infty \equiv \lim_{p \to \infty} \lambda_p.$$
(2.5)

On obtient ainsi:

- si $\lambda_{\infty} = \lambda_0$ alors tous les λ_p sont égaux : le champ de dissipation est mono-fractal. Avec la condition $\lambda_0 = 0$, on retrouve la théorie de Kolmogorov (1941) : $\langle \varepsilon_r^p \rangle = \varepsilon^p$.
- si $\lambda_{\infty} < \lambda_0$ alors τ_p est une fonction non-linéaire de p: le champ de dissipation est multi-fractal [56]. Si en particulier λ_p est linéaire en p, on retrouve le modèle log-normal de Kolmogorov et Oboukhov (1962).

Le formalisme introduit est donc très général ; chaque modèle possède sa propre hiérarchie de niveaux de fluctuation. Dans la suite, nous proposerons une hiérarchie particulière, construite sur l'idée que les fluctuations extrêmes du taux de dissipation sont associées à des structures dynamiques bien identifiables : les filaments de vorticité.

2.2.2 L'existence d'une fluctuation extrême identifiable

Dans le modèle de hiérarchie statistique, la suite $(\lambda_p)_{p\geq 0}$ converge vers $\lambda_{\infty} < \infty$ lorsque $p \to \infty$. Cette hypothèse implique que les fluctuations extrêmes du taux de dissipation sont identifiables (en terme de singularité de Hölder) par leur exposant λ_{∞} . Dans le cadre du modèle multifractal, cela revient à supposer que le spectre des singularités du champ de dissipation admet une borne inférieure λ_{∞} . On obtient ainsi

$$\varepsilon_r^{(p)} \approx a_p \, \varepsilon \left(\frac{r}{L}\right)^{\lambda_{\infty}} \quad \text{pour} \quad p \to \infty.$$
 (2.6)

Remarquons que cela n'implique pas forcément $\lim_{p\to\infty} \varepsilon_r^{(p)} < \infty$ car l'on peut a priori avoir $\lim_{n\to\infty} a_p = \infty$.

une remarque concernant les fluctuations extrêmes :

En pratique, les moments statistiques sont estimés par une moyenne tronquée qui converge lorsque la taille de l'échantillon tend vers l'infini, ainsi par exemple

$$\langle \varepsilon_r^p \rangle_{\mathsf{N}} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_r^p(\vec{x_0}, t_i) \to \langle \varepsilon_r^p \rangle \quad \text{pour} \quad N \to \infty.$$
(2.7)

En considérant la limite $p \to \infty$ avant de faire tendre la taille N vers l'infini, on obtient alors

$$\lim_{p \to \infty} \frac{\langle \varepsilon_r^{p+1} \rangle_{\mathsf{N}}}{\langle \varepsilon_r^p \rangle_{\mathsf{N}}} = \sup_{i=1...N} \varepsilon_r(\vec{x_0}, t_i) \sim \left(\frac{r}{L}\right)^{\lambda_{\infty}} \quad \text{pour} \quad N \to \infty,$$
(2.8)

ce qui confère à la fluctuation d'amplitude maximum (pour un échantillon suffisamment grand) une signification particulière : c'est une singularité de Hölder du signal qui est identifiable de manière univoque. Ce point important a été spécifiquement examiné pour le modèle en couche, dans l'article

• «Cascade structures and scaling exponents in a dynamical model of turbulence : Measurements and comparisons», E. LÉVÊQUE & Z.-S. SHE, *Physical Review E*, vol. 55, 1997, p. 2789

2.2.3 La condition de fermeture statistique

Pour caractériser notre hiérarchie statistique, il est nécessaire de préciser une relation entre les différents niveaux de fluctuation. Nous proposons la relation

$$\frac{\varepsilon_r^{(p+1)}}{\varepsilon_r^{(\infty)}} = A_p \left(\frac{\varepsilon_r^{(p)}}{\varepsilon_r^{(\infty)}}\right)^{\beta} \quad \text{pour tout } p \ge 0.$$
(2.9)

 $0 < \beta < 1$ est un paramètre universel et A_p est un coefficient indépendant de l'échelle r. Cette relation de récurrence peut être vue comme une solution simple, compatible avec les conditions suivantes :

- un comportement en lois de puissance pour tous les $\varepsilon_r^{(p)}.$
- une suite croissante et convergente de niveaux de fluctuations avec $\lim_{p\to\infty} \varepsilon_r^{(p)} = \varepsilon_r^{(\infty)}$.

On obtient ainsi $\lambda_p = \lambda_{\infty} + \beta^p (\lambda_0 - \lambda_{\infty})$ puis pour les exposants τ_p :

$$\tau_p = \lambda_{\infty} p + C(1 - \beta^p). \tag{2.10}$$

La condition supplémentaire $\lambda_{\infty} + C(1 - \beta) = 0$ est imposée par la contrainte $\lambda_0 = 0$.

une interprétation phénoménologique (possible) :

L'agitation turbulente apparaît comme un enchevêtrement de tourbillons plus ou moins étirés. Pour rendre compte de l'*état turbulent*, il est nécessaire de caractériser la façon dont ces structures interagissent entre elles. Cette interaction est compliquée et vouloir la décrire d'une manière précise (ou déterministe) n'est pas réaliste. D'un point de vue qualitatif, on peut néanmoins affirmer que : une structure intense entraîne et étire les structures moins intenses et plus désordonnées qui l'entourent, d'autre part le désordre environnant contribue aussi à la perturber, voire à la détruire. Ce scénario souligne l'interaction entre structures présentant des degrés d'intensité et de cohérence voisins : une structure intense $\varepsilon_r^{(p+1)}$ entraîne les structures moins intenses $\varepsilon_r^{(p)}$ qui l'entourent, qui elles mêmes entraînent des structures moins intenses, etc.

Ce raisonnement motive une relation entre niveaux de fluctuation d'ordre successifs. D'autre part, le paramètre β caractérise l'efficacité de ce mécanisme d'entraînement (ou d'étirement) :

- pour $\beta \simeq 1$: $\varepsilon_r^{(p+1)} \approx \varepsilon_r^{(p)} \approx \varepsilon$. On retrouve le champ de dissipation (sans fluctuations inertielles) de la théorie de Kolmogorov (1941); il n'y a pas d'étirement des tourbillons.
- pour $0 < \beta < 1$: il y a étirement de la vorticité, intermittence et lois d'échelle non-linéaires.

Le paramètre C > 0 s'interprète comme la co-dimension fractale du support des fluctuations extrêmes. En effet, on obtient

$$\langle \varepsilon_r^p \rangle \sim \left(\frac{r}{L}\right)^{\lambda_\infty p + C} \quad \text{pour} \quad p \to \infty.$$
 (2.11)

Le facteur $(r/L)^C$ représente ainsi (à une constante d'ordre un près) la probabilité d'occurrence de la fluctuation extrême à l'échelle r [57].

lois d'échelle en turbulence homogène et isotrope

Les exposants d'échelle τ_p sont fixés par les propriétés caractéristiques des fluctuations extrêmes : leur exposant de singularité λ_{∞} et leur co-dimension fractale C. Dans le cadre d'une turbulence homogène et isotrope, on obtient par un raisonnement simple d'analyse dimensionnelle $\lambda_{\infty} = -\frac{2}{3}$. D'autre part, les fluctuations extrêmes de la dissipation sont associées à la présence de structures filamentaires de dimension fractale égale à un et donc de co-dimension C = 2. La prédiction du modèle devient donc

$$\tau_p = -\frac{2}{3}p + 2(1 - (\frac{2}{3})^p)$$
 ou encore $\zeta_p = \frac{p}{9} + 2(1 - (\frac{2}{3})^{p/3}).$ (2.12)

Les résultats expérimentaux et numériques sont en très bon accord avec les prédictions (sans paramètre ad hoc) de ce modèle [11]. Enfin, remarquons que l'information accessible concernant la dynamique de l'agitation turbulente, est ici suffisante pour fixer tous les paramètres du modèle.

2.2.4 Application au modèle en couche de la turbulence : classe d'universalité des exposants relatifs

— extrait de l'introduction de l'article : «Cascade Structures and Scaling Exponents in a Dynamical Model of Turbulence : Measurements and Comparisons», E. LÉVÊQUE & Z.-S. SHE, *Physical Review E*, vol. 55, 1997, p. 2789

«...It is widely accepted that the motion of an ordinary incompressible fluid is accurately described by the Navier- Stokes equations for a wide range of viscosity, or Reynolds number. The Navier-Stokes equations have so been regarded as the first principle for describing turbulence: the turbulent state is identified as the very chaotic solution of the equation. At the present time, rigorous nonlinear analysis of the equation has yielded few constructive results. The nature of the difficulty seems to lie in a poor knowledge about the functional space in which a typical turbulent solution evolves. Any a priori estimate without taking into account such knowledge does not seem to yield any optimal characterization of the properties of turbulence. Physicists rather investigate these properties from a phenomenological standpoint, that is, starting from hypotheses motivated by experimental and numerical observations. Interestingly, this is also the approach adopted by the mathematician Kolmogorov, according to Yaglom. This line of study has yielded very fruitful results during the past half century and continues to expand nowadays. While recognizing that eventually the Navier-Stokes turbulence needs to be fully understood, it is worthwhile to examine carefully various other systems exhibiting the essential features of fully developed turbulent dynamics. These features include, from the present phenomenological understanding, the existence of an inertial range of scales where cascade dynamics are fully developed. As one moves away from a deductive approach based on the first principle, such studies are particularly important. Indeed, studies on various turbulent systems allow one to differentiate the Navier-Stokes system from others and identify the role of the essential ingredients in the N-S system: e.g., the conservation laws, the degree of the nonlinearity, etc. More importantly, it may stimulate the development of a general theoretical framework for non-equilibrium systems presenting critical and scale invariance properties. This has been the essential motivation behind the present study of a dynamical-system model of turbulence, namely the Gledzer-Ohkitani-Yamada shell model ... »

Le modèle en couche de la turbulence peut être vu comme une caricature des équations de Navier-Stokes dans l'espace de Fourier. Il possède néanmoins sa propre identité, du fait de son nombre restreint de degrés de liberté et de la stricte localité de ses interactions [60] (article de revue récent).

La dynamique est gouvernée par le système d'équations différentielles

$$\dot{u}_n + \nu k_n^2 \left(\frac{k_n}{k_d}\right)^\alpha u_n = i \left(k_n u_{n+1}^* u_{n+2}^* - \frac{k_{n-1}}{2} u_{n+1}^* u_{n-1}^* - \frac{k_{n-2}}{2} u_{n-1}^* u_{n-2}^*\right) + f_n \qquad (2.13)$$

pour l'ensemble des variables complexes $u_n(t)$ avec n = 0, 1, ..., N.

La variable dynamique $u_n(t)$ peut être vue comme l'excitation effective des modes de Fourier de la vitesse dans l'intervalle (ou couche) de nombre d'ondes $k_n = k_0 2^n \le k < k_{n+1}$. Le couplage entre les couches est ici strictement local et limité aux deux plus proches voisins. En régime stationnaire, les excitations du modèle en couche sont entretenues par une force f_n agissant à faible nombre d'onde. Enfin, la dissipation d'énergie est assurée par un terme de dissipation hyper-visqueuse : $-\nu k_n^2 \left(\frac{k_n}{k_d}\right)^{\alpha} u_n$, où l'exposant $\alpha \ge 0$ est la dissipativité, ν est la viscosité (cinématique) et $k_d \equiv (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$ est le nombre d'onde dissipatif de Kolmogorov (1941).

Le terme non-linéaire du modèle en couche ressemble à celui des équations de Navier-Stokes. Il conserve le volume dans l'espace des phases et l'énergie totale

$$E = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2} |u_n|^2.$$
(2.14)

Un second invariant est donné par

$$H = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n k_n |u_n|^2, \qquad (2.15)$$

qui s'apparente à l'hélicité : H_n n'a pas de signe défini et $|H_n| \sim k_n E_n$.



FIG. 2.2 – Le modèle en couche de la turbulence développe une cascade d'énergie à flux moyen constant : $\langle F_n \rangle = \varepsilon$ (taux moyen de dissipation). Le spectre d'énergie décroît en loi de puissance : $\langle E_n \rangle \sim k_n^{-0.71}$ (données numériques, E. Lévêque).

Du fait de sa faible dimension, ce système dynamique peut être étudié numériquement de manière intensive. Ainsi, les études ont montré qu'après un régime transitoire, le système évolue vers un attracteur étrange [61]. Sur cet attracteur, la dynamique manifeste les propriétés fondamentales d'une dynamique turbulente : une cascade d'énergie gouvernée par le terme d'interaction s'accomplit entre les échelles de forçage et de dissipation, et définit une zone inertielle caractérisée par des lois d'échelle satisfaites par

les moments statistiques de l'amplitude de vitesse et du flux d'énergie :

$$\langle |u_n|^p \rangle \sim k_n^{-\zeta_p} \quad \text{et} \quad \langle |F_n|^p \rangle \sim k_n^{-\tau_p} \quad \text{avec} \quad \zeta_p = \frac{p}{3} + \tau_{p/3}.$$
 (2.16)

Le flux d'énergie est construit en établissant un bilan d'énergie dans la couche n:

$$\dot{E}_n = F_{n-1} - F_n + \Re(u_n^* f_n) - 2\nu k_n^2 \left(\frac{k_n}{k_d}\right)^{\alpha} E_n \qquad (E_n \equiv \frac{1}{2}|u_n|^2)$$
(2.17)

avec

$$F_n = -\frac{k_n}{4}\Im(u_{n-1}u_nu_{n+1} + 4u_nu_{n+1}u_{n+2}).$$
(2.18)

Les exposants ζ_p du modèle en couche sont différents des prédictions de la théorie de Kolmogorov (1941) et cet écart est lié au phénomène d'intermittence : le flux d'énergie $F_n(t)$ est une quantité très fluctuante dont la variance augmente avec l'indice de couche n. Dans le cas d'une dissipation hypervisqueuse à grand nombre d'onde, nous avons montré que les ζ_p dépendent de la dissipativité α et ne sont donc pas universels vis à vis du mécanisme de dissipation. Cette dépendance est liée à l'existence d'une cascade inverse d'énergie, induite par la dynamique de dissipation. La cascade inverse s'intensifie lorsque α augmente. Pour chaque dissipativité α , l'interaction des cascades directe et inverse d'énergie conduit à un nouvel état statistique stationnaire, caractérisé par des lois d'échelle spécifiques. Cependant, une classe d'universalité est observée : les exposants relatifs ζ_p/ζ_q ne dépendent pas de la dissipativité α . Ces résultats ont été publiés dans l'article :

• «Viscous effects on inertial range scalings in a dynamical model of turbulence», E. LÉVÊQUE & Z.-S. SHE, *Physical Review Letters*, vol. 75, 1995, p. 2690

au sujet de la dissipation :

La notion d'universalité vis à vis du mécanisme de dissipation fut suggérée par Kolmogorov (1941): les propriétés statistiques dans la zone inertielle sont indépendantes du mécanisme de dissipation puisque les effets dissipatifs sont négligeables à ces échelles. Cette hypothèse est généralement admise dans de nombreux modèles théoriques, où le rôle de la dissipation se borne à la réalisation d'une coupure ultra-violette des fluctuations inertielles. Les résultats obtenus pour le modèle en couche suggèrent, au contraire, que *le mécanisme de dissipation soit pris en compte explicitement dans la description des fluctuations inertielles*.

Dans le chapitre d'introduction, nous mentionnions que la dissipation pouvait être tenue responsable de sélectionner, parmi toutes les solutions possibles des équations de Navier-Stokes, celles qui réalisent une cascade d'énergie des grandes vers les petites échelles. Pour le modèle en couche, nous avons montré que le mécanisme de dissipation marque aussi profondément le détail spatio-temporel de la cascade d'énergie : le flux inverse d'énergie (prenant origine dans la zone dissipative) semble jouer un rôle important. Nous en reparlerons dans le chapitre suivant.

Dans le cadre du modèle de hiérarchie statistique, nous pouvons justifier l'existence d'une classe d'universalité des exposants relatifs pour différentes dissipativités α . Cette explication repose sur l'hypothèse que le mécanisme de dissipation hyper-visqueuse modifie l'exposant d'échelle de la structure la plus intense mais laisse inchangée la relation hiérarchique entre les différents niveaux de fluctuation. En d'autres termes, l'exposant λ_{∞} dépend de la dissipativité α alors que le paramètre β n'en dépend pas, ou encore, les fluctuations extrêmes sont sensibles au mécanisme de dissipation alors que le paramètre β ne l'est pas. Ce dernier serait plutôt lié à la structure des interactions non-linéaires mises en jeu.

2.3 La solution du modèle de hiérarchie statistique : le propagateur log-Poisson

Dans le formalisme de cascade multiplicative présenté dans l'introduction, la condition de fermeture du modèle de hiérarchie est satisfaite par le multiplicateur W_{r_1,r_2} :

$$\log \mathcal{W}_{r_1, r_2} = \lambda_{\infty} \log \frac{r_1}{r_2} + n \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \log \beta,$$
(2.19)

où $n(r_1/r_2)$ est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre

$$\lambda\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = C\log\left(\frac{r_1}{r_2}\right). \tag{2.20}$$

Il s'agit du processus de cascade multiplicative log-Poisson, proposé indépendamment par Dubrulle (1994) [58] et She & Waymire (1995) [59].

« Est-il possible d'identifier explicitement ce processus multiplicatif log-Poisson entre les fluctuations du taux de dissipation moyenné à deux échelles inertielles différentes r_1 et r_2 :

$$\varepsilon_{r_2}(x, t + \Delta t) = \mathcal{W}_{r_1, r_2}(t) \varepsilon_{r_1}(x, t) ?$$
 (2.21)

Nous aborderons ce point dans la section suivante.



FIG. 2.3 – Le taux de dissipation moyenné à deux échelles inertielles différentes r_1 et r_2 (données expérimentales, C. Baudet et al.). Est-il possible de mettre en correspondance les fluctuations des deux signaux par un multiplicateur (indépendant) suivant une loi log-Poisson?

2.4 Article présenté

2.4.1 «Some experimental support for an underlying log-poisson process in turbulence», E. LÉVÊQUE, 2004

A turbulent system exhibits chaotic fluctuations over a wide range of temporal and spatial scales. In the statistically steady state, these fluctuations are sustained at all scales via different mechanisms. Large-scale fluctuations are usually triggered by an external forcing or a fluid instability. At smaller scales, fluctuations are maintained by the so-called cascade dynamics, which propagate (in mean) excitations towards small scales until the dissipative range is reached; fluctuations are then strongly damped out by molecular viscous effects. The range of scales where cascade dynamics prevail, is called the inertial range.

The cascade dynamics are governed by strongly non-linear interactions between triads of Fourier modes. These couplings operate an intense mixing of information between modes, rendering extremely chaotic fluctuations and inciting to take a probabilistic outlook at the cascade process. The modelling of the inertial-range cascade, as a stochastic process, has stirred many studies [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Following the pioneering works of the Russian school [7, 8, 9] in the 60's, the cascade process is described according to

$$\varepsilon_{r_2} = \mathcal{W}_{r_1, r_2} \,\varepsilon_{r_1},\tag{2.22}$$

where fluctuations of the coarse-grained (locally averaged) energy dissipation rate at inertial-range scales r_1 and r_2 (with $r_2 < r_1$) are related by an independent random multiplier W_{r_1,r_2} [10, 11]. Among existing models, the socalled Log-Poisson process proposed by Dubrulle [5] and She & Waymire [6], has attracted much attention. This process is provided by a quantized random cascade picture, in which small-scale fluctuations of the dissipation rate are generated from large-scale fluctuations via a discrete multiplicative factor. The random multiplier of the Log-Poisson model explicitly reads

$$\mathcal{W}_{r_1,r_2} = \alpha_{r_1,r_2} \,\beta^n,\tag{2.23}$$

where $0 < \beta < 1$ is a scale independent parameter and n is a Poisson random variable with mean value λ_{r_1,r_2} . The term α_{r_1,r_2} is deterministic and characterizes the rate of amplification (across the scales) of the most intense dissipation fluctuations; the parameter β may be viewed as a modulation quantum of this deterministic amplification.

The Log-Poisson cascade process leads to statistics, from which the scaling model of turbulence proposed by She & Lévêque [12] can be exactly derived. The scaling exponents predicted by [12] are found in striking agreement with both experimental and numerical values, which suggests the existence of an underlying Log-Poisson process in turbulence. However, the realization of such cascade process has not been demonstrated yet.

In homogeneous and isotropic turbulence, the power-law scaling predictions of [12] are exact solutions of the random multiplicative process governed by (2.23) provided that

$$\alpha_{r_1,r_2} = -\frac{2}{3}\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right), \ \ \beta = \frac{2}{3}$$
(2.24)

and that the Poisson variable n is characterized by the parameter (mean value)

$$\lambda_{r_1, r_2} = 2\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right). \tag{2.25}$$

In the present study, we shall provide some support for the realization of such a discrete mapping between smallscale fluctuations of the energy dissipation rate, in a turbulent jet flow.

The turbulent jet flow originates from a nozzle of diameter D = 50 mm. The fluid is air. The instantaneous streamwise component of the velocity is measured by a hot wire connected to a TSI constant temperature anemometer. The hot wire is a 1 mm long platinum wire of thickness 4 μ m. The velocity measurements have been made on the centerline of the jet at a distance of 25D downstream from the nozzle. The jet is not confined on lateral sides in order to avoid boundary effects. The turbulent rate of the velocity signal is $T \simeq 28\%$. Such a large value a priori endangers the use of the mean velocity in order to switch from temporal to spatial increments (Taylor's hypothesis). However, we have not observed any major qualitative differences in our results when resampling our signal



FIG. 2.4 – The range of scales where $|\langle \delta u_r^3 \rangle|/r$ is close to the horizontal dashed line $y = (4/5)\overline{\varepsilon}$ can be viewed as the inertial range of the energy cascade. In the present experiment, a jet turbulence, this domain approximatively extends over a decade.

by use of the local velocity. Eventually, our measurements have been recast into the space domain according to $u(x,t+\Delta t) = u(x-\bar{u}\Delta t,t)$, where \bar{u} denotes the mean velocity. The Reynolds number based on Taylor microscale is $R_{\lambda} \simeq 600$. The integral scale $L \simeq 25$ cm and the characteristic energy-dissipation scale $\eta \simeq 130 \ \mu m$.

A peculiar feature of the cascade process refers to the observation that all moments of inertial-range fluctuations display a power-law dependence on scale. In the case of homogeneous and isotropic turbulence, such a scale dependence can be established rigorously from the dynamical equations of turbulence, namely the Navier-Stokes equations, for the third-order longitudinal velocity structure function [15]:

$$\langle \delta u_r^{\ 3} \rangle = -\frac{4}{5}\bar{\varepsilon}r,\tag{2.26}$$

where δu_r denotes the longitudinal velocity increment across a distance r and $\bar{\varepsilon}$ is the mean dissipation rate. The equation (2.26) is interesting as it allows us to identify the inertial-range of the cascade process; it also provides a good test of consistency for experimental data. In the present experiment, we observe in the figure 2.4 that the equation (2.26) is eventually well satisfied over a finite domain of scales.

The local energy dissipation rate $\varepsilon(x,t)$ has been estimated by the one-dimensional surrogate

$$\varepsilon(x,t) \simeq 15\nu \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2,$$
(2.27)

where ν denotes the kinematic viscosity of air. The space derivative has been approximated by a discrete fourthorder scheme. The (spatially) coarse-grained dissipation rate is obtained according to

$$\varepsilon_r(x,t) = \frac{1}{r} \int_x^{x+r} \varepsilon(x',t) dx' = \frac{\bar{u}}{r} \int_{t-r/\bar{u}}^t \varepsilon(x,t') dt'.$$
(2.28)

The random propagator W_{r_1,r_2} underlying the Log-Poisson process does not a priori connect simultaneous events in space and time; this is actually a necessary condition in the case of a discrete process. In general, the mapping therefore reads

$$\varepsilon_{r_2}(x + \Delta x, t + \Delta t) = \mathcal{W}_{r_1, r_2} \varepsilon_{r_1}(x, t).$$
(2.29)

Under the Taylor's hypothesis, one then obtains

$$\underbrace{\varepsilon_{r_2}(x+\delta x,t) = \varepsilon_{r_2}(x,t+\delta t)}_{\text{Taylor hyp.}} = \mathcal{W}_{r_1,r_2} \ \varepsilon_{r_1}(x,t), \tag{2.30}$$

with $\delta x = \Delta x - \bar{u}\Delta t$ and $\delta t = -\delta x/\bar{u}$. The multiplier \mathcal{W}_{r_1,r_2} may therefore be viewed either as a multiplier in space (along the direction of the mean flow) at a fixed instant, or in time at a fixed location. The Taylor's hypothesis ensures that these two formulations are equivalent. The present experimental context imposes the mapping in time, the space variable x being fixed by the location of the velocity probe. Note that in a numerical simulation, one would rather opt for the mapping in space.

Let us now consider the function

$$N(t,\tau) = \frac{1}{\log\beta} \left(\log \frac{\varepsilon_{r_2}(x,t+\tau)}{\varepsilon_{r_1}(x,t)} - \log\alpha_{r_1,r_2} \right).$$
(2.31)

If the Log-Poisson mapping eventually underlies the cascade dynamics, it is expected that for all t there exists a time shift δt such that

$$N(t,\delta t) = n, (2.32)$$

where n is a random Poisson variable with mean λ_{r_1,r_2} .

The dynamical meaning of the cascade process, viewed as a mapping between fluctuations at different scales, remains unclear. As already mentioned, non-linear couplings between modes render extremely chaotic dynamics, which a priori prevents from defining this mapping in a deterministic manner. Our approach will consist in assuming that (2.32) is satisfied, i.e. a discrete multiplicative process eventually underlies the cascade dynamics. Afterwards, the (integer) random variable n will be inferred by simple intuitive arguments that we shall now present.

In practice r_2 denotes a small (inertial-range) scale; the function $N(t,\tau)$ is rapidly changing in τ and displays large fluctuations. Therefore, one expects to find a small time shift δt such that $N(t,\delta t)$ takes an integer value. If δt is small, one may approximate $N(t,\delta t)$ by

$$N(t,\delta t) \simeq N(t,0) + \frac{\partial N}{\partial \tau}(t,0) \,\delta t.$$
(2.33)

This approximation inevitably presents some limitations, e.g. when second-order terms must be considered in the Taylor expansion (2.33). On the other hand, these situations are not very frequent and do not notably alter the statistics of n.

We are looking for an independent multiplicative process, i.e. n independent of ε_{r_1} . According to the equation (2.28), this condition incites to rather consider positive time shift δt . Indeed, for $\delta t < 0$ the coarse-graining intervals of $\varepsilon_{r_1}(x,t)$ and $\varepsilon_{r_2}(x,t)$ are embedded one inside the other, whereas for $\delta t > 0$ the overlap between the two intervals is reduced [14]. According to the approximation (2.33), the inferred value of n is then given by

if
$$\frac{\partial N}{\partial \tau}(t,0) > 0$$
 : $n = \operatorname{int}(N(t,0)) + 1$ (2.34)

if
$$\frac{\partial N}{\partial \tau}(t,0) < 0$$
 : $n = \operatorname{int}(N(t,0)),$ (2.35)

where int(N) denotes the integer part of the real number N.

We have constructed the probability density function (pdf) of n for various pairs of scales (r_1, r_2) with α_{r_1, r_2} and β given by the equation (2.24). Does one obtain a Poisson distribution for n? If yes, does the parameter λ_{r_1, r_2} evolve according to the equation (2.25) with respect to r_1 and r_2 ?

The agreement between our experimental results and the Poisson predictions is striking (see figure 2.5) over a domain of scales which extends over a decade. Increasing discrepancies with the theoretical Log-Poisson distributions were found as scales (r_1, r_2) move off this range (see figure 2.7). This will be discussed later when the Log-Poisson mapping will be interpreted in terms of power-law scalings. In a lin-log coordinate system, one can observe in the figure 2.6 that the agreement remains satisfactory for large values of n (positive tail of the pdf). One must notice that the range of observation of the Log-Poisson mapping does not exactly correspond to the inertial-range previously identified from the equation (2.26). In this sense, we believe that Kraichnan's remark [13] is very relevant: "There is a priori no reason to relate the scaling properties of δu_r and ε_r at the same scale r". We observe here that ε_r display scaling properties but on a different range of scales. This also suggests that the notion of scaling range is closely related to the fluctuations under consideration.



FIG. 2.5 – The pdf of n is displayed for various pairs of scales scales: $r_1/r_2 = 2$ (a), 3 (b), 5 (c) and 10 (d). The scale r_1 is fixed with $r_1/\eta = 750$. The plain line is the theoretical Poisson law given by (2.25), extrapolated for non-integer values by using the gamma function. The circles indicate experimental results.



FIG. 2.6 – The same pdf of n as in figure 2.5, displayed in a log-lin coordinate system. The (positive) tail of the pdfs remains in good agreement with the Poisson distribution.



FIG. 2.7 – The pdf of n is displayed for various pairs of scales with a fixed ratio $r_1/r_2 = 5$: $r_1 = 1000\eta$ (a), $r_1 = 750\eta$ (b), $r_1 = 500\eta$ (c) and $r_1 = 100\eta$ (d). The plain line is the (extrapolated) theoretical Poisson law given by the equation (2.25).

The independence of the random propagator W_{r_1,r_2} on the fluctuation ε_{r_1} is a key assumption in the modelling of the cascade dynamics by a stochastic process. In the figure 2.8, we demonstrate that this condition is well satisfied, i.e. that n is independent of ε_{r_1} .

As already mentioned, the Log-Poisson process is expected to operate in the range of scales where the moments of the coarse-grained dissipation rate display power-law scalings. According to [12], it is expected that

$$\frac{\langle \varepsilon_{r_2}{}^p \rangle}{\langle \varepsilon_{r_1}{}^p \rangle} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{-\frac{2}{3}p+2(1-(\frac{2}{3})^p)}$$
(2.36)

for r_1 and r_2 in that range. In this instance, we display in the figure 2.9 the dependence on r of the moments of the renormalized (to the mean) dissipation rate $\varepsilon_r/\langle \varepsilon_r \rangle$. A power-law dependence on r is not as clearly evidenced as for $\langle \delta u_r^3 \rangle$ in the figure 2.4. However, one may notice that all moments of ε_r approach locally the power-law scaling prediction given by the formula (2.36), in the range of scales where the Log-Poisson mapping was previously identified. Our observation of the Log-Poisson mapping is therefore consistent with the power-law scalings predicted by [12]. Deviations from the Log-Poisson mapping, previously mentioned, may be related to deviations from (2.36).

An other very popular scaling model of turbulence is the Log-Normal model proposed by Kolomogorov [7]. The prediction of Log-Normal model reads

$$\frac{\langle \varepsilon_{r_2}{}^p \rangle}{\langle \varepsilon_{r_1}{}^p \rangle} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{\mu}{2}(p^2 - p)},\tag{2.37}$$

where μ is an adjustable parameter. For $\mu = 2/9$, the predictions of the Log-Normal and Log-Poisson models coincide for p = 2 and remain very close for $p/3 \le 10$.

The Log-Normal model can be recast into a random multiplicative process of the form (2.22) with log-normal statistics for the propagator W_{r_1,r_2} , i.e., the pdf of $\log(W_{r_1,r_2})$ reads

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{r_1,r_2}^2}} \exp\left(\frac{(x - m_{r_1,r_2})^2}{2\sigma_{r_1,r_2}^2}\right).$$
(2.38)



FIG. 2.8 – In subplot (a), the pdf of $\log(\varepsilon_{r_1})$ is displayed for $r_1/\eta = 750$. The pdfs of n, conditioned on various amplitudes of ε_{r_1} are presented for $r_1/r_2 = 2$ (b), $r_1/r_2 = 3$ (c) and $r_1/r_2 = 5$ (d). The conditional pdfs collapse, in agreement with the assumption of an independent multiplicative process.



FIG. 2.9 – Scaling behavior of the moments of the renormalized coarse-grained dissipation rate $\varepsilon_r/\langle \varepsilon_r \rangle$ (plain line). In the range of scales, where the Log-Poisson mapping was previously observed, all moments approach the theoretical power-law dependence (squares) given by (2.36).



FIG. 2.10 – The same pdf of n as in figure 2.5 are displayed. The log-Poisson prediction (dashed line) and experimental data (circles) are indicated. The Log-Normal prediction, with $\mu = 2/9$, is shown by the plain line. The two statistics are very close.

The mean and the variance are related by the equations

$$m_{r_1,r_2} = -\frac{1}{2}\sigma_{r_1,r_2}^2$$
, and $\sigma_{r_1,r_2}^2 = \mu \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$. (2.39)

In order to distinguish between the two models we compare the pdf of n obtained previously, with the pdf predicted by the Log-Normal model with $\mu = 2/9$ (see figure 2.10). We observe that the two statistics remain very close, particularly for large scale ratii. However, a better agreement is found with the Log-Poisson statistics. Note that changing the parameter μ would not improve notably the agreement between the experimental data and the Log-Normal prediction.

We have provided some support for an underlying log-Poisson multiplicative process in a turbulent jet signal. Furthermore, the parameter λ_{r_1,r_2} of this process is found in striking agreement with the prediction of the statistical-hierarchy model proposed by She & Lévêque.

References

- [1] B. Mandelbrot, J. Fluid Mech. 62, 331 (1974).
- [2] U. Frisch, P.-L. Sulem and M. Nelkin, J. Fluid Mech. 78, 719 (1978).
- [3] R. Benzi, G. Paladin, G. Parisi and A. Vuilpani, J. Phys. A 17, 3521 (1984).
- [4] C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. Lett. 59, 1424 (1987).
- [5] B. Dubrulle, Phys. Rev. Lett. 73, 959 (1994).
- [6] Z.-S. She and E. Waymire, Phys. Rev. Lett. 76, 262 (1995).
- [7] A. N. Kolmogorov, J. Fluid Mech. 13, 82 (1962); A. M. Oboukhov, J. Fluid Mech. 13, 77 (1962).
- [8] E. A. Novikov and R. W. Stewart, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geoffiz. 408 (1964); E. A. Novikov, Appl. Math. Mech. 35, 231 (1971); Phys. Fluids A2, 814 (1990).
- [9] A. M. Yaglom, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 166, 49 (1966).
- [10] B. Castaing, Y. Gagne and E. Hopfinger, Physica D 46, 177 (1990).
- [11] U. Frisch, Turbulence, the legacy of A. N. Kolmogorov, Cambridge University Press, Cambridge UK (1995).
- [12] Z.-S. She and E. Leveque, Phys. Rev. Lett. 72, 336 (1994).
- [13] R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. 62, 305 (1974).
- [14] G. Pedrizzetti, E.A. Novikov and A.A. Praskovsky, Phys. Rev. E 53, 475 (1996); M. Nelkin and G. Stolovitzky, Phys. Rev. E 54, 5100 (1996).
- [15] A. N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 32, 16 (1941).



FIG. 2.11 – La hiérarchie des niveaux de fluctuation est bien satisfaite par le taux de diffusion d'un scalaire passif (ici, la température) dans le sillage turbulent d'un cylindre vertical. Les points de coordonnées $(Y_p(r_1,r_2),Y_{p+1}(r_1,r_2))$ se trouvent aux noeuds du maillage défini par le système d'équations (2.40) avec $\beta \approx 4/5$.

2.5 La généralité du modèle de hiérarchie statistique

L'application du modèle de hiérarchie statistique dépasse largement le cadre de la turbulence hydrodynamique homogène et isotrope. De nombreux travaux ont montré que ce formalisme pouvait s'appliquer à une vaste classe de systèmes désordonnés, caractérisés par des lois d'échelle anormales.

cas du scalaire passif :

Dans le cas d'un scalaire passif, la température par exemple, transporté par un écoulement turbulent, nous avons montré que le taux de diffusion du scalaire satisfait la condition de fermeture du modèle de hiérarchie statistique :

• «Scaling Laws for the Turbulent Mixing of a Passive Scalar in the Wake of a Cylinder», E. LÉ-VÊQUE, G. RUIZ-CHAVARRIA, C. BAUDET & S. CILIBERTO, *Physics of Fluids*, vol. 11, 1999, p. 1869

Pour tester la condition de fermeture du modèle de hiérarchie, il est judicieux d'examiner le comportement de la fonction $Y_p(r_1,r_2) \equiv \log(\varepsilon_{r_2}^{(p)}/\varepsilon_{r_1}^{(p)})$ pour différents ordres p et différents couples d'échelles inertielles (r_1,r_2) . Si la condition de fermeture est satisfaite alors

$$\begin{cases} Y_{p+1}(r_1, r_2) = \beta Y_p(r_1, r_2) + C^{\text{te}}(r_1, r_2) \\ Y_{p+1}(r_1, r_2) = \left(\frac{1 - \beta^{p+1}}{1 - \beta^p}\right) Y_p(r_1, r_2) \end{cases}$$
(2.40)

Ce système d'équations donne une représentation géométrique de la condition de fermeture (2.9). Les points de coordonnées $(Y_p(r_1,r_2),Y_{p+1}(r_1,r_2))$ sont les noeuds d'un maillage paramétré par le coefficient β (figure 2.11).

deux articles récents :

Enfin, citons deux applications récentes du modèle de hiérarchie statistique :

 - «Scaling relations for turbulence in the multiphase interstellar medium», A. KRITSUK & M. NOR-MAN, *The Astrophysical Journal*, 601:L55-L58, 2004

We employ a generalization of the She & Lévêque model to study velocity scaling relations based on our simulations of thermal instability induced turbulence. Being a by-product of the interstellar phase transition, such multiphase turbulence tends to be more intermittent than compressible isothermal turbulence. Due to radiative cooling, which promotes nonlinear instabilities in supersonic flows, the Hausdorff dimension of the most singular dissipative structures, D, can be as high as 2.3, while in supersonic isothermal turbulence D is limited by shock dissipation to D 2. We also show that single-phase velocity statistics carry only incomplete information on the turbulent cascade in a multiphase medium. We briefly discuss the possible implications of these results on the hierarchical structure of molecular clouds and on star formation. © 2004 The American Astronomical Society. All rights reserved. Printed in U.S.A.

- «Hierarchical structure in healthy and diseased human heart rate variability», EMILY S. C. CHING,
 D. C. LIN AND C. ZHANG, *Phys. Rev. E*, vol. 69, 051919, 2004

It is shown that the healthy and diseased human heart rate variability (HRV) possesses a hierarchical structure of the She-Leveque (SL) form. This structure, first found in measurements in turbulent fluid flows, implies further details in the HRV multifractal scaling. The potential of diagnosis is also discussed based on the characteristics derived from the SL hierarchy. ©2004 The American Physical Society

Concilier cascade d'énergie et viscosité turbulente, à quel prix?

Dans la limite des grands nombres de Reynolds, l'agitation turbulente révèle un nombre infini de degrés de liberté (ou modes du mouvement) soumis à des dynamiques de phase et d'amplitude nontriviales. Un problème important est la réduction de ce système infini, en un système fermé de dimension réduite pour un ensemble restreint de modes. Les modes à grande échelle sont particulièrement intéressants car ils contiennent presque toute l'information sur la cinétique de l'écoulement [62] [63] (livres sur le sujet).

Dans le contexte d'une turbulence homogène et isotrope, nous avons proposé un modèle réduit des équations de Navier-Stokes restreintes aux modes de Fourier de faible nombre d'onde :

• «Finite-mode spectral model of homogeneous and isotropic Navier-Stokes turbulence : A rapidly depleted energy cascade», E. LÉVÊQUE & C. KOUDELLA, *Physical Review Letters*, vol. 86, 2001, p. 4033

Dans ce modèle, les corrélations à deux points du champ de vitesse sont correctement résolues jusqu'à la micro-échelle (spatiale) de Taylor. L'approche suivie est originale, dans le sens où il ne s'agit pas de modéliser l'interaction entre les modes de Fourier retenus (grandes échelles) et les modes non-retenus (petites échelles), mais de thermaliser très rapidement la cascade au-delà d'un nombre d'onde particulier : le point d'inflexion du transfert d'énergie vers les petites échelles. La cascade d'énergie est ainsi brutalement éteinte ; le nombre de degrés de liberté excités est de ce fait beaucoup plus petit.

Concrètement, ce modèle permet de diviser le coût de calcul par 2^4 par rapport à une simulation directe (sans approximation) à nombre de Reynolds équivalent. Le nombre de modes de Fourier est réduit d'un facteur deux dans chaque direction. Outre son intérêt pratique, ce travail pose aussi des questions théoriques importantes : par exemple, l'interprétation du couplage entre le thermostat (à grands nombres d'onde) et la cascade d'énergie dans un contexte de mécanique statistique hors-équilibre est une question ouverte [64] (livre sur la mécanique statistique de la turbulence). Enfin, ce modèle s'intègre tout à fait dans le cadre développé dans le chapitre précédent. La condition de thermalisation est associée à l'image d'un mouvement tourbillonnant (autour des concentrations de vorticité) qui serait brutalement amorti lorsque le fluide atteint le coeur du vortex. On retrouve ici l'idée d'intégrer la dynamique dans le traitement statistique de la turbulence.

Pour représenter la turbulence homogène, nous considérons la solution tronquée des équations de Navier-Stokes dans un domaine cubique avec des conditions périodiques avec force aléatoire à grande échelle (voir le chapitre d'introduction). La thermalisation de la cascade est assurée par une viscosité

année	résolution DNS	R_{λ} (ordre de grandeur)
1972	32^3 (Orszag & Patterson [66])	35
1985	128^{3}	
1991	256 ³ (She, Jackson & Orszag [51])	140
1995	512^{3}	
2002	1024^3 (Gotoh [67])	400
2005	2048^3 (Earth Simulator, Japan)	700

TAB. 3.1 – L'évolution (grosso-modo) de la résolution (en nombre de modes de Fourier) des simulations numériques directes des équations de Navier-Stokes tridimensionnelles. La résolution est multipliée par deux (dans chaque direction) tous les cinq ans environ.

turbulente $\nu_{\text{turb.}}(\vec{k},t)$ agissant sur la dynamique des modes à grand nombre d'onde [65]. Les équations dynamiques du modèle s'écrivent ainsi

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \left(\nu + \nu_{\text{turb.}}(\vec{k}, t)\right)k^2\right)\hat{u}_{\alpha}(\vec{k}, t) = -ik_{\gamma}\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{k^2}\right)\sum_{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k}}^{|\vec{p}|,|\vec{q}|\leq K}\hat{u}_{\beta}(\vec{p}, t)\hat{u}_{\gamma}(\vec{q}, t) + f_{\alpha}(\vec{k}, t)$$

$$(3.1)$$

pour $0 < k \leq K$ (coupure spectrale du modèle). Les questions posées sont les suivantes :

- comment construire la viscosité turbulente $\nu_{turb.}(\vec{k},t)$ pour éteindre rapidement la cascade d'énergie sans perturber la dynamique des modes de la zone inertielle?
- est-il nécessaire de conserver une viscosité moléculaire cinématique, et si oui pourquoi?
- est-il possible d'éteindre (de manière satisfaisante) la cascade à partir de n'importe quel nombre d'onde?

Les idées développées dans ce chapitre reposent sur une description originale de la cascade d'énergie, construite à partir du comportement de la fonction de transfert d'énergie (à travers les nombres d'onde). Cette description sera présentée dans la section 3.2. Notre modèle de cascade sera rapidement introduit puis discuté dans la section 3.3 mais tout d'abord, quelques considérations matérielles s'imposent (section 3.1).

3.1 Quelques considérations matérielles, mais néanmoins importantes

Dans le cadre d'une turbulence homogène et isotrope, le nombre de degrés de liberté excités est donné par le rapport $(L/\eta)^3$, où L et η désignent respectivement l'échelle intégrale et l'échelle élémentaire de l'agitation turbulente. L'échelle intégrale est un paramètre extérieur, c'est l'échelle à laquelle on excite la turbulence. L'échelle élémentaire (de Kolmogorov) est, quant à elle, intrinsèque au système. Elle correspond à la taille des plus petits tourbillons; elle est fixée par la dynamique du fluide. Dans le contexte d'une cascade d'énergie des grandes vers les petites échelles, la théorie de Kolmogorov (1941) prédit que $\eta \equiv (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}$, où ε désigne le taux moyen du transfert d'énergie.

Un argument d'analyse dimensionnelle conduit à $\varepsilon \sim u_{
m rms}^3/L$ d'où finalement

$$\left(\frac{L}{\eta}\right)^3 \sim Re^{9/4}$$
 avec $Re \equiv \frac{u_{\rm rms}L}{\nu}$: nombre de Reynolds (local). (3.2)

Le nombre de degrés de liberté excités diverge donc très vite avec le nombre de Reynolds. Les ressources informatiques étant nécessairement finies, cette contrainte limite la représentation numérique des écoulements turbulents à des nombres de Reynolds modérés (voir la table 3.1). Ces circonstances stimulent le développement de modèles réduits des équations de Navier-Stokes, moins gourmands en ressources informatiques mais néanmoins pertinents pour décrire la cinétique globale de l'écoulement. L'intérêt est pratique, comme nous venons de le voir, mais aussi théorique car pour réduire les équations de Navier-Stokes, il faut «comprendre» le mécanisme de cascade d'énergie.

les besoins en ressources informatiques d'une simulation numérique directe de la turbulence :

Pour simplifier, nous nous plaçons dans le cadre d'une simulation directe des équations de Navier-Stokes dans un cube de taille D discrétisé en N points de grille, soit une résolution $\delta x = D/N$ dans chaque direction. Afin de bien représenter le mouvement turbulent, il est nécessaire de satisfaire $D \gtrsim L$ et $\delta x \leq \eta$ soit

$$N^3 \gtrsim Re^{9/4}.\tag{3.3}$$

Supposons que l'on intègre le système sur un intervalle de temps T discrétisé en M pas de temps élémentaire $\delta t = T/M$. La stabilité du schéma numérique impose une contrainte sur l'ajustement des résolutions spatiale et temporelle. Si l'on considère le critère de stabilité de Courant [68] (livre sur les méthodes numériques en mécanique des fluides), on obtient

$$\underbrace{\sigma \equiv \frac{u_{\rm rms} \delta t}{\delta x}}_{\text{nombre Courant-Friedrich-Lewy}} \lesssim 1 \quad \text{soit} \quad \left(\frac{u_{\rm rms} T}{L}\right) \frac{N}{M} \lesssim 1.$$
(3.4)

En général, il est nécessaire d'intégrer le système sur un intervalle de temps de l'ordre de grandeur du temps intégrale $L/u_{\rm rms}$. On obtient ainsi $u_{\rm rms}T/L \approx 1$, d'où $N \leq M$ puis

$$M \gtrsim Re^{3/4}.\tag{3.5}$$

Ces résultats montrent que si l'on veut considérer un nombre de Reynolds dix fois supérieur, il faut disposer d'un espace mémoire environ deux cents fois plus grand. D'autre part, pour intégrer les équations de Navier-Stokes sur un temps intégral, le nombre de pas de temps nécessaire est environ dix fois plus grand.

Raisonnons maintenant en termes d'opérations élémentaires. Pour une méthode d'intégration pseudospectrale [28], la tâche principale du code est la transformée de Fourier rapide (FFT). Le nombre d'opérations d'une FFT étant de l'ordre de $N \log_2 N$, on peut estimer la consommation totale à

$$\underbrace{M}_{\text{intégration en temps}} \times (\underbrace{N^2 \times \underbrace{N \log_2 N}_{\text{FFT}}}_{\text{intégration en espace}}) \gtrsim N^4 \log_2 N \gtrsim Re^3 \log_2 Re.$$
(3.6)

Augmenter le nombre de Reynolds d'un ordre de grandeur (dix fois) correspond à une multiplication du coût de calcul par mille. On peut cependant remarquer que les simulations numériques les plus poussées permettent aujourd'hui d'atteindre des nombres de Reynolds turbulents comparables à ceux des expériences menées en laboratoire, soit environ $R_{\lambda} = 700$ pour un jet turbulent (table 3.1).



FIG. 3.1 – Evolution du nombre de transistors intégrés sur un processeur : la loi est exponentielle (loi de Moore [69]) comme pour la résolution des simulations numériques.

quelques mots sur les modèles numériques de la turbulence :

Le mouvement turbulent se développe sur une gamme étendue d'échelles, dont l'extension croît avec le nombre de Reynolds. Les mouvements à grande échelle sont les plus énergétiques car le spectre d'énergie décroît très rapidement ; les petites structures sont principalement responsables de la dissipation. Pour le mécanicien, qui s'intéresse d'abord à la cinétique globale de l'écoulement, seul le mouvement des grandes structures importe donc. Il s'agit alors de s'affranchir de la représentation numérique des petites structures. Dans ce contexte, les solveurs de type RANS (*Reynolds-Averaged-Navier-Stokes*) sont sans doute les plus répandus. Il s'agit de l'approche suivie par Reynolds, qui consiste à décomposer l'écoulement en une partie moyenne et une partie fluctuante, et modéliser l'influence de la partie fluctuante sur la composante moyenne (voir le chapitre d'introduction). Ces solveurs permettent le calcul de l'écoulement moyen et des grandeurs caractéristiques de la turbulence mais ne donnent pas accès aux fluctuations instantanées. D'autre part, les conditions de fermeture sont souvent assez mal contrôlées ; elles font appel à un fort empirisme [18].

La simulation numérique dite des grandes échelles (LES pour *Large-Eddy Simulation*) offre un compromis entre la simulation numérique directe (dont le coût de calcul est généralement prohibitif) et la simulation RANS, plus tractable numériquement mais qui repose sur des hypothèses souvent contestables. Dans une LES, seule la dynamique des modes spatiaux à grandes échelles est intégrée ; le comportement des petites échelles (non-résolues) est modélisé. Par opposition aux calculs RANS, où sont modélisés l'ensemble des mouvements contribuant aux tenseurs de Reynolds, la modélisation ne porte ici que sur une partie du mouvement d'agitation turbulente : la composante petite échelle. Pour séparer les petites des grandes échelles, on utilise généralement une procédure de filtrage qui élimine du champ total toute contribution aux échelles inférieures à une certaine longueur de filtrage (largeur du filtre).

3.2 La cascade d'énergie de la turbulence homogène et isotrope

Cette section est tirée d'un cours donné à l'École thématique : «Turbulence : Measurements and signals» à Cargèse en mai 2002.


FIG. 3.2 – Bilan d'énergie cinétique pour l'ensemble des modes de Fourier de nombre d'onde compris entre 0 et k: l'énergie transmise aux modes de nombres d'onde supérieurs à k (par unité de temps) définit le flux d'énergie F(k,t) à travers le nombre d'onde k.

Les modes de Fourier de la vitesse satisfont les équations de Navier-Stokes forcées

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right)\hat{u}_{\alpha}(\vec{k},t) = -ik_{\gamma}\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{k^2}\right)\sum_{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k}}\hat{u}_{\beta}(\vec{p},t)\hat{u}_{\gamma}(\vec{q},t) + f_{\alpha}(\vec{k},t).$$
(3.7)

À partir de ces équations, on peut établir un bilan d'énergie au nombre d'onde k :

$$\frac{\partial E(k,t)}{\partial t} = T(k,t) + \varepsilon_{\text{inj.}}(k,t) - 2\nu k^2 E(k,t)$$
(3.8)

où E(k,t) représente la densité spectrale d'énergie; T(k,t) est le transfert d'énergie relatif aux interactions par triades impliquant les modes de nombre d'onde k; enfin, $\varepsilon_{inj.}(k,t)$ est la puissance injectée par la force extérieure.

En intégrant ce bilan d'énergie, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_{0}^{k} E(k',t)dk'}_{\mathcal{E}(k,t)} = \underbrace{\int_{0}^{k} T(k',t)dk'}_{-F(k,t)} + \underbrace{\int_{0}^{k} \varepsilon_{\mathrm{inj.}}(k',t)dk'}_{\varepsilon(t)} - 2\nu \underbrace{\int_{0}^{k} {k'}^{2} E(k',t)dk'}_{\Omega(k,t)}$$
(3.9)

ou encore

$$\frac{\partial \mathcal{E}(k,t)}{\partial t} = -F(k,t) + \varepsilon(t) - 2\nu\Omega(k,t). \quad \text{(voir figure 3.2)}$$
(3.10)

On fait ici l'hypothèse que le nombre d'onde k est très grand devant le nombre d'onde caractéristique de l'injection d'énergie, de sorte que $\int_0^k \varepsilon_{inj.}(k',t)dk' = \varepsilon(t)$ peut être considéré indépendant de k.

En régime stationnaire, on obtient finalement (pour les quantités moyennes)

$$F(k) = \varepsilon - 2\nu\Omega(k). \tag{3.11}$$

Il s'agit de l'équation bilan de la cascade d'énergie (figure 3.3).



 FIG. 3.3 – F(k) représente le flux moyen d'énergie à travers le nombre d'onde k (données numériques, E. Lévêque). L'énergie injectée à faible nombre d'onde est transférée par le mécanisme de cascade vers les grands nombres d'onde, puis dissipée à très grand nombre d'onde.

3.2.1 Le nombre d'onde dissipatif de Kolmogorov

Dans la théorie de Kolmogorov (1941), la cascade d'énergie se développe jusqu'au nombre d'onde dissipatif k_d puis se termine brutalement : $F(k_d) = 0$ d'où $2\nu\Omega(k_d) = \varepsilon$ par l'équation (3.11). Par construction, on a

$$\Omega(k) = \int_0^k {k'}^2 E(k') dk'.$$
(3.12)

Si l'on considère la densité spectrale $E(k') = C\varepsilon^{2/3}k'^{-5/3}$, on obtient $\Omega(k) = (3/4)C\varepsilon^{2/3}k^{4/3}$ puis

$$k_d = \frac{1}{\left(\frac{3C}{2}\right)^{3/4}} \left(\frac{\varepsilon}{\nu^3}\right)^{1/4}.$$
 (3.13)

On retrouve ainsi (à une constante multiplicative près) l'expression proposée par Kolmogorov, c'est à dire $k_d(\varepsilon,\nu) \equiv (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$.

Nous allons maintenant montrer qu'il est possible de construire un autre nombre d'onde dissipatif, en analysant le comportement de la fonction flux d'énergie F(k). Ce nombre d'onde prend en compte (plus correctement) l'augmentation progressive des effets dissipatifs lorsque le nombre d'onde k augmente (figure 3.3).

3.2.2 Le point d'inflexion du flux d'énergie

Dans la zone inertielle, le terme de dissipation $2\nu\Omega(k)$ reste très petit devant ε ; le flux moyen de la cascade est (presque) constant : $F(k) \simeq \varepsilon$. Lorsque le nombre d'onde k augmente, le terme de dissipation s'intensifie et par conséquent F(k) décroît : la cascade s'éteint progressivement. Enfin pour k très grand, on a $F(k) \simeq 0$: la cascade est éteinte.



FIG. 3.4 – Le temps caractéristique du transfert d'énergie t(k) est représenté en fonction du nombre d'onde k (données numériques, E. Lévêque). À partir des équations (3.15) et (3.16), on montre que t(k) est minimum pour $k = k_c$.

Le flux d'énergie en fonction de $\log k$ possède un point d'inflexion :

$$\frac{d^2 F(k)}{d \log k^2} = 0 \quad \text{pour} \quad k \approx k_c. \tag{3.14}$$

En dérivant l'équation (3.11) par rapport à k, on obtient $-\frac{dF(k)}{dk} = 2\nu k^2 E(k)$. Par conséquent

$$-\frac{dF(k)}{d\log k} = 2\nu k^3 E(k) \quad \text{et donc} \quad E(k) \approx E(k_c) \left(\frac{k}{k_c}\right)^{-3} \quad \text{pour} \quad k \approx k_c.$$
(3.15)

Ce comportement $E(k) \sim k^{-3}$ autour de k_c rappelle le spectre d'énergie de la cascade directe d'enstrophie de la turbulence bi-dimensionnelle [70] (voir l'article présenté dans la section 3.4).

3.2.3 Le rythme de la cascade d'énergie

Quel sens physique peut-on donné au nombre d'onde k_c ? Nous allons montrer qu'il possible de relier ce nombre d'onde caractéristique au «rythme» de la cascade d'énergie.

Un argument d'analyse dimensionnelle permet de définir le temps caractéristique du transfert d'énergie au nombre d'onde k:

$$t(k) \sim E(k)^{-1/2} k^{-3/2}.$$
 (3.16)

Dans la zone inertielle, le spectre de Kolmogorov $E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$ conduit à $t(k) \sim \varepsilon^{-1/3} k^{-2/3}$.

À partir de l'équation (3.16), on établit que

$$\frac{d\log t(k)}{d\log k} = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\log E(k)}{d\log k} + 3 \right). \tag{3.17}$$

On obtient ainsi

- pour $k < k_c$: le temps caractéristique t(k) décroît lorsque k augmente; le rythme de la cascade s'accélère en progressant vers les grands nombres d'onde.
- pour $k > k_c$: le temps caractéristique t(k) croît fortement lorsque k augmente; le rythme de la cascade se ralentit de plus en progressant dans la zone dissipative.
- enfin pour $k \approx k_c$: l'énergie est transmise à un rythme constant au voisinage de k_c .

On remarque que le temps caractéristique du transfert d'énergie est minimal pour $k = k_c$ (figure 3.4). On peut donc prétendre que le transfert d'énergie s'effectue de la manière la plus efficace autour du nombre d'onde k_c . Pour permettre ce transfert optimal, on s'attend à ce qu'une synchronisation (une cohérence de phase) s'accomplisse entre les modes de Fourier. Dans l'espace physique, on s'attend à ce que le mouvement d'agitation turbulente s'organise en structures spatio-temporelles cohérentes. On serait donc naturellement tenté d'associer ce transfert optimal à la présence des filaments de vorticité [51].

Ce raisonnement heuristique, qui conduit à l'existence de structures spatio-temporelles cohérentes et par conséquent au phénomène d'intermittence, repose uniquement sur un bilan d'énergie et une estimation du temps caractéristique de la cascade (au nombre d'onde k):

$$\frac{dF(k)}{dk} = -2\nu k^2 E(k) \quad \text{et} \quad t(k) \propto E(k)^{-1/2} k^{-3/2}.$$
(3.18)

au sujet de la localité des interactions entre modes :

Dans la zone inertielle, le spectre d'énergie est cohérent avec l'idée d'une cascade locale en nombre d'onde (voir le chapitre d'introduction). Au contraire, on s'attend à ce que les corrélations soient non-locales au voisinage du nombre d'onde k_c , pour permettre une cohérence de phase à longue portée entre les modes de Fourier. Si l'on relie cette propriété aux résultats obtenus précédemment pour le modèle en couche, la non-localité des interactions résulterait de la présence des cascades directe et inverse d'énergie (figure 3.5).

3.3 Modèle réduit des équations de Navier-Stokes

Nous forçons la persistance du mécanisme de transfert optimal aux nombres d'onde $k_c \le k \le K$ (coupure spectrale) afin de terminer le plus rapidement possible la cascade d'énergie. Pour cela, on introduit une viscosité turbulente $\nu(k,t)$ qui impose une décroissance du spectre d'énergie en k^{-3} :

$$E(k) = E(k_c) \left(\frac{k}{k_c}\right)^{-3} \quad \text{pour} \quad k_c \le k \le K.$$
(3.19)

Les tenants et les aboutissants de ce modèle sont contenus dans l'article présenté dans la section 3.4.



cascade d'énergie directe et inverse, «non-locale» en nombre d'onde

FIG. 3.5 – La cascade d'énergie est locale en nombre d'onde dans la zone inertielle, lorsque les effets dissipatifs sont négligeables. Au voisinage du nombre d'onde k_c , les interactions entre modes seraient plutôt non-locales en nombre d'onde et la dynamique résulterait de la compétition entre cascade directe et cascade inverse d'énergie.

éléments de réponse aux questions du début :

- La viscosité turbulente $\nu(k,t)$ est calculée à chaque pas de temps afin de satisfaire la contrainte (3.19) imposée sur le spectre d'énergie. $\nu(k,t)$ est une grandeur réelle et non complexe, ce qui signifie que la phase des modes de Fourier n'est pas perturbée : la contrainte s'applique sur l'amplitude uniquement. Les phases des modes de nombre d'onde $k \gtrsim k_c$ (modes thermostatés) sont donc libres de se synchroniser avec les phases des modes $k \lesssim k_c$ (modes dynamiques) pour assurer une extinction rapide de la cascade, sans perturber la dynamique des modes de Fourier dans la zone inertielle. Cette synchronisation semble être la clé de la réussite de ce modèle réduit.
- La dissipation moléculaire est ici essentielle, dans le sens où elle annihile progressivement l'accélération de la cascade. Nous avons montré (par des arguments phénoménologiques) que lorsque cette accélération s'annule, la cascade s'effectue de manière synchrone entre les modes de Fourier. Il est alors possible d'éteindre rapidement la cascade par l'action d'une viscosité turbulente supplémentaire. L'action d'une viscosité cinématique à grande échelle semble donc être un préalable nécessaire à l'introduction d'une viscosité turbulente à petite échelle.
- Nous avons tenté d'éteindre rapidement la cascade d'énergie au delà d'un nombre d'onde k_c choisi arbitrairement dans la zone inertielle. Dans ce cas, nous avons observé de fortes perturbations en amont de la cascade aux nombres d'onde $k \leq k_c$. Ce résultat indique qu'il n'est pas possible d'éteindre la cascade à partir de n'importe quel nombre d'onde, sans perturber la cascade en amont : il y a un prix à payer!

3.4 Article présenté

3.4.1 «Finite-mode spectral model of homogeneous and isotropic Navier-Stokes turbulence : A rapidly depleted energy cascade»,

E. LÉVÊQUE & C. R. KOUDELLA, Physical Review Letters, vol. 86, 2001, p. 4033

VOLUME 86, NUMBER 18 PHYSICAL REVIEW LETTERS 30 APRIL 2001

Finite-Mode Spectral Model of Homogeneous and Isotropic Navier-Stokes Turbulence: A Rapidly Depleted Energy Cascade

E. Lévêque

Laboratoire de Physique CNRS, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 69364 Lyon Cedex 07, France

C.R. Koudella

Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, Cambridge CB3 9EW, United Kingdom (Received 31 October 2000)

An eddy-viscous term is added to Navier-Stokes dynamics at wave numbers k greater than the inflection point k_c of the energy flux $F(\log(k))$. The eddy viscosity is fixed so that the energy spectrum satisfies $E(k) = E(k_c)(k/k_c)^{-3}$ for $k > k_c$. This resulting forcing induces a rapid depletion of the energy cascade at $k > k_c$. It is observed numerically that the model reproduces turbulence energetics at $k \le k_c$ and statistics of two-point velocity correlations at scales $r > \lambda$ (Taylor microscale). Compared to a direct numerical simulation of $R_{\lambda} = 130$ an equivalent run with the present model results in a gain of a factor 20 in CPU time.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.4033

PACS numbers: 47.27.Ak, 47.27.Cn, 47.27.Eq

In the limit of large Reynolds numbers, Navier-Stokes (NS) turbulence exhibits an infinite number of excited modes (scales of motions), each subject to nontrivial phase mixing induced by the quadratic nonlinearities inherent to hydrodynamics. A key issue lies in the reduction of the dynamics to a closed set of equations for a finite number of modes. The low wave-number modes, or large-scale motions, are particularly important since they contain most information about the energetics.

We present a reduced set of dynamical equations governing the energy-containing modes of homogeneous and isotropic turbulence.

As a paradigm for homogeneous and isotropic turbulence we consider the incompressible NS equations in a cyclic box of side length 2π [1]. The velocity field may be expanded as a Fourier series $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{k},t) \exp(i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x})$, so that the NS equations in Fourier space read

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \nu_{\rm mol}k^2\right] v_{\alpha}(\boldsymbol{k},t) = -ik_{\gamma} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{k^2}\right) \sum_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}} v_{\beta}(\boldsymbol{p},t) v_{\gamma}(\boldsymbol{q},t) + f_{\alpha}(\boldsymbol{k},t).$$
(1)

Summation over repeated Greek indices is implied. In (1), ν_{mol} is the molecular kinematic viscosity, while $f_{\alpha}(k, t)$ is an isotropic force acting at very low *k*.

Under isotropic conditions the wave-number-bywave-number instantaneous spectral energy budget is

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu_{\rm mol}k^2\right] E(k,t) = T(k,t) + \epsilon_{\rm inj}(k,t).$$

E(k, t) denotes the energy in the shell of wave vectors $k \le |\mathbf{k}| < k + 1$, T(k, t) is the energy-transfer spectrum comprising all triad interactions involving wave-number k modes, and $\epsilon_{inj}(k, t)$ represents the rate of energy supplied by the large-scale force $\mathbf{f}(k, t)$.

A finite-mode spectral model deals with a truncated expansion of the velocity field, such that $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k},t) = \boldsymbol{0}$ for $|\boldsymbol{k}| > K$ (spectral cutoff). At very large wave numbers, turbulent excitations are suppressed by viscous dissipation. Consequently, if *K* is chosen larger than the characteristic dissipative wave number K_{diss} the missing triad interactions in the NS system reduced to resolved modes may be neglected. The integration in time of this reduced system is known as a direct numerical simulation (DNS) of (1). Dimensional arguments suggest that $K_{\text{diss}} \sim R_{\lambda}^{3/2}$ [2],

where R_{λ} is the Taylor microscale Reynolds number. Because physical space is three dimensional, the number of retained modes scales as $R_{\lambda}^{2/2}$ and thus precludes the investigation of high- R_{λ} turbulent flows by DNS. In what follows we focus on case $K \ll K_{\text{diss}}$ so as to achieve a substantial reduction of the NS system. A model accounting for missing triad interactions is then required.

Classical phenomenology pictures the kinetic-energy transfer mechanism of turbulence as an energy cascade from low to high wave-number modes [1]. The cascade may be characterized by the flux F(k, t) of energy across wave number k in terms of which the local stationary energy budget may be written as

$$2\nu_{\rm mol}k^3 E(k) = -dF/d\log k.$$
⁽²⁾

When time dependence is omitted ensemble averaging is assumed. A peculiar feature of F(k) as a function of $\log(k)$ lies in the observation of an inflection point at wave number k_c , i.e., $[d^2F(k)/d \log k^2]_{k=k_c} = 0$ [see Fig. 1]. In order to capture the physical meaning of k_c let us introduce the characteristic eddy-turnover time $t_{eddy}(k)$, or inverse rate of energy transfer. Following Kolmogorov phenomenology [2] it may be estimated as

0031-9007/01/86(18)/4033(4)\$15.00

© 2001 The American Physical Society

30 April 2001

VOLUME 86, NUMBER 18

PHYSICAL REVIEW LETTERS



FIG. 1. F(k) denotes the mean energy flux across k. As a function of $\log(k)$ the flux exhibits an inflection point at $k = k_c$. For $k < k_c$ the energy cascade accelerates with k, whereas for $k > k_c$ the cascade decelerates under predominant viscous effects.

$$t_{\rm eddy}(k) \sim E(k)^{-1/2} k^{-3/2}.$$
 (3)

From (2) and (3) it is now seen that $t_{eddy}(k)$ decreases, i.e., the energy transfer accelerates, with $k \ll k_c$; Kolmogorov's spectrum $E(k) \sim k^{-5/3}$ [2] yields $t_{eddy}(k) \sim$ $k^{-2/3}$. As k increases, viscous effects intensify and the cascade acceleration progressively vanishes. For $k \leq k_c$ the energy flows at a constant speed and $E(k) \sim k^{-3}$ locally. Finally for $k > k_c$ the cascade is decelerated and the energy flux slowly vanishes. Based on these observations we propose a finite-mode model obtained from adding an isotropic force $-\nu(k > k_c | K, t)k^2 \boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}, t)$ to the (reduced) NS dynamics at $k_c < k \le K$. As will be shown below the additional force accounts for a rapid depletion of the energy cascade in the range $k_c < k \le K$ (near the cutoff) without perturbing the modes in the accelerated cascade range. Further, incompressibility and Galilean invariance of the NS equations are preserved. Note that only the amplitude of modes $k_c < k \leq K$ is rescaled, their phase remaining untouched. The model spectral energy budget reads

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu_{\text{eddy}}(k \mid K, t)k^2\right] E(k, t) = T(k \mid K, t) + \epsilon_{\text{ini}}(k, t),$$

where $T(k \mid K, t)$ is the energy-transfer spectrum reduced to triad interactions among resolved modes. Following [3], $\nu_{\text{eddy}}(k \mid K, t) \equiv \nu_{\text{mol}} + \nu(k > k_c \mid K, t)$ may be viewed as a dynamic wave-number dependent eddy viscosity.

The variable component $\nu(k > k_c | K, t)$ of the eddy viscosity is adjusted so as to extrapolate the mean $E(k) \sim k^{-3}$ scaling in the damping zone, i.e.,

$$E(k) = E(k_c) (k/k_c)^{-3}, \qquad k_c < k \le K.$$
 (4)

The scaling $E(k) \sim k^{-3}$ is heuristically associated with the joined k independent enstrophy cascade and identically zero energy cascade in two-dimensional turbulence [4]. Here the enforced $E(k) \sim k^{-3}$ is expected to transport vorticity to $k > k_c$ and to rapidly deplete the energy flux. This mechanism is connected with the picture of locally two-dimensional fluid motion around regions of concentrated vorticity (coherent vorticity structures) displaying a brutal energy penalty as the fluid reaches the core of these regions. It is noteworthy that the scaling $E(k) \sim k^{-3}$ has been experimentally evidenced in the vicinity of a stable, strong 3D vortex whose surrounding fluid is brought to spiral rapidly towards the core of the vortex [5]. An important point to note here is the potential nonlocality of the cascade process in the damping range. Indeed, following Kraichnan's arguments [4], a k^{-3} spectrum is consistent with all triad interactions contributing equally (the same amount) to the energy transfer at k. It is therefore expected that the energy cascade (around k_c) no longer operates through eddy breaking but rather through locally coherent (in physical space) fluid motions. Recall that the unmodified phases of the forced modes in the model effectively allow for such coherence to be established [6].

Numerical experiments performed with a parallel distributed memory pseudospectral NS solver [7] are presented next. The large-scale kinetic-energy forcing is adjusted at each time step by scaling the amplitudes of modes $1.5 \le k < 2.5$ uniformly (phases are left to fluctuate freely), so as to compensate exactly the losses due to eddy dissipation in the kinetic-energy budget. This robust and efficient forcing scheme permits a rapid relaxation to stationarity [8]. Results from DNS ($K > K_{diss}$) and finitemode model simulations ($K \ll K_{diss}$) are compared using identical initial conditions and statistics sampled in space and time. Note that finite-mode simulations will be referred to as large-eddy simulations (LES) in figure captions.

In practice the cutoff wave number K is fixed and the molecular viscosity is chosen such that $k_c \simeq 2K/3$; the damping zone extends over 1/6 of a decade. Figure 3 below shows that this width is sufficient for the completion of a rapid falloff of the energy flux. At each time step $\nu(k > k_c | K, t)$ is updated in order to enforce a power-law scaling of $E(\bar{k}, t)$ in the damping zone; $E(k,t) = E(k_c,t)(k/k_c)^{-\alpha(t)}$ with $\alpha(t) =$ $-[\partial \log E(k,t)/\partial \log k]_{k=k_c}$. This is to be viewed as a linear extrapolation in log-log coordinates. An alternative adjustment scheme consists in determining $k_c(t)$ at each time step and extrapolating E(k,t) = $E[k_c(t), t][k/k_c(t)]^{-3}$ for $k > k_c(t)$. Both methods have been tested and yield identical results. For convenience the first one has been retained. The derivative is estimated by a least-squares approximation. Comparisons between aliased and dealiased (using the zero padding) schemes have shown that the eddy viscosity suitably damps aliasing errors, mainly concentrated in near wave number K shells.

The normalized mean kinetic-energy and squaredvorticity spectra [9] are shown in Fig. 2. They collapse in the whole energy-containing range, indicating that

PHYSICAL REVIEW LETTERS



FIG. 2. Energy E(k) and squared-vorticity $\Omega(k)$ spectra from direct and finite-mode numerical simulations. The spectra collapse when normalized by the wave number k_p of maximum squared-vorticity spectrum and spectrum amplitude at k_p [9].

our closure scheme does not notably affect energetics at wave numbers $k \le k_c$. Normalized mean energy fluxes for various Reynolds numbers collapse in Fig. 3. As expected, energy fluxes rapidly falloff and vanish in the damping zone.

An *effective* eddy viscosity is defined by $\overline{\nu}_{eddy}(k \mid K) = -T(k \mid K)/2k^2E(k)$. In Fig. 4, $\overline{\nu}_{eddy}(k \mid K)$ exhibits a cusp near K to compensate missing energy exchanges with unresolved modes and to avoid a piling up of energy at the bottom of the cascade. Interestingly all eddy viscosities collapse, showing some degree of self-similarity in the energetics of the rapid depletion process. Note that this self-similar form is expected to depend on the ratio k_c/K . As $k \rightarrow k_c^+$, $\overline{\nu}_{eddy}(k \mid K) \rightarrow \nu_{mol}$ smoothly, suggesting that $k \leq k_c$ modes are suitably synchronized with $k \geq k_c$ modes.

Consider now the two-point correlations of the unfiltered velocity field v(x, t). All Fourier modes have been retained in order to examine small-scale effects of our high



FIG. 3. Normalized mean kinetic-energy fluxes, from direct (DNS) and finite-mode (LES) numerical simulations, collapse in the energy-containing range of wave numbers.



30 April 2001

FIG. 4. The effective viscosity $\overline{\nu}_{eddy}(k \mid K)$ is displayed for different LES simulations. As $k \to k_c$, $\overline{\nu}_{eddy}(k, K) \to \nu_{mol}$ smoothly. Oscillations for $k \ge k_c$, at low resolution, result from the discrete wave-number decomposition.

wave-number damping. We focus first on moments of the longitudinal velocity increments $\delta_{\parallel}v(r)$ across a distance r, also called structure functions [1]. An exact relation, the Howarth-VonKarman equation [1], involving the secondand third-order structure functions at small scales, follows from the NS equations:

$$\langle \delta v_{\parallel}(r)^{3} \rangle = -4/5\varepsilon_{\rm ini}r + 6\nu d\langle \delta v_{\parallel}(r)^{2} \rangle/dr$$

This equation is verified in Fig. 5. The probability density functions of $\delta_{\parallel} v(r)$ are compared in Fig. 6. The agreement is satisfactory.

Relative scalings of velocity structure functions have recently received much interest [10,11]. The (local) intermittency exponent $\mu(r)$ is given by

$$2 + \mu(r) = d \log \langle |\delta v_{\parallel}(r)|^6 \rangle / d \log \langle |\delta v_{\parallel}(r)|^3 \rangle.$$

Results displayed in Fig. 7 are consistent with *effective* values $\bar{\mu} \leq -0.2$ as reported in [11]. At $R_{\lambda} = 130$, we observe that all estimates of $\mu(r)$ almost coincide at scales $r > \lambda$, the Taylor microscale [1]. Discrepancies at $r \leq \lambda$ are clearly related to our rapid depletion procedure. The Taylor microscale is here used as a reference scale and



FIG. 5. The Howarth-VonKarman equation is tested. The Kolmogorov's dissipative scale $\eta \equiv (\nu_{mol}^3 / \varepsilon_{inj})^{1/4}$. Note the linear vertical axis.

30 April 2001

VOLUME 86, NUMBER 18

PHYSICAL REVIEW LETTERS



FIG. 6. Distributions of longitudinal velocity increments, at various scales, collapse. Small discrepancies may be due to the two sets of compared scales not being exactly identical.

should not be taken as a strict lower bound for our model. We would like to stress that $\mu(r)$ is a sharp (local) estimator of turbulence scaling properties. Finally, the numerical tests strongly suggest that both energetics and scaling properties of the energy-containing turbulent fluctuations are well reproduced by this model.

The present rapidly depleted energy cascade model is of practical interest as it allows us to investigate the statistics at scales $r > \lambda$, without resolving the full NS system. A factor 20 gain in CPU time compared to a DNS at $R_{\lambda} = 130$ is obtained. More importantly we may reach $R_{\lambda} \approx 550$ in a 1024³ LES. In virtue of the relatively extended $F(k) \sim \log(k)$ scaling (see Fig. 1) the closure is not very sensitive to the exact values of (K, k_c, ν_{mol}) . From a low-resolution simulation higher-resolution runs can be directly set up by simply rescaling the parameters $K \rightarrow aK$, $k_c \rightarrow ak_c$, and $\nu_{mol} \rightarrow a^{-4/3}\nu_{mol}$. However, the model is of theoretical interest also, because understanding the inflection point of the kinetic-energy flux and recasting the forced dynamics into the framework of nonequilibrium stationary states [12] are open and important problems.

Molecular viscosity acting at low wave numbers is essential in that it progressively slows the energy cascade. Our model has shown that it is indeed possible to rapidly "thermostate" the cascade dynamics [12] from $k \sim k_c$ onwards when the cascade finally reaches a constant flow rate. Note that *thermostating* the energy cascade in the acceleration range, i.e., at $k \ll k_c$, produces strong backward perturbations on unforced modes. The nonlocality of triad interactions around k_c is thought to be responsible



FIG. 7. The intermittency exponent $\mu(r)$. The scale is normalized by the Taylor microscale $\lambda = \sqrt{15\nu v_{rms}^2/\varepsilon_{inj}}$.

for the adequate phase synchronization (coupling) of *ther*mostated modes with unforced modes and could provide a clue to the relevance of this model. Finally, including true viscosity at low wave numbers was already suggested in [3,6], where it was demonstrated that *proper* dissipation must act on low wave-number modes to be consistent with an energy cascade displaying an $E(k) \sim k^{-5/3}$ spectrum.

We thank B. Castaing for stimulating discussions. Computations were performed on the COMPAQ SC232 at the Centre d'Etude Atomique, Grenoble (France).

- U. Frisch, *Turbulence: the Legacy of Kolmogorov* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1995).
- [2] A. N. Kolmogorov, C. R. Acad. Sci. USSR 30, 301 (1941).
- [3] R. H. Kraichnan, J. Atmos. Sci. 33, 1521 (1976).
- [4] R.H. Kraichnan, Phys. Fluids 33(7), 1417 (1967).
- [5] F. Chilla and J.-F. Pinton, in *Advances in Turbulence VII*, edited by U. Frisch (Kluwer Academic, Dordrecht, 1998), pp. 211–214.
- [6] Z.-S. She and E. Jackson, Phys. Rev. Lett. 70, 1255 (1993).
- [7] C. R. Koudella, Ph.D. thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon (France), 1999.
- [8] V. Eswaran and S.B. Pope, Comput. Fluids 16(3), 257 (1998).
- [9] Z.-S. She et al., Phys. Rev. Lett. 70, 3251 (1993).
- [10] R. Benzi et al., Phys. Rev. E 48, 29 (1993).
- [11] N. Cao, S. Chen, and Z.-S. She, Phys. Rev. Lett. 76, 3711 (1996).
- [12] G. Gallavotti, Physica (Amsterdam) 105D, 163 (1997).

Catastrophe ultra-violette de la turbulence?

Aux petites échelles (sous-entendues petites devant l'échelle intégrale) l'agitation turbulente du fluide est intermittente. L'écoulement se compose d'une assemblée de structures tourbillonnantes intenses (associées à de brusques variations de la vitesse et de ses dérivées) séparées par des régions où le mouvement du fluide est plus calme et désordonné [51]. L'intermittence fait référence à ce comportement et rend compte de la prépondérance des zones agitées par rapport aux zones calmes [71].

Nous présentons dans ce chapitre une description quantitative de l'intermittence, de l'échelle intégrale aux plus petites échelles du mouvement turbulent. Nous montrons que l'intermittence augmente fortement aux très petites échelles, lorsque les effets dissipatifs deviennent importants. Ce comportement peut paraître contradictoire car l'on s'attendrait à ce que la dissipation adoucisse les fluctuations turbulentes, mais peut néanmoins s'expliquer en admettant que la dissipation n'agit pas de manière uniforme sur l'ensemble de l'écoulement. Les mouvements calmes et désordonnés sont fortement amortis, alors que la dissipation peine à «dominer les singularités» du champ de vitesse associées aux structures tourbillonnantes. Les effets dissipatifs renforcent donc le contraste entre les régions actives et les régions calmes, d'où une augmentation de l'intermittence. Ces arguments phénoménologiques seront repris ici de manière explicite et quantitative, dans le formalisme de cascade (étendu aux échelles dissipatives) présenté dans le chapitre d'introduction. Il s'agit d'un travail récent, mené en collaboration avec Bernard Castaing et Laurent Chevillard au laboratoire de physique de l'ENS-Lyon.

Dans la section 4.1, nous présenterons des résultats expérimentaux et numériques concernant l'intermittence aux petites échelles de la turbulence. Ensuite, nous montrerons qu'il est possible de décrire quantitativement l'augmentation de l'intermittence à petite échelle (section 4.2). La dépendance de ce phénomène vis à vis du nombre de Reynolds sera discutée. Enfin, les détails de cette étude seront présentés dans l'article (section 4.3):

• «On the rapid increase of intermittency in the near-dissipation range of fully developed turbulence», L. CHEVILLARD, B. CASTAING & E. LÉVÊQUE, 2004



FIG. 4.1 – Mesure de l'intermittence des fluctuations de vitesse $\delta u_{\parallel}(r)$ en fonction de l'échelle r, pour deux écoulements turbulents différents (données expérimentales et numériques). L'intermittence est définie par la quantité $\log(F(r)/3)$, où F(r) est le coefficient d'aplatissement de la distribution de $\delta u_{\parallel}(r)$.

4.1 L'intermittence aux petites échelles ; observations expérimentales et numériques

L'intermittence (à l'échelle r) est lié à une distribution non-Gaussienne de l'incrément (longitudinal) de vitesse $\delta u_{\parallel}(r)$. Elle peut ainsi être quantifiée par

$$\log\left(\frac{F(r)}{3}\right),\tag{4.1}$$

où F(r) représente le coefficient d'aplatissement de la distribution de $\delta u_{\parallel}(r)$:

$$F(r) \equiv \frac{\langle \delta u_{\parallel}(r)^4 \rangle}{\langle \delta u_{\parallel}(r)^2 \rangle^2}.$$
(4.2)

Pour une distribution Gaussienne centrée, F = 3: l'intermittence est nulle. Plus l'écart à la distribution Gaussienne est important, plus l'intermittence est grande.

Sur la figure 4.1, on peut observer différents comportements suivant l'échelle r :

- aux grandes échelles $r \gtrsim L$ (échelle intégrale): $F(r) \approx 3$. Le champ de vitesse turbulent est décorrélé spatialement; sa statistique est Gaussienne (très légèrement sous-Gaussienne). Il n'y a pas d'intermittence.
- aux échelles $r \leq L$, l'intermittence augmente linéairement avec $\log(1/r)$. Ce comportement linéaire se déduit de la dépendance en loi de puissance (vis à vis de l'échelle) des fonctions de structure de la vitesse :

$$\langle \delta u_{\parallel}(r)^p \rangle \sim r^{\zeta_p} \quad \text{pour } \eta \ll r \ll L.$$

Pour le coefficient d'aplatissement F(r), on obtient

$$F(r) \equiv \frac{\langle \delta u_{\parallel}(r)^4 \rangle}{\langle \delta u_{\parallel}(r)^2 \rangle^2} \sim r^{\zeta_F \equiv \zeta_4 - 2\zeta_2} \quad \text{avec} \quad \zeta_F \approx -0.1.$$
(4.3)

aux très petites échelles (dissipatives), on observe tout d'abord une augmentation rapide de l'intermittence puis une saturation. Cette saturation de l'intermittence est compatible avec la condition d'analycité du champ de vitesse :

$$\delta u_{\parallel}(\vec{x_0}, r) = u'_{\parallel}(\vec{x_0})r + o(r) \quad \text{pour} \quad r \to 0.$$
(4.4)

On obtient ainsi

$$\lim_{r \to 0} F(r) = \frac{\langle u_{\parallel}^{\prime 4} \rangle}{\langle u_{\parallel}^{\prime 2} \rangle^{2}} \quad \text{indépendant de } r.$$
(4.5)

L'augmentation brutale de l'intermittence à petite échelle définit une zone dissipative intermédiaire (*near-dissipation range*) entre la zone inertielle (*inertial range*) et la zone dissipative (*far-dissipation range*).

De nombreuses études ont porté sur la description de l'intermittence dans la zone inertielle [1]. L'intermittence aux échelles dissipatives a été beaucoup moins étudiée. On peut néanmoins mentionner la conjecture proposée par Kraichnan (1967), selon laquelle l'intermittence de l'amplitude des modes de Fourier de la vitesse divergerait à grand nombre d'onde [72]:

$$\frac{\langle E(k,t)^2 \rangle}{\langle E(k,t) \rangle^2} \to \infty \quad \text{pour} \quad k \to \infty.$$
(4.6)

E(k,t) désigne la densité spectrale d'énergie au nombre d'onde k. Cette conjecture n'a jamais pu être démontrée pour la solution des équations de Navier-Stokes (forcées). Ici, nous nous intéressons à l'intermittence des incréments de vitesse (grandeur dans l'espace physique). Nous observons que cette intermittence ne diverge pas lorsque l'échelle tend vers zéro, mais subit néanmoins une forte augmentation (figure 4.1).

et pour le modèle en couche?

Pour le modèle en couche de la turbulence (voir le chapitre 2), il s'agit d'examiner l'intermittence des fluctuations d'amplitude $|u_n(t)|$, où $u_n(t)$ représente l'excitation effective des modes de Fourier dans la couche de nombres d'onde : $k_n = k_0 2^n \le k < k_{n+1}$. Le coefficient d'aplatissement de la distribution de $|u_n(t)|$ est défini par

$$F_n \equiv \frac{\langle E_n^2 \rangle}{\langle E_n \rangle^2} \quad \text{avec} \quad E_n = \frac{1}{2} |u_n|^2.$$
 (4.7)

L'intermittence peut ainsi être mesurée par

$$\log\left(\frac{F_n}{F_0}\right).\tag{4.8}$$

n = 0 désigne la couche de l'injection d'énergie (la couche intégrale).

L'analogie avec les incréments de vitesse turbulente est donnée heuristiquement par la correspondance

$$|\delta u_{\parallel}(r)| \sim |u_n|$$
 avec $k_n \sim \frac{1}{r}$. (4.9)



FIG. 4.2 – Pour le modèle en couche, l'intermittence diverge lorsque n augmente (grands nombres d'onde) et ne sature pas : on peut parler de catastrophe ultra-violette (données numériques, E. Lévêque). Le nombre de Reynolds est ici défini par $Re = \sqrt{\langle |u_0|^2 \rangle}/k_0 \nu$ où $1/k_0$ est l'échelle du forçage extérieur.

On observe sur la figure 4.2 une augmentation rapide de l'intermittence dans la zone de dissipation mais il n'y a pas de saturation. C'est une différence majeure avec le comportement des incréments de vitesse. La conjecture de Kraichnan semble être satisfaite pour le modèle en couche.

4.2 Le cadre descriptif de la cascade, à toutes les échelles

Dans le formalisme de cascade proposé par Bernard Castaing (voir le chapitre d'introduction), l'intermittence est directement reliée aux fluctuations du multiplicateur $\beta(r/L)$:

$$|\delta u_{\parallel}(r)| = \beta(\frac{r}{L}) \cdot |\delta u_{\parallel}(L)| \quad \text{(au sens statistique)}.$$
(4.10)

En effet, si l'on admet que la distribution des incréments de vitesse à l'échelle intégrale est Gaussienne, on obtient à partir de l'équation précédente, en utilisant la définition (4.2) :

$$\log\left(\frac{F(r)}{3}\right) = \sum_{p \ge 2} C_p(\frac{r}{L}) \left(\frac{2^{2p}}{p!} - \frac{2^{p+1}}{p!}\right)$$
(4.11)

où $C_p(r/L)$ désigne le cumulant d'ordre p de la variable $\log \beta(r/L)$.

Dans la pratique, les cumulants de la série (4.11) diminuent très fortement lorsque p augmente (pour une échelle r fixée). À l'ordre dominant, on obtient ainsi

$$\log\left(\frac{F(r)}{3}\right) \approx 4C_2(\frac{r}{L})$$
 au premier ordre en cumulant. (4.12)



FIG. 4.3 – Schéma de l'évolution du propagateur G_{r,L_0} en fonction de l'échelle r; L_0 désigne l'échelle intégrale. Les effets dissipatifs étirent fortement la distribution G_{r,L_0} pour les amplitudes β telles que $\beta Re_*(r/L_0) < 1$; Re_* désigne le nombre de Reynolds (local).

L'intermittence est de cette manière décrite par la variance du propagateur $G_{r,L}()$:

$$C_2(\frac{r}{L}) \equiv \langle \log \beta(\frac{r}{L})^2 \rangle - \langle \log \beta(\frac{r}{L}) \rangle^2.$$
(4.13)

 $C_2(r/L)$ constitue une mesure alternative de l'intermittence, moins intuitive que $\log(F(r)/3)$ mais plus maniable d'un point de vue théorique.

les effets de la dissipation ; une approche qualitative

À l'échelle r, on peut considérer (de manière phénoménologique) que les effets dissipatifs amortissent les fluctuations $\delta u_{\parallel}(r)$ qui satisfont

$$\frac{\delta u_{\parallel}(r)r}{\nu} < R_*. \tag{4.14}$$

Cette condition revient à considérer que le nombre de Reynolds associé à $\delta u_{\parallel}(r)$ est inférieur à une constante (d'ordre un) R_* [73].

Dans notre formalisme, cette condition se ré-écrit

$$\beta(\frac{r}{L}) Re_* \left(\frac{r}{L}\right) < 1, \tag{4.15}$$

où Re_* désigne le nombre de Reynolds (local) de la turbulence.

Lorsque le propagateur $G_{r,L}$ pénètre dans la zone dissipative, la dissipation a pour effet d'étirer fortement l'aile gauche de la distribution (figure 4.3). La variance de la distribution augmente d'où une augmentation de l'intermittence.

les effets de la dissipation ; une approche quantitative

Nous avons quantifié l'augmentation de l'intermittence dans la zone dissipative (voir l'article présenté dans la section 4.3). Nous avons montré que la valeur de $C_2(r/L)$ est multipliée par un facteur universel (proche de 9/4) lorsque l'échelle r traverse la zone dissipative intermédiaire (figure 4.4). Ce résultat est intéressant car il ne fait appel à aucun paramètre ad hoc ; il repose uniquement sur l'hypothèse d'une cascade intermittente, progressivement dissipée en se propageant vers les petites échelles. On rejoint ici les arguments développés dans le chapitre précédent concernant l'origine de l'intermittence.



FIG. 4.4 – La variance du propagateur augmente rapidement dans la zone dissipative intermédiaire. Son amplitude est multipliée par un facteur universel (indépendant du nombre de Reynolds) proche de 9/4.



FIG. 4.5 – Le comportement des deux premiers cumulants du propagateur de la cascade : $C_1(r/L)$ et $C_2(r/L)$ en fonction de l'échelle r.

l'approche perturbative de l'intermittence :

À partir de l'équation (4.10), on peut établir analytiquement

$$\left\langle |\delta u_{\parallel}(r)|^{p} \right\rangle = \left\langle |\delta u_{\parallel}(L)|^{p} \right\rangle \exp\left(C_{1}\left(\frac{r}{L}\right)p + C_{2}\left(\frac{r}{L}\right)\frac{p^{2}}{2!} + \dots\right)$$
(4.16)

où $C_p(r/L)$ désigne le cumulant d'ordre p de la variable $\log \beta(r/L)$.

Ce développement permet d'aborder l'intermittence de manière perturbative :

 si l'on ne considère que le premier terme de la série, on retrouve la théorie de Kolmogorov (1941) en prenant

$$C_1(\frac{r}{L}) = \frac{1}{3}\log\left(\frac{r}{L}\right)$$
 dans la zone inertielle. (4.17)

- la première correction intermittente correspond au second terme de la série. Si l'on se limite à cette première correction (en supposant que $C_p = 0$ pour $p \ge 3$), on retrouve le modèle log-normal proposé par Kolmogorov et Obhoukov (1962), en prenant

$$C_1(\frac{r}{L}) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{9}{2}\mu \right) \log\left(\frac{r}{L}\right) \quad \text{et} \quad C_2(\frac{r}{L}) = \mu \log\left(\frac{r}{L}\right) \quad \text{dans la zone inertielle.}$$
(4.18)

Nous avons décrit le comportement des deux premiers cumulants $C_1(r/L)$ et $C_2(r/L)$ à toutes les échelles r (figure 4.5). Cette étude conduit à une représentation unifiée (à toutes les échelles) de l'intermittence (au premier ordre). La dépendance en nombre de Reynolds est décrite. Les détails de ce travail sont contenus dans l'article présenté dans la section 4.3.

au sujet de la catastrophe ultraviolette du modèle en couche :

Pour le modèle en couche, le spectre d'énergie $E_n \equiv \frac{1}{2}|u_n|^2$ décroît très fortement dans la zone dissipative (figure 2.2 dans le chapitre 2), de sorte que

$$\dot{E}_n \approx -\frac{k_n}{8}\Im(u_{n-2}u_{n-1}u_n) - 2\nu k_n^2 E_n \quad \text{pour} \quad k \gtrsim k_d.$$
(4.19)

En régime stationnaire, on obtient ainsi pour le coefficient d'aplatissement

$$\frac{-\langle \Im(u_{n-2}u_{n-1}u_n).E_n \rangle}{\langle \Im(u_{n-2}u_{n-1}u_n) \rangle^2}.$$
(4.20)

La divergence de l'intermittence à grand nombre d'onde impliquerait

$$\Im(u_{n-2}u_{n-1}u_n) \ll E_n$$
 et par conséquent $\theta_{n-2} + \theta_{n-1} + \theta_n \approx 0$ [π], (4.21)

en notant θ_n la phase de la variable (complexe) u_n . Ce résultat associerait explicitement la divergence de l'intermittence à une synchronisation de la phase des modes de Fourier; en accord avec les arguments exposés dans le chapitre 3.

4.3 Article présenté

4.3.1 «On the rapid increase of intermittency in the near-dissipation range of fully developed turbulence», L. CHEVILLARD, B. CASTAING & E. LÉVÊQUE

EPJ manuscript No. (will be inserted by the editor)

On the Rapid Increase of Intermittency in the Near-Dissipation Range of Fully Developed Turbulence

Laurent Chevillard^{1,2}, Bernard Castaing¹, and Emmanuel Lévêque¹

¹ Laboratoire de physique, CNRS, École normale supérieure de Lyon, France

 $^2\,$ Laboratoire Écoulements Géophysiques et Industriels, CNR
s, Université Grenoble 1, France

the date of receipt and acceptance should be inserted later

Abstract. Intermittency, measured as $\log (F(r)/3)$, where F(r) is the flatness of velocity increments at scale r, is found to rapidly increase as viscous effects intensify, and eventually saturate at very small scales. This feature defines a finite intermediate range of scales between the inertial and dissipation ranges, that we shall call near-dissipation range. It is argued that intermittency is multiplied by a universal factor, independent of the Reynolds number Re, throughout the near-dissipation range. The (logarithmic) extension of the near-dissipation range varies as $\sqrt{\log Re}$. As a consequence, scaling properties of velocity increments in the near-dissipation range strongly depend on the Reynolds number.

Key words. fully developed turbulence - intermittency - small-scale dissipative effects

PACS. 0 5.45.-a 47.27.-i 47.27.Eq 47.27.Gs 47.27.Jv

1 Introduction

Statistics of developed turbulence are commonly investigated by means of (longitudinal) velocity increments $\delta v(r)$ across a distance, or scale, r. At $r \approx L_0$, where L_0 represents the characteristic scale of the stirring forces (the integral scale of turbulence), fluid motions are statistically independent and the probability density function (pdf) of $\delta v(L_0)$ is found nearly Gaussian. At smaller scales, intrinsic non-linear fluid dynamics operate and turbulent motions become intermittent; fluid activity comes in intense locally-organized motions embedded in a sea of relatively quiescent and disordered eddies (see [1,2] for first numerical indications). As a consequence, the pdf of $\delta v(r)$ develops long tails and becomes strongly non-Gaussian. Deviations from the Gaussian shape may be quantified by the flatness, defined as

$$F(r) \equiv \frac{\langle \delta v(r)^4 \rangle}{\langle \delta v(r)^2 \rangle^2} \; .$$

For a centered Gaussian distribution F = 3; as long tails develop F increases. F(r)/3 may therefore be roughly thought of as the ratio of intense to quiescent fluid motions at scale r. In that sense, we shall assume in the following that log (F(r)/3) provides a quantitative measure of intermittency [3].

The normalized (to the Gaussian value) flatness is plotted as a function of the scale ratio r/L_0 for two turbulent

flows in Fig. 1. Experimentally, a particular attention has been paid to the size of the hot-wire probe and to the signal-to-noise ratio; small-scale velocity fluctuations are expected to be suitably resolved [4]. The "instantaneous Taylor hypothesis" (see [5] for details) has been used to estimate spatial velocity increments and reduce modulation effects [3,4]. Details about the (standard) numerical integration of the Navier-Stokes equations can be found in [6]. We observe at scales $r \ge L_0$, $F(r) \simeq 3$, in agreement with the picture of disordered fluid motions: There is no intermittency, since the flatness F(r) is independent of the scale r and (almost) equal to the Gaussian value F = 3. At smaller scales, $\dot{F}(r)$ displays a power-law dependence on r: Intermittency grows up linearly with $\log(1/r)$. This scaling behavior is inherent to the *inertial* (non-linear) fluid dynamics and refers to the so-called inertial range. The exponent $\zeta_F \simeq -0.1$ is found very consistent with already reported values for homogeneous and isotropic turbulence [7]. Interestingly, F(r) exhibits a rapid increase as viscous effects intensify, and eventually saturates at very small scales. This rapid increase of intermittency, which occurs over a range of scales that we shall call the neardissipation range, is the main concern of this article. We shall here argue how intermittency in the near-dissipation range is related to the build-up of intermittency in the inertial range; the Reynolds-number dependence of this phenomenon will be also addressed.

There has been a considerable amount of works on intermittency in the inertial range (see [9] for a review). Dissipation-range intermittency has received much less at-

Correspondence to: Laurent.Chevillard@ens-lyon.fr

 $\mathbf{2}$

L. Chevillard et al.: Intermittency in the near-dissipation range of turbulence



Fig. 1. Scale dependence of the flatness of longitudinal velocity increments for two different turbulent flows: (solid line) a turbulent jet ($R_{\lambda} = 380$) [8] and (dashed line) a direct numerical simulation ($R_{\lambda} = 140$) [6]. The control parameter Re_* is defined as Re/R_* , where Re denotes the (usual) Reynolds number; the empirical constant $R_* \approx 56$ [10, 11]. Appendix A is devoted to the (modified) Reynolds number Re_* .

tention. In 1967, Kraichnan conjectured "unlimited intermittency" for the modulus of velocity Fourier modes at very high wavenumbers [12]. Although no proof was explicitly established for the Navier-Stokes equations, Frisch and Morf provided in 1981 strong mathematical arguments (occurrence of complex-time singularities) [3] in support of Kraichnan's conjecture. Following a previous study carried out by Paladin and Vulpiani in 1987 [13], Frisch and Vergassola suggested in 1991 that multifractal (local) exponents h of velocity increments, $\delta v(r) \sim r^h$ are successively turned-off as viscous effects intensify [14]: As the scale r decreases, only the strongest fluctuations (low h) survive while the others are extinguished by the viscosity. This mechanism reinforces the contrast between intense and quiescent motions, and thus provides a phenomenological explanation for the increase of intermittency in the near-dissipation range. However, as the remaining intense motions concentrate on a smaller and smaller fraction of the volume, this approach again predicts "unlimited intermittency" for the velocity increments $\delta v(r)$, in the limit of vanishing scale r.

As mentioned above, our experimental and numerical data indicate that intermittency, measured by the flatness of velocity increments, does exhibit a blow up in the beginning of the dissipation range but eventually saturates in the far-dissipation range. At this point, it should be mentioned that a spurious limitation of intermittency may stem from a lack of accuracy (or resolution) in velocity measurements or numerical simulations. However, a special care has been taken here to reduce this effect [4]. In the following, we will argue that the observed saturation of intermittency is not an artefact, but refers to some peculiar properties of turbulence at very small, dissipative scales.

2 A multiplicative cascade description of intermittency

In the present study, the issue of intermittency in the dissipation range is reconsidered. The saturation of the flatness in the limit of vanishing scale r is recovered by assuming that the velocity field is smooth (regular) in quiescent-flow regions (as already suggested in [15,16]): $\delta v(r)$ is not zero but behaves as r in these regions; $\delta v(x, r) \approx r \partial_x v(x)$. This key assumption is here recast in a multiplicative approach of velocity-increment statistics along scales, as brought forward by Castaing *et al.* in [17]. We shall then demonstrate that it is possible to gain quantitative results, without ad hoc parameters, on dissipative-range intermittency: The amplification of intermittency in the near-dissipation range and the extension of the near-dissipation range are explicitly estimated as a function of the Reynolds number.

The build-up of intermittency along the whole range of excited scales is related to the distortion of the pdf of $\delta v(r)$. In order to account for this distortion, let us formally introduce a random independent *multiplier* $\beta(r/L_0)$, connecting the statistics of $\delta v(r)$ at scales r and L_0 :

$$\delta v(r) = \beta(\frac{r}{L_0}) \times \delta v(L_0) \quad \text{for } r \le L_0 . \tag{1}$$

The integral scale L_0 is taken as the reference scale. Eq. (1) should be understood in the statistical sense, i.e., the pdf of $\delta v(r)$ equals the pdf of $\beta(r/L_0) \times \delta v(L_0)$ (see [18] for a Markovian description). The multiplier $\beta(r/L_0)$ is considered as a positive random variable. This approach therefore restricts to $|\delta v(r)|$ or to the symmetric part of the pdf of $\delta v(r)$; the skewness effects are beyond the scope of the present description.

From Eq. (1), it can be established that

$$P_r(\delta v) = \int G_{r,L_0}(\log \beta) P_{L_0}(\frac{\delta v}{\beta}) \frac{\mathrm{d} \log \beta}{\beta}$$

where P_r and G_{r,L_0} denote respectively the pdf of $\delta v(r)$ and of $\log \beta(r/L_0)$. The pdf of $\delta v(L_0)$ may be considered as Gaussian, as mentioned in the introduction. Once P_{L_0} is known, P_r is fully determined by G_{r,L_0} .

The so-called propagator kernel G_{r,L_0} [4,17,19,20] is characterized by the whole set of coefficients $C_n(r/L_0)$, defined by the expansion

$$\langle (\beta(\frac{r}{L_0}))^p \rangle = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n(\frac{r}{L_0})\frac{p^n}{n!}\right) \text{ for all } p.$$
 (2)

By construction, $C_n(r/L_0)$ is the nth-order cumulant of the random variable $\log \beta(r/L_0)$. For our purpose, we shall only focus on the first two cumulants: The mean

$$C_1(\frac{r}{L_0}) \equiv \langle \log \beta(\frac{r}{L_0}) \rangle \tag{3}$$

and the variance

$$C_2(\frac{r}{L_0}) \equiv \langle \log^2 \beta(\frac{r}{L_0}) \rangle - \langle \log \beta(\frac{r}{L_0}) \rangle^2 .$$
 (4)

Experimentally, higher-order cumulants of $\log \beta(r/L_0)$ are found very small compared to $C_1(r/L_0)$ and $C_2(r/L_0)$ [19,20]. This motivates our main interest in the mean and variance of $\log \beta(r/L_0)$ [21]. However, the exact shape of the propagator kernel G_{r,L_0} is not relevant for the following analysis: Our arguments apply to the mean and the variance but does not require G_{r,L_0} being Gaussian. This point should be unambiguous. We shall demonstrate that considering the mean and the variance of G_{r,L_0} is valuable in order to describe the amplification of intermittency in the near-dissipation range.

What can be said about $C_1(r/L_0)$ and $C_2(r/L_0)$? First of all, it is straightforward to get from Eq. (1) and Eq. (2):

$$\langle |\delta v(r)|^p \rangle = K_p \sigma^p \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n(\frac{r}{L_0}) \frac{p^n}{n!}\right)$$

by assuming that $\delta v(L_0)$ is a zero-mean gaussian variable of variance σ^2 (i.e., $\langle |\delta v(L_0)|^p \rangle = K_p \sigma^p$).

– In the inertial range,

$$\langle |\delta v(r)|^p \rangle = K_p \sigma^p \left(\frac{r}{L_0}\right)^{\zeta_p}$$
 (5)

This is the *postulate* of universal power-law scalings [9,22]. It follows that $C_1(r/L_0)$ and $C_2(r/L_0)$ behave as linear functions of $\log(r/L_0)$:

$$C_1(\frac{r}{L_0}) = c_1 \log(\frac{r}{L_0}) \quad \text{and} \\ C_2(\frac{r}{L_0}) = c_2 \log(\frac{r}{L_0}) \quad \text{in the inertial range,}$$
(6)

where c_1 and c_2 are universal constants [19]. The departure from the Kolmogorov's linear scaling law $\zeta_p = p/3$ is directly related to $c_2 < 0$:

$$\zeta_p = c_1 p + c_2 \frac{p^2}{2} + \cdots$$

In our framework, the build-up of intermittency (along the inertial range) is related to the increasing width of G_{r,L_0} with the decreasing scale r, stating that the second-order cumulant $C_2(r/L_0)$ increases as r decreases.

- In the far-dissipative range, velocity increments are proportional to the scale separation r, which leads to

$$C_1(\frac{r}{L_0}) = \log(\frac{r}{L_0}) + C_1^{\text{diss.}}$$
 and
 $C_2(\frac{r}{L_0}) = C_2^{\text{diss.}}$ in the far-dissipation range.

The constants $C_1^{\text{diss.}}$ and $C_2^{\text{diss.}}$ a priori depend on the Reynolds number, here defined as

$$R_e = \frac{\sigma L_0}{\nu},\tag{7}$$

where L_0 is the integral scale pointed out by Eq. (6), σ denotes the standard deviation of $\delta v(L_0)$ and ν is the kinematic molecular viscosity.

– Finally, the inertial-range and far-dissipation-range behaviors of $C_1(r/L_0)$ and $C_2(r/L_0)$ match in the neardissipation range. We will see that this matching is (very) peculiar.



Fig. 2. Sketch of the distortion of the pdf of $\log \beta(r/L_0)$ along scales r, respectively in the inertial, near-dissipation and fardissipation ranges. The width of the pdf increases rapidly when crossing the near-dissipation range from right to left; with decreasing scale r.

3 The near-dissipation range

Following Paladin and Vulpiani [13], one considers that viscous effects at a given scale r only affect the fluctuations of $\delta v(r)$, for which the *local Reynolds number* is smaller than a certain constant R_* . In the classical phenomenology of turbulence R_* is fixed to unity [9], but for our purpose, R_* is kept as an empirical constant.

In our multiplicative cascade framework, the previous hypothesis writes

$$\frac{\sigma\beta(\frac{r}{L_0})r}{\nu} \le R_*$$

This condition is equivalent to

$$\beta(\frac{r}{L_0})Re_*\left(\frac{r}{L_0}\right) \le 1$$
, (8)

where Re_* denotes the (modified) Reynolds number

$$Re_* \equiv \frac{R_e}{R_*} \ . \tag{9}$$

The subscript * indicates that R_* is not a priori equal to unity; this point is clarified in the Appendix A.

The propagator kernel G_{r,L_0} is sketched in Fig. 2 for various scales r (the integral scale L_0 is fixed) as a function of $\log(\beta Re_*r/L_0)$: G_{r,L_0} moves from right to left as the scale r decreases. At a given scale r, fluctuations $\beta(r/L_0)$ which satisfy Eq. (8) undergo dissipative effects. As viscosity strongly depletes these affected fluctuations, a significant stretching of the *left* tail of G_{r,L_0} is expected (see Fig. 2). Viscous effects then lead to a strong distortion of G_{r,L_0} ; a significant increase of $C_2(r/L_0)$ follows. This argument provides a qualitative explanation of the increase of intermittency due to (non-uniform) viscous effects. Within this picture, the near-dissipation range may be viewed as the range of scales r marked by the entering of G_{r,L_0} in the viscous domain, and the leaving of G_{r,L_0} from the inertial domain (see also Fig. 3).

In order to pursue a more quantitative analysis, an explicit definition of the near-dissipation range is required. To do so, let us introduce the two characteristic scales η_+ and η_- (see Fig. 3) given respectively by

$$C_1(\frac{\eta_+}{L_0}) + \log(Re_*\frac{\eta_+}{L_0}) = \sqrt{C_2(\frac{\eta_+}{L_0})}$$
(10)

L. Chevillard et al.: Intermittency in the near-dissipation range of turbulence

and



Fig. 3. The near-dissipation range is given by $\eta_{-} < r < \eta_{+}$. The characteristic scales η^{+} and η^{-} are defined by Eqs. (10) and (11): The scale η^{+} may be viewed as the smallest limiting scale for which the propagator G_{r,L_0} is not affected by viscous effects; only non-linear dynamics prevail at $r > \eta^{+}$. The scale η^{-} may be viewed as the largest limiting scale for which the propagator G_{r,L_0} does not undergo non-linear effects; only viscous dynamics prevail at $r < \eta^{-}$.

and
$$C_1(\frac{\eta_-}{L_0}) + \log(Re_*\frac{\eta_-}{L_0}) = -\sqrt{C_2(\frac{\eta_-}{L_0})}$$
. (11)

According to our previous considerations, η_+ may be seen as the scale marking the entering of G_{r,L_0} in the viscous domain, and η_- as the scale marking the leaving of G_{r,L_0} from the inertial domain. In other words, $\eta_- < r < \eta_+$ may be considered as the near-dissipation range; this will be our (explicit) definition.

It is natural to match the inertial-range and dissipationrange behaviors of $C_1(r/L_0)$ at the characteristic scale η , for which the propagator kernel, approximately centered around its mean value, extends equally over the inertial and viscous domains (see Figs. 2 and 3). This statement writes

$$\left\langle \log \left(\beta(\frac{\eta}{L_0}) Re_*\left(\frac{\eta}{L_0}\right) \right) \right\rangle = 0 ,$$

and yields

$$C_1(\frac{\eta}{L_0}) + \log(Re_*\frac{\eta}{L_0}) = 0$$
.

By assuming that the intermittency correction on c_1 is very small, so that $c_1 \approx 1/3$ according to Kolmogorov's theory [22], one obtains that η coincides with the notorious Kolmogorov's scale η_K , based on the modified Reynolds number Re_* :

$$\eta = \eta_K = L_0 (Re_*)^{-3/4} . \tag{12}$$

Furthermore, $C_1^{\text{diss.}} = 1/2 \log Re_*$. From Eqs. (10), (11) and (12), it follows

$$\frac{\sqrt{C_2(\frac{\eta_+}{L_0})}}{\sqrt{C_2(\frac{\eta_-}{L_0})}} = \frac{\frac{4}{3}\log(\frac{\eta_+}{L_0}) + \log Re_*}{-2\log(\frac{\eta_-}{L_0}) - \frac{3}{2}\log Re_*} = \frac{\frac{4}{3}\log(\frac{\eta_+}{\eta})}{2\log(\frac{\eta_-}{\eta_-})} ,$$

and by considering that G_{η_-,L_0} results from the distortion of $G_{\eta_+,L_0},$ one obtains (see Appendix B for a kinematic proof)

$$2\sqrt{C_2(\frac{\eta_+}{L_0})} \approx \frac{4}{3}\log(\frac{\eta_+}{\eta_-})$$
 (13)

$$2\sqrt{C_2(\frac{\eta_-}{L_0})} \approx 2\log(\frac{\eta_+}{\eta_-}) . \tag{14}$$

These results finally yield $\log(\eta_+/\eta) = \log(\eta/\eta_-)$ and

$$\eta = \sqrt{\eta_+ \eta_-}$$

In logarithmic coordinates the dissipative scale η , given by Eq. (12), lies at the center of the near-dissipation range: η separates the inertial range and the far-dissipation range, as originally proposed by Kolmogorov. This is a first result concerning the near-dissipation range.



Fig. 4. Scaling behavior of $C_2(r/L_0)$ for the turbulent jet and the numerical simulation. In the inertial range, $C_2(r) = c_2 \log(r/L_0)$ with $c_2 \approx -0.025$. The two dissipative scales η_+ and η_- , defined by Eqs. (10) and (11), are indicated for both flows. The "amplification law" between $C_2(\eta_-/L_0)$ and $C_2(\eta_+/L_0)$ is very well satisfied. We observe also that the Kolmogorov's dissipative scale η , given by Eq. (12), lies approximatively at the center of the near-dissipation range: $\eta_- < r < \eta_+$.

4 The amplification law

From the above computation, one can derive the "amplification law"

$$C_2(\frac{\eta_-}{L_0}) = \frac{9}{4} C_2(\frac{\eta_+}{L_0}) , \qquad (15)$$

which characterizes the increase of intermittency in the near-dissipation range. The 9/4 factor relies on the (reasonable) approximation that $c_1 \approx 1/3$. This does not mean at all that intermittency is ignored in our approach; it is just assumed here that the value of the parameter c_1 , entering in the description, can be considered very close to its Kolmogorov value. Anyhow, the same reasoning could be pursued by keeping c_1 as a free parameter. In that case, the multiplicative factor would express as $4/(1+c_1)^2$. Experimentally, one finds $c_1 = 0.37 \pm 0.01$ [17].

L. Chevillard et al.: Intermittency in the near-dissipation range of turbulence

Interestingly, the amplification of intermittency in the near-dissipation range is universal, independent of the (very high) Reynolds number. Let us also remark that this "amplification law" may serve as a useful benchmark for the (experimental or numerical) resolution of the finest velocity fluctuations; one should be able to differentiate (true) viscous damping and spurious filtering (see [23] for such a debate).



Fig. 5. Sketch of the scaling behavior of $C_1(r/L_0)$ and $C_2(r/L_0)$ at high Reynolds number.

5 A unified picture of intermittency

At very high Reynolds number, $\sqrt{C_2(r/L_0)}$ becomes negligible compared to log Re_* in the near-dissipation range. It follows from Eqs. (10), (11) and the "amplification law" that $\eta_+ \approx \eta_- \approx \eta$ at leading order in log Re_* . This yields

$$C_2(\frac{\eta_-}{L_0}) - C_2(\frac{\eta_+}{L_0}) \propto \log Re_*$$

and
$$C_1(\frac{\eta_-}{L_0}) - C_1(\frac{\eta_+}{L_0}) \approx -\frac{2}{3}\log(\frac{\eta_+}{\eta_-})$$

with
$$\log(\frac{\eta_+}{\eta_-}) \propto \sqrt{\log Re_*} .$$
(16)

These behaviors are sketched in Fig. 5. One obtains that the (logarithmic) extension of the near-dissipation range ($\sim \sqrt{\log Re_*}$) becomes negligible compared to the extension of the inertial range ($\sim \log Re_*$). This is consistent with the tendency observed in Figs. 1 and 4. At this point, it should be emphasized that η_+ can not be assimilated to the Taylor's microscale λ . Indeed, $\log(\eta_+/\eta) \propto \sqrt{\log Re_*}$ while on the contrary $\log(\lambda/\eta) \propto \log Re_*$.

Velocity increments follow a log-infinitely divisible law [24,25] in the inertial range, since all cumulants are proportional to a same function of the scale $-C_p(r/L_0) = c_p \log(r/L_0)$ for all p — but this log-infinitely divisibility can not pertain in the near-dissipation range, according to the sketch in Fig. 5.

Intermittency has been related to $\log(F(r)/3)$ in the beginning. Using Eq. (1), one can derive the exact equation

$$\log\left(\frac{F(r)}{3}\right) = \sum_{p \ge 2} C_p(\frac{r}{L_0}) \left(\frac{2^{2p}}{p!} - \frac{2^{p+1}}{p!}\right), \quad (17)$$

where $C_p(r/L_0)$ is the *p*-th order cumulant of $\log \beta(r/L_0)$. At leading order, this yields

$$\log\left(\frac{F(r)}{3}\right) = 4C_2(\frac{r}{L_0}) + \cdots, \qquad (18)$$

which suggests that $\log(F(r)/3)$ and $C(r/L_0)$ should behave in a very comparable way. Fig. 1 and Fig. 4 are indeed very similar. One may thus consider that $C_2(r/L_0)$ provides an alternative measure of intermittency, less intuitive than $\log(F(r)/3)$ but physically more tractable (as demonstrated by this study). A specific test of Eq. (18) is provided in Fig. 6.



Fig. 6. We observe that Eq. (18) is well satisfied in the inertial range (for the turbulent jet and the numerical simulation). A small departure is observed at small scales, when viscous effects intensify. This departure may be attributed to the growing of cumulants of order $p \geq 3$, neglected in Eq. (18).

Before concluding this study, let us mention that it is quite direct to generalize the previous analysis to *N*-order velocity increments:

$$\delta^{(1)}v(r) = v(x+r) - v(x),$$

 $\mathbf{6}$

L. Chevillard et al.: Intermittency in the near-dissipation range of turbulence

$$\delta^{(2)}v(r) \equiv v(x+r) - 2v(x+\frac{r}{2}) + v(x),$$
 etc

Inertial-range scalings $\langle |\delta^{(N)}v(r)|^p \rangle \sim r^{\zeta_p}$ are preserved (as argued in [19]) but $\langle |\delta^{(N)}v(r)|^p \rangle \sim r^{Np}$ in the fardissipative range. As a result, the definition of the neardissipation is unchanged but the "amplification law" becomes

$$C_2^{(N)}(\frac{\eta_-}{L_0}) = \frac{9}{4} \left(\frac{(N+1)}{2}\right)^2 C_2^{(N)}(\frac{\eta_+}{L_0}).$$
(19)

The amplification factor depends on the order N of the velocity increment. This feature allows us to discriminate the inertial range and the near-dissipation range: Inertial-range scalings do not depend on N, while on the opposite, near-dissipation-range scalings depend drastically on N. Finally, the amplification factor in Eq. (19) diverges with N, tending toward Kraichnan's view of unlimited intermittency (for the fluctuations of velocity Fourier modes) as $N \to \infty$ [12].

6 Conclusion

A unified picture of velocity-increment intermittency, from the integral scale to the smallest (excited) scales of motion, is proposed. It is explicitly stated how far-dissipation range and inertial-range intermittencies match in the neardissipation range. Especially, a universal "amplification law" determines how intermittency of velocity gradients is linked to the build-up of intermittency in the inertial range. The results are found in good agreement with our experimental and numerical observations.

Beyond these precise results, this study indicates that there are some peculiar and interesting physics around the Kolmogorov's dissipative scale of turbulence. Such issue may be of great importance, for instance, in the modelling of mixing properties of turbulence, which mainly rely on the behavior of gradient fields [26].

Finally, we would like to insist on the fact that this description leads to predictive results which could be used as tests for the suitable resolution of (very) small-scale fluctuations, to distinguish "probe effects" and true viscous damping. Relations between this study and the so-called property of *Extended Self-Similarity* [27] should deserve some interests as well.

We thank C. Baudet, A. Naert, B. Chabaud and coworkers for providing us the experimental data. We are grateful to J.-F. Pinton and A. Arneodo for critical comments. Numerical simulations were performed on a IBM SP3 supercomputer at the CINES, Montpellier (France).

A The (modified) Reynolds number Re_{*}

The empirical constant R_* , which is abusively fixed to unity in the classical phenomenology of turbulence [9], may be linked to the Kolmogorov's constant c_K (see [28] and references therein). In Kolmogorov's 1941 theory, c_K can be defined through the second-order velocity structure function:

$$\langle (\delta v(r))^2 \rangle = c_K \langle \epsilon \rangle^{2/3} r^{2/3} ,$$

where $\langle \epsilon \rangle$ denotes the mean dissipation rate. Here, intermittency corrections are obviously omitted. By the use of Eq. (5), one can write

(19)
$$\langle (\delta v(r))^2 \rangle = \sigma^2 \left(\frac{r}{L_0}\right)^{2/3} ,$$

which yields

$$c_K = \frac{\sigma^2}{\langle \epsilon \rangle^{2/3} L_0^{2/3}} . \tag{20}$$

In this *monofractal* description, the near-dissipation range is degenerate and reduces to the Kolmogorov's scale η_K . The second-order moment of velocity gradient expresses as

$$\langle (\partial_x v)^2 \rangle = \frac{\langle (\delta v(\eta_K))^2 \rangle}{(\eta_K)^2} .$$
 (21)

By assuming homogeneous and isotropic turbulence, the mean dissipation rate writes $\langle \epsilon \rangle = 15\nu \langle (\partial_x v)^2 \rangle$. By combining the Eqs. (20) and (21), together with the definition of η_K given by Eq. (12), one gets

$$c_K = \left(\frac{R_*}{15}\right)^{2/3}$$
 or $R_* = 15c_K^{3/2}$. (22)

Eq. (22) indicates that R_* is eventually much greater than unity. Following [10], the empirical value $R_* \approx 56$ corresponds to $c_K \approx 2.4$. This value is in good agreement with experimental and numerical estimations $c_K \approx 2$ [28].

B Kinematic proof of Eqs. (13) and (14)

We provide a kinematic proof of Eqs. (13) and (14) with the help of Fig. 7:

— on the one hand, one derives from Eq. (10) that the distance

$$x_A - x_{A'} = 2\sqrt{C_2(\frac{\eta_+}{L_0})}$$
.

— on the other hand, the "position" of the point M, defined by the standard deviation around the mean, moves from A to A' within the inertial domain (see Fig. 7) with a typical "velocity"

$$\frac{dx_M}{d\log r/L_0} \approx (c_1 + 1),$$

as r decreases from η_+ to η_- . Within this representation (see [21] for details), the variable $\log r/L_0$ may be viewed as "time". The correction due to the change of width of G_{r,L_0} is neglected. Indeed, this correction expresses as $1/2\sqrt{c_2/\log(r/L_0)}$ and can therefore be omitted in the near-dissipation range. One then gets

$$x_A - x_{A'} \approx \frac{4}{3} \log(\frac{\eta_+}{\eta_-})$$
 by taking $c_1 = \frac{1}{3}$.



Fig. 7. When the scale r decreases, the propagator kernel G_{r,L_0} moves from right to left (σ denotes the standard deviation). At scale $r = \eta_+$, the points A and B are defined by the standard deviation around the mean. As r decreases from η_+ to η_- , the points A and B move respectively to A' (within the inertial domain) and to B' (within the viscous domain).

Eq. (13) follows immediately. Eq. (14) can be demonstrated in a similar way by considering the motion of the point M moving from B to B' within the viscous domain.

References

- A. Vincent and M. Meneguzzi, J. Fluid Mech. 225, (1991) 1-20
- Z.-S. She, E. Jackson, and S. A. Orszag, Proc. R. Soc. London A 434, (1991) 101
- U. Frisch, and R. Morf, Phys. Rev. A 23 (5), (1981) 2673
 O. Chanal, E. Chabaud, B. Castaing, and B. Hébral, Eur.
- Phys. J. B 17, (2000) 301
 5. J.-F. Pinton and R. Labbé, J. Phys. II France 4, (1994) 1461
 6. E. Leveque and C. Koudella, Phys. Rev. Lett. 86, (2001)
- 4033 2. N. Goo, S. Chen, and Z. S. Sha, Phys. Rev. Lett. **76** (1006)
- N. Cao, S. Chen, and Z.-S. She, Phys. Rev. Lett. 76, (1996) 3711
- G. Ruiz-Chavarria, C. Baudet, and S. Ciliberto, Phys. Rev. Lett. 74, (1995) 1986
- 9. U. Frisch, *Turbulence: the legacy of Kolmogorov*, (Cambridge University Press, England, 1995)
- B. Castaing, Y. Gagne, and M. Marchand, Physica D 68, (1993) 387
- 11. D. Lohse, Phys. Rev. Lett. 73 (24), (1994) 3223
- 12. R. H. Kraichnan, Phys. of Fluids 10, (1967) 2080
- 13. G. Paladin and A. Vulpiani, Phys. Rev. A 35, (1987) 1971
- 14. U. Frisch and M. Vergassola, Europhys. Lett. 14, (1991)
- 439
- 15. M. Nelkin, Phys. Rev. A 42(12), (1990) 7226
- 16. C. Meneveau, Phys. Rev. E **54**, (1996) 3657
- B. Castaing, Y. Gagne, and E. Hopfinger, Physica D 46, (1990) 177
- P.-O. Amblard and J.-M. Brossier, Eur. Phys. J. B 12, (1999) 579
- A. Arneodo, S. Manneville, and J.-F. Muzy, Eur. Phys. J. B 1, (1998) 129
- J. Delour, J.-F. Muzy, and A. Arneodo, Eur. Phys. J. B
 23, (2001) 243
- 21. L. Chevillard, PhD Thesis, Bordeaux I University, (2004) Available online at http://tel.ccsd.cnrs.fr
- 22. A. N. Kolmogorov, C. R. Acad. Sci. USSR **30**, (1941) 301

 V. Emsellem, L. P. Kadanoff, D. Lohse, P. Tabeling, and Z. J. Wang, Phys. Rev. E 55, (1997) 2672

- 24. Y. Saito, Phys. Soc. Japan **61**, (1992) 403
- 25. E. A. Novikov, Phys. Rev. E 50, (1994) 3303
- 26. L. Chevillard, S. G. Roux, E. Leveque, N. Mordant, J.-
- F. Pinton, and A. Arneodo, Phys. Rev. Lett. **91**, (2003) 214502
- R. Benzi, S. Ciliberto, R. Tripiccione, C. Baudet, F. Massaioli, and S. Succi, Phys. Rev. E 48, (1993) R29
- 28. P. K. Yeung and Y. Zhou, Phys. Rev. E 56, (1997) 1746

Approche Lagrangienne de l'intermittence

Il s'agit ici d'étudier le mouvement des particules de fluide transportées par l'écoulement turbulent [24] :

– une particule, initialement au point \vec{a} au temps t_0 , a pour position au temps t:

$$\vec{x}(\vec{a},t) = \vec{a} + \int_{t_0}^t \vec{v}(\vec{a},t')dt',$$
(5.1)

où $\vec{v}(\vec{a},t')$ représente la vitesse turbulente Lagrangienne de la particule au temps t', le long de sa trajectoire.

– la vitesse Lagrangienne $\vec{v}(\vec{a},t)$ se déduit du champ Eulérien de vitesse par

$$\vec{v}(\vec{a},t) = \vec{u}\left(\vec{x}(\vec{a},t),t\right).$$
(5.2)

De nombreux problèmes concrets s'expriment dans un formalisme Lagrangien [74] (thèse de Nicolas Mordant). Il s'agit par exemple de la dispersion de polluants par un écoulement fluide : une usine émet un polluant à un instant et un temps donnés, il est dispersé par la turbulence atmosphérique et on l'on veut savoir où il se propagera à un instant ultérieur. Il en est de même pour le mélange de deux produits : on considère la position de deux particules de fluide initialement infiniment proches, quelle sera leur position relative après un certain laps de temps? Quelle est l'efficacité de mélange, d'homogénéisation, de l'écoulement turbulent? Toutes ces questions se posent en terme de suivi de particules [75] (livre sur le sujet). Le mécanisme du transfert d'énergie vers les petites échelles, qui est au coeur du problème de la turbulence, se formule également en terme de suivi de particules. Il s'agit de comprendre comment un tourbillon, transporté par les grandes structures de l'écoulement, se déforme pour transmettre son énergie à plus petite échelle.

Récemment, une technique de mesure mise au point par Nicolas Mordant et Jean-François Pinton au laboratoire de physique de l'ENS-Lyon, a ouvert un nouveau champ d'investigation des trajectoires Lagrangiennes. De petites particules solides sont injectées dans un écoulement turbulent (écoulement de Von-Karman) pour individualiser les particules de fluide, et le suivi de ces particules est enregistré par une mesure Doppler ultra-sonore [76]. Pour ma part, j'ai conduit des simulations numériques (directes) des trajectoires Lagrangiennes de la solution des équations de Navier-Stokes (en régime de turbulence homogène et isotrope). Ces études numériques ont permis de confirmer les résultats expérimentaux, puis ont contribué à approfondir notre étude de la dynamique Lagrangienne. Les résultats obtenus sont exposés dans ce chapitre. Nous présenterons l'outil numérique qui nous a permis d'étudier la dynamique des trajectoires Lagrangiennes dans la section 5.1. Ensuite, nous discuterons l'existence de corrélations à longue portée dans la dynamique Lagrangienne et le lien entre ces corrélations et le phénomène d'intermittence. Un modèle de marche aléatoire sera proposé pour décrire le mouvement des particules de fluide (section 5.2). Enfin, deux articles seront présentés dans la section 5.3.

5.1 L'outil numérique

Les équations de Navier-Stokes sont intégrées par une méthode pseudo-spectrale dans une boîte cubique de résolution 256³ avec des conditions périodiques dans les trois directions. La solution est intégrée en temps dans l'espace spectral; le terme non-linéaire est calculé dans l'espace physique. Ce code fait appel à de nombreuses transformées de Fourier, directes et inverses, dans les trois directions de l'espace. Pour le schéma temporel, le terme dissipatif est intégré directement; le terme non-linéaire est avancé par un schéma du second-ordre de type leap-frog.

Les trajectoires Lagrangiennes sont intégrées dans le temps par un schéma Runge-Kutta du second ordre [77] :

$$\vec{x}(t_{n+1}) = \vec{x}(t_n) + \frac{1}{2}\Delta t \left(\vec{u} \left(\vec{x}(t_n), t_n \right) + \vec{u} \left(\vec{x^*}(t_{n+1}), t_{n+1} \right) \right)$$
(5.3)

avec

$$\overline{x^{*}}(t_{n+1}) = \vec{x}(t_{n}) + \Delta t \vec{u} \left(\vec{x}(t_{n}), t_{n} \right).$$
(5.4)

Une interpolation tridimensionnelle par spline cubique est utilisée pour estimer la vitesse $\vec{u}(\vec{x}(t),t)$, le gradient de pression $\vec{\nabla} p(\vec{x}(t),t)$, le laplacien de la vitesse $\Delta \vec{u}(\vec{x}(t),t)$ et toutes les dérivées spatiales de la vitesse à partir des valeurs connues du champ de vitesse aux noeuds du maillage. En pratique, 10.000 trajectoires de fluide ont été intégrées sur environ 20 temps de retournement des grandes échelles.

Le code a été écrit en Fortran 77 et s'exécute en parallèle (mémoire distribuée) sur un nombre de processus qui peut être choisi arbitrairement. La bibliothèque des routines de communication entre les processus est MPI (http://www-unix.mcs.anl.gov/mpi). Enfin, la bibliothèque de transformée de Fourier rapide est FFTW (http://www.fftw.org).

Cette étude numérique a bénéficié d'une attribution de 20.000 heures de calcul (pour les deux années 2002 et 2003) sur les calculateurs parallèles IBM SP3 et SP4 du CINES à Montpellier.

5.2 Au sujet des corrélations Eulériennes et Lagrangiennes de vitesse

Le mécanisme spatio-temporel du transfert d'énergie des grandes vers les petites échelles est au coeur du problème de la turbulence. Dans le formalisme Eulérien, l'objet central des études statistiques est la fonction de corrélation de la vitesse : $\langle \vec{u}(\vec{x},t).\vec{u}(\vec{x}',t') \rangle$. Cette fonction caractérise la distribution de l'énergie cinétique turbulente en nombre d'onde et en fréquence (voir le chapitre d'introduction).

Le formalisme Lagrangien permet d'aborder le problème sous un angle différent, en caractérisant les corrélations spatio-temporelles de la vitesse des particules de fluide. Les corrélations Eulériennes et Lagrangiennes sont très différentes et ne se déduisent pas trivialement les unes des autres. L'élaboration d'une description unifiée de la turbulence dans ses deux formulations, Eulérienne et Lagrangienne, est un nouveau défi théorique qui motive les travaux présentés dans ce chapitre.

À partir des équations de Navier-Stokes, on peut établir que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \vec{\nabla}_{\vec{x}}^2\right) \left\langle \vec{u}(\vec{x},t) . \vec{u}(\vec{x}',t') \right\rangle =$$

$$-\left\langle \vec{u}(\vec{x},t).\overrightarrow{\nabla}_{\vec{x}} \ \vec{u}(\vec{x},t).\vec{u}(\vec{x}',t') \right\rangle \quad - \quad \left\langle \vec{u}(\vec{x}',t').\overrightarrow{\nabla}_{\vec{x}} p(\vec{x},t) \right\rangle + \left\langle u(\vec{x}',t').\vec{f}(\vec{x},t) \right\rangle. \tag{5.5}$$

Par homogénéité et incompressibité du champ de vitesse (Eulérien), le terme de pression disparaît : $\langle \vec{u}(\vec{x}',t').\vec{\nabla}_{\vec{x}}p(\vec{x},t)\rangle = 0$. Le gradient pression ne contribue pas directement à l'évolution de la fonction de corrélation de la vitesse turbulente. Le mécanisme du transfert d'énergie est piloté par le terme non-linéaire d'advection

$$-\left\langle \vec{u}(\vec{x},t).\overrightarrow{\nabla}_{\vec{x}} \ \vec{u}(\vec{x},t).\vec{u}(\vec{x}',t')\right\rangle.$$

Dans le formalisme Lagrangien, c'est le contraire. Le terme d'advection ne produit pas de contribution à la décroissance de la fonction de corrélation. C'est le gradient de pression, responsable de l'accélération de la particule, qui décorrèle la vitesse Lagrangienne. Nous allons maintenant examiner ce point plus en détail.

Une vitesse turbulente généralisée $\vec{u}(\vec{x},t|r)$ est définie comme la vitesse mesurée au temps r, de la particule qui passe par \vec{x} à l'instant t [78]. On remarque que

- $-\vec{u}(\vec{x},t|t) = \vec{u}(\vec{x},t)$ correspond à la vitesse Eulérienne.
- $-\vec{u}(\vec{a},t_0|t) = \vec{v}(\vec{a},t)$ où t_0 est le temps initial, représente la vitesse Lagrangienne au temps t de la particule initialement en \vec{a} .

Les équations qui gouvernent la dynamique de la vitesse généralisée $\vec{u}(\vec{x},t|r)$ sont

- d'une part

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}(\vec{x},t|t).\vec{\nabla}\right)\vec{u}(\vec{x},t|r) = 0,$$
(5.6)

qui signifie que pour tout couple (\vec{x},t) appartenant à la même trajectoire, la vitesse $\vec{u}(\vec{x},t|r)$ est la même.

- d'autre part, les équations de Navier-Stokes forcées

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}(\vec{x},t|t).\vec{\nabla}\right)\vec{u}(\vec{x},t|t) = -\vec{\nabla}p(\vec{x},t) + \nu\Delta\vec{u}(\vec{x},t|t) + \vec{f}(\vec{x},t)$$
(5.7)

pour la vitesse Eulérienne $\vec{u}(\vec{x},t|t)$.

Le tenseur de corrélation (d'ordre deux) de la vitesse généralisée est défini par

$$U_{ij}(\vec{x},t|r;\vec{x}',t'|r') \equiv \langle u_i(\vec{x},t|r)u_j(\vec{x}',t'|r') \rangle.$$
(5.8)

Dans le cadre d'une turbulence homogène et isotrope, on s'intéresse plus particulièrement au tenseur $U_{ij}(\vec{x},t|t;\vec{x}',t|r)$ (voir figure 5.1). Ce tenseur est représenté dans l'espace de Fourier par la fonction de corrélation Lagrangienne

$$U(k,t|r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-\vec{k}.(\vec{x}-\vec{x}')} P_{ij}(\vec{k}) U_{ij}(\vec{x},t|t;\vec{x}',t|r) d(\vec{x}-\vec{x}').$$
(5.9)

 P_{ij} est l'opérateur de projection sur l'espace des fonctions de divergence nulle. La densité spectrale d'énergie (en nombre d'onde) est donnée par $E(k,t) = 2\pi k^2 U(k,t|t)$ [78].



FIG. 5.1 – En turbulence homogène et isotrope, on s'intéresse plus particulièrement aux corrélations entre les vitesses généralisées aux points $(\vec{x},t|t)$ et $(\vec{x}',t|r)$.

À partir des équations dynamiques précédentes, on peut établir

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \vec{\nabla}_{\vec{x}}^{2}\right) U_{ij}(\vec{x},t|t;\vec{x}',t|r) =$$

$$-\left\langle \left[u_{k}(\vec{x},t|t) - u_{k}(\vec{x}',t|t)\right] \frac{\partial u_{i}(\vec{x},t|t)u_{j}(\vec{x}',t|r)}{\partial x_{k}}\right\rangle - \left\langle u_{j}(\vec{x}',t|r) \frac{\partial p(\vec{x},t)}{\partial x_{i}}\right\rangle + \left\langle f_{i}(\vec{x},t)u_{j}(\vec{x}',t|r)\right\rangle.$$
(5.10)

Si l'on s'intéresse aux corrélations le long d'une seule trajectoire : $\vec{x} = \vec{x}'$, le terme d'advection disparaît et l'on obtient pour la fonction de corrélation Lagrangienne (dans l'espace physique) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \vec{u}(\vec{x},t|t) \cdot \vec{u}(\vec{x},t|r) \right\rangle = -\left\langle \vec{u}(\vec{x},t|r) \cdot \vec{\nabla} p(\vec{x},t) \right\rangle + \left\langle \vec{u}(\vec{x},t|r) \cdot \vec{f}(\vec{x},t) \right\rangle + \nu \left\langle \vec{u}(\vec{x},t|r) \Delta \vec{u}(\vec{x},t|t) \right\rangle.$$
(5.11)

• si l'intervalle de temps τ est très court devant l'échelle intégrale T_L (temps caractéristique du mouvement des grandes structures de l'écoulement), on peut supposer que

$$\left\langle \vec{u}(\vec{x},t|t+\tau).\vec{f}(\vec{x},t)\right\rangle \approx \left\langle \vec{u}(\vec{x},t).\vec{f}(\vec{x},t)\right\rangle = \varepsilon \quad \text{pour} \quad \tau \ll T_L.$$
 (5.12)

 ε représente le taux de dissipation moyen (en régime stationnaire).

• si τ est très grand devant le temps élémentaire Lagrangien τ_{η} (temps caractéristique de la dissipation visqueuse), le terme de dissipation est négligeable devant le terme de pression :

$$\nu \left\langle \vec{u}(\vec{x},t|t+\tau) \Delta \vec{u}(\vec{x},t) \right\rangle \ll -\left\langle \vec{u}(\vec{x},t|t+\tau). \overrightarrow{\nabla} p(\vec{x},t) \right\rangle \quad \text{pour} \quad \tau \gg \tau_{\eta} \equiv \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}.$$
(5.13)

On obtient ainsi pour les échelles temporelles inertielles :

$$\frac{3}{2}\frac{d\langle\delta v(\tau)^2\rangle}{d\tau} = -\left\langle \vec{u}(\vec{x},t|t+\tau).\overrightarrow{\nabla}p(\vec{x},t)\right\rangle + \varepsilon \quad \text{pour} \quad \tau_\eta \ll \tau \ll T_L. \tag{5.14}$$

 $\langle \delta v(\tau)^2 \rangle$ désigne la fonction de structure d'ordre deux de la vitesse Lagrangienne :

$$\delta v(\tau) \equiv v_x(\vec{a},t+\tau) - v_x(\vec{a},t)$$
 (l'hypothèse d'isotropie est sous-entendue). (5.15)

Cette équation peut être vue comme l'analogue de l'équation de Karman-Howarth (voir le chapitre d'introduction) dans le formalisme Lagrangien. Remarquons que cette équation ne permet pas de conclure sur l'irréversibilité dans le temps des trajectoires Lagrangiennes.



FIG. 5.2 – Dans la zone inertielle $\tau_{\eta} \ll \tau \ll T_L$, le terme de pression – $\langle \vec{u}(\vec{x},t|t+\tau).\vec{\nabla}p(\vec{x},t) \rangle$ pilote la décroissance de la fonction de corrélation de la vitesse Lagrangienne (données numériques obtenues pour un nombre de Reynolds turbulent $R_{\lambda} \approx 140$, E. Lévêque).

au sujet des corrélations Lagrangiennes :

L'accélération Lagrangienne de la particule s'écrit

temps) compense en moyenne le taux de dissipation à petite échelle :

$$\underbrace{-\overline{\nabla}p(\vec{x},t)}_{\text{agitation turbulente}} + \underbrace{\overline{f}(\vec{x},t)}_{\text{entraînement à grande échelle}} + \underbrace{\nu\Delta\vec{u}(\vec{x},t|t)}_{\text{frottement à petite échelle}}.$$
(5.16)

Par homogénéité et incompressibilité du champ de vitesse : $\langle \vec{u}(\vec{x},t|t).\vec{\nabla}p(\vec{x},t)\rangle = 0$. En moyenne, le gradient de pression ne fournit donc pas de travail à la particule de fluide. C'est la force d'entraînement de la turbulence (à grande échelle) qui entretient l'agitation de la particule. Le travail fourni (par unité de

$$\langle \vec{u}(\vec{x},t|t).\vec{f}(\vec{x},t)\rangle = \varepsilon \equiv -\nu \left\langle \vec{u}(\vec{x},t|t).\Delta \vec{u}(\vec{x},t|t) \right\rangle.$$
(5.17)

Le gradient de pression, qui représente l'action de l'agitation turbulente sur le mouvement de la particule, implique des corrélations complexes dont il est ici question.



FIG. 5.3 – Mouvement d'une particule transportée par un champ de vitesse turbulent, homogène et isotrope (simulation numérique, E. Lévêque). Le nombre de Reynolds turbulent est $R_{\lambda} \approx 140$. Le mouvement est ici intégré sur environ 10 temps de correlation de la vitesse Lagrangienne. La trajectoire de la particule est complexe. Elle ne semble pas résulter d'une succession de pas élémentaires aléatoires et indépendants (mouvement Brownien). Par instant, la trajectoire s'enroule et l'accélération Lagrangienne, principalement centripète, devient très grande. Ce mécanisme permet de rendre compte des fluctuations anormalement grandes de l'accélération d'une particule de fluide.

5.2.1 Construction de la marche (aléatoire) d'une particule de fluide

Dans le formalisme Lagrangien, il est naturel de rechercher une origine dynamique aux corrélations statistiques de la turbulence [79]. Une approche «classique» consiste à représenter les fluctuations de la vitesse de la particule par un processus de Markov [80], gouverné par une équation de Langevin [81] (article de revue sur le sujet) :

$$dv(t_i) = dW(t_i). (5.18)$$

Le processus stochastique discret $dW(t_i)$ décrit l'accroissement élémentaire d'une composante de la vitesse de la particule le long de sa trajectoire (l'hypothèse d'isotropie est sous-entendue).

 $v(t_i)$ est un processus temporel (discret) qui est résolu à la micro-échelle θ . Toute l'information concernant la dynamique Lagrangienne est contenue dans le terme (stochastique) d'agitation $dW(t_i)$. Pour assurer la stationnarité du processus $v(t_i)$, on ajoute une force d'amortissement à l'équation précédente :

$$dv(t_i) = -\frac{\theta}{T_L}v(t_i) + dW(t_i).$$
(5.19)

Le temps caractéristique T_L définit la longueur de corrélation de la vitesse Lagrangienne.

• si l'on suppose que dW est un bruit blanc Gaussien, de moyenne nulle et de variance $\theta \sigma^2$ (mouvement Brownien), on peut calculer explicitement les fonctions de structure de la vitesse Lagrangienne :



FIG. 5.4 – Distributions des incréments de vitesse Lagrangienne en fonction de l'échelle τ : (a) données expérimentales (N. Mordant et al.) - (b) données numériques (E. Lévêque). À grande échelle la distribution est Gaussienne, puis développe des ailes qui s'étirent lorsque τ diminue (du bas vers le haut). Les distributions ont été déplacées verticalement pour les séparer nettement.

$$\left\langle \delta v(\tau)^{2p} \right\rangle \equiv \left\langle (v(t+\tau) - v(t))^{2p} \right\rangle = \sigma^{2p} \frac{(2p)!}{2^p p!} \left(\frac{\tau}{\theta}\right)^p \quad \text{pour l'ordre } p.$$
(5.20)

On retrouve ainsi la prédiction de la théorie de Kolmogorov (1941):

$$\langle |\delta v(\tau)|^p \rangle = B_p \varepsilon^{p/2} \tau^{p/2}, \tag{5.21}$$

en prenant $\sigma \sim \sqrt{\varepsilon \theta}$ soit $\theta \sim u_{\rm rms}^2/\varepsilon$; θ représente la micro-échelle temporelle de Taylor.

Les lois d'échelles observées expérimentalement et numériquement sont différentes de la prédiction de Kolmogorov (1941). La marche d'une particule de fluide n'est pas un mouvement Brownien (figure 5.3). Cet écart fait référence au phénomène d'intermittence et se traduit par des distributions fortement non-Gaussiennes pour les incréments $\delta v(\tau)$ (figure 5.4). Comme dans le cas Eulérien, cette intermittence peut être décrite dans le cadre (formel) d'un processus de cascade des grandes vers les petites échelles (temporelles). Ces points ont été spécifiquement abordés dans les articles :

• «Lagrangian Velocity Statistics in Fully Developed Turbulent Flows : Effects of Dissipation», L. CHEVILLARD, S. ROUX, E. LÉVÊQUE, A. ARNÉODO & J.-F. PINTON, *Physical Review Letters*, vol. 91, 2003, N° 214502

• «Lagrangian Velocity Fluctuations in Fully Developed Turbulence : Scaling, Intermittency and Dynamics», N. MORDANT, J. DELOUR, E. LÉVÊQUE, O. MICHEL, A. ARNÉODO & J.-F. PINTON, *Journal of Statistical Physics*, vol. 113 (5/6), 2003, p. 701

• «Experimental and Numerical Study of the Lagrangian Dynamics of High Reynolds Turbulence», N. MORDANT, E. LÉVÊQUE & J.-F. PINTON, *New Journal of Physics*, vol. 6, 2004, p. 116

le processus Multifractal-Random-Walk :

L'intermittence Lagrangienne est associée aux corrélations longues de l'accélération de la particule. Ce constat motive la construction d'une marche aléatoire qui tienne compte de ces corrélations particulières, et soit capable de reproduire les lois d'échelle anormales des fonctions de structure de la vitesse Lagrangienne :

$$\langle |\delta v(\tau)|^p \rangle \sim \tau^{\zeta_p} \quad \text{avec} \quad \zeta_p = c_1 p + c_2 \frac{p^2}{2} + \dots \quad \text{au premier ordre.}$$
 (5.22)

Le processus Multifractal-Random-Walk [82] [83] (thèse de J. Delour) satisfait ces conditions :

$$dW(t_i) = \beta(t_i) \cdot \delta(t_i) \tag{5.23}$$

- $\delta(t_i)$ est un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance unité, qui modélise le signe de l'accélération de la particule.
- les corrélations à longue portée sont contenues dans le processus positif $\beta(t_i)$, qui représente l'amplitude de l'accélération. On considère

$$\beta(t_i) = \exp\left(\omega(t_i)\right) \tag{5.24}$$

où $\omega(t_i)$ est un bruit Gaussien (de moyenne nulle) dont la fonction de corrélation est donnée par

$$\langle \omega(t)\omega(t+\Delta t)\rangle - \langle \omega(t)^2 \rangle = -\lambda^2 \log\left(\frac{\Delta t}{T_L}\right) \quad \text{pour} \quad \Delta t \le T_L.$$
 (5.25)

Pour ce processus, on peut établir analytiquement

$$\langle |\delta v(\tau)|^p \rangle \sim \left(\frac{\tau}{T_L}\right)^{\zeta_p} \quad \text{avec} \quad \zeta_p = (\frac{1}{2} + \lambda^2)p - \lambda^2 \frac{p^2}{2}.$$
 (5.26)

Le processus MRW établit un lien concret entre la corrélation à longue portée du module de la force d'agitation turbulente et les lois d'échelles anormales des fonctions de structure. En effet, le paramètre positif λ^2 gouverne à la fois la décroissance de la corrélation de l'amplitude de la force d'agitation et le coefficient d'intermittence des lois d'échelle. Les lois d'échelle de la marche aléatoire MRW sont en accord avec nos observations expérimentales et numériques. Ces résultats sont contenus dans le premier article présenté dans la section 5.3 :

• «Long-Time Correlations in Lagrangian Dynamics : A Key to Intermittency in Turbulence», N. MORDANT, J. DELOUR, E. LÉVÊQUE, A. ARNÉODO & J.-F. PINTON, *Physical Review Letters*, vol. 89, 2002, N° 254502

5.3 Articles présentés

5.3.1 «Long-time correlations in lagrangian dynamics: A key to intermittency in turbulence», N. MORDANT, J. DELOUR, E. LÉVÊQUE, A. ARNÉODO & J.-F. PINTON, *Physical Review Letters*, vol. 89 (25), 2002, n° 254502.

VOLUME 89, NUMBER 25 PHYS	SICAL REVIEW	LETTERS	16 DECEMBER 2002
---------------------------	--------------	---------	------------------

Long Time Correlations in Lagrangian Dynamics: A Key to Intermittency in Turbulence

N. Mordant,¹ J. Delour,² E. Léveque,¹ A. Arnéodo,² and J.-F. Pinton¹

¹Laboratoire de Physique, École Normale Suprieure de Lyon, 46 allée d'Italie F-69007 Lyon, France ²Centre de Recherche Paul Pascal, Avenue Dr. A. Schweitzer, F-33600 Bordeaux, France (Received 5 June 2002; published 3 December 2002)

Using a new experimental technique, based on the scattering of ultrasounds, we perform a direct measurement of particle velocities, in a fully turbulent flow. This allows us to approach intermittency in turbulence from a dynamical point of view and to analyze the Lagrangian velocity fluctuations in the framework of random walks. We find experimentally that the elementary steps in the walk have random uncorrelated directions but a magnitude that is extremely long range correlated in time. Theoretically, a Langevin equation is proposed and shown to account for the observed one- and two-point statistics. This approach connects intermittency to the dynamics of the flow.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.254502

PACS numbers: 47.27.Gs, 02.50.Fz, 43.58.+z

Traditional experimental studies of velocity fluctuations in turbulence rely on velocimetry measurement at a fixed point in space. A local velocity probe yields time traces of the velocity fluctuations which are then related to spatial velocity profiles using the Taylor hypothesis [1]. In this case, the flow is analyzed in terms of the Eulerian velocity field u(x, t). One of the most peculiar features of homogeneous three-dimensional turbulence is its intermittency, well established in the Eulerian framework [2]. The statistical properties of the flow depend on the length scale at which it is analyzed. For instance, the functional form of the probability of measuring an Eulerian velocity increment $\Delta_s u(x) = u(x+s) - u(x)$ varies with the magnitude of the length scale s. Many studies devoted to the understanding of this feature have been developed along the lines of Kolmogorov and Obukhov pioneering ideas [3]. In this case, intermittency is analyzed in terms of the anomalous scaling of the moments of velocity increments in space. It is attributed to the inhomogeneity in space of the turbulent activity and often analyzed in terms of ad hoc multiplicative cascade models [2]. Although very successful at describing the data, these models have failed to connect intermittency with the specific dynamics of turbulence. Here, we adopt a Lagrangian point of view. It is a natural framework for mixing and transport problems in turbulence [4]. In addition it has been shown in the passive scalar problem that intermittency is strongly connected to the particular properties of Lagrangian trajectories [5,6]. In the Lagrangian approach, the flow is parametrized by $v(x_0, t)$, the velocity of a fluid particle initially at position x_0 . Experimentally, we follow the motion of a single tracer particle and we consider the increments in time of its velocity fluctuations: $\Delta_{\tau} v(t) =$ $v(t + \tau) - v(t)$. Our first observations [7] have established and described intermittency in this Lagrangian framework. Since our measurements give access to the individual motion of fluid particles, we study intermittency from a dynamical point of view. We show, within a Langevin approach, that the anomalous scaling in the Lagrangian velocity increments traces back to the existence of long time correlations in the particle accelerations, i.e., the hydrodynamic forces that drive the particle motion.

In order to study the motion of Lagrangian tracers, we need to resolve their velocity fluctuations across a wide range of scales. To this end, we use a confined flow with no mean advection, so that fluid particles remain for long times inside a given measurement volume. The tracking of small tracer particles is achieved using a new acoustic technique based on the principle of a "continuous Doppler sonar." The flow volume is continuously insonified with a monochromatic ultrasound which is then scattered by the tracer particle [7]. This scattered sound is detected by two transducer arrays which yield a measurement of both the particle position, by direct triangulation, and of its velocity, from the Doppler shift. Indeed, for an incoming sound with frequency f_0 , the scattered sound at the receiver has frequency $f(t) = f_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(t)$, where $\mathbf{v}(t)$ is the velocity of the tracer particle and \mathbf{k} is the scattering wave vector. This frequency modulation in the acoustic signal is extracted numerically, using a highresolution parametric method [8]. Figure 1(a) shows the experimental setup and an example of a particle trajectory; Fig. 1(b) gives an example of the time variation of one component of its velocity. A water flow of the von Kármán swirling type [7,9] is generated inside a cylinder by counterrotation at $\Omega = 7$ Hz of two disks with radius R = 9.5 cm, fitted with eight blades of height 0.5 cm and set 18 cm apart. The large scale flow is axisymmetric and the fluctuations in its center approximate well the conditions of local homogeneous and isotropic turbulence. The flow power consumption is $\epsilon =$ 25 W/kg, with velocity fluctuations $u_{\rm rms} = 0.98$ m/s. The characteristic size of the velocity gradients is $\ell = (15u_{\rm ms}^2/\epsilon)^{1/2} = 880 \,\mu{\rm m}$, larger than the diameter (250 μ m) of the neutrally buoyant tracer particle (density of 1.06). The turbulent Reynolds number of the flow is $R_{\ell} = u_{\rm ms} \ell / \nu = 740$. The integral length and time scales are L = 4 cm and $T_L = 22.4$ ms, while the dissipative scales are $\eta = 15 \ \mu\text{m}$ and $\tau_{\eta} = 0.2 \ \text{ms}$, respectively.

254502-1 0031-9007/02/89(25)/254502(4)\$20,00

© 2002 The American Physical Society 254502-1

VOLUME 89, NUMBER 25



FIG. 1 (color online). (a) Experimental setup of the von Kármán flow, with an example of a particle 3D trajectory; (b) corresponding velocity variation (one component shown).

The flow is insonified at 2.5 MHz, with the transducers located at the flow wall. The receiver arrays are placed at 45° on each side of the emission direction. The measurement region is the intersection of the emission and detection cones. The particles act as Lagrangian tracers for times longer than 1 ms (below which inertia cuts off their response), up to times as long as they will stay confined inside the measurement volume, i.e., between one and ten T_L , the Lagrangian integral time scale ($T_L = 22.4$ ms, computed from the Lagrangian velocity autocorrelation function). Four thousand such events are analyzed, for a total of 1.9×10^6 data points sampled at 6.5 kHz.

The probability density functions (PDFs) of the Lagrangian time increments $\Pi_{\tau}(\Delta v)$ are shown in Fig. 2. They are Gaussian at integral scale ($\tau > T_L$) and vary continuously towards the development of stretched exponential tails as the time increments decrease towards the dissipative time scale [7,10]. The outer curve in Fig. 2 is the PDFs of Lagrangian acceleration measured by La Porta et al. [9] in the same flow geometry and at a comparable turbulent Reynolds number. This evolution of the PDFs $\Pi_{\tau}(\Delta v)$ leads to an anomalous scaling of the velocity structure functions $\langle |\Delta_{\tau} v|^q \rangle \sim \tau^{\zeta(q)}$, with $\zeta(q)$ a nonlinear function of q. In practice, exponents are estimated via the relative scaling $\langle |\Delta_{\tau} v|^{\bar{q}} \rangle \sim \langle |\Delta_{\tau} v|^2 \rangle^{\xi(q)}$, where $\xi(q) = \zeta(q)/\zeta(2)$ [11]. In Kolmogorov K41 phenomenology [2], the Lagrangian second order structure function is assumed to scale linearly with the time increment τ so that $\zeta(2)$ is considered as being equal to one [7]. Given the available sample size, moments are investigated up to order 6. We observe that $\xi(q)$ as a function of q is well approximated by a quadratic law in the range $0 \le q \le 6$ [7]:

$$\xi(q) = (1/2 + \lambda_L^2)q - \lambda_L^2 q^2/2, \quad \lambda_L = 0.115 \pm 0.01.$$
(1)

The Lagrangian value of the intermittency parameter

254502-2



FIG. 2 (color online). PDF $\Pi_{\tau}(\Delta v)$ calculated for time lags $100\tau/T_L = 1.3, 2.7, 5.4, 11.2, 22.4, 44, 89.3, 174$. The curves are displayed with a vertical shift for clarity. Crosses correspond to the MRW model with $\lambda^2 = 0.115$.

 $(\lambda_L^2 = 0.115)$ is larger than the Eulerian value $(\lambda_E^2 = 0.025)$, measured from hot-wire anemometry or in direct numerical simulations [12]. This mainly comes from the fact that time increments are measured here and that the reference structure function is the second order one [13].

Intermittency is thus observed and quantified in both Lagrangian and Eulerian frameworks. In contrast to traditional Eulerian studies where intermittency is described in terms of multiplicative processes, we look here for a dynamical origin. We consider the statistics of the fluid particles fluctuating velocity in analogy with a random walk. We write a velocity increment over a time lag τ as the sum of contributions over small times τ_1 :

$$\Delta_{\tau} v(t) = v(t+\tau) - v(t) = \sum_{n=1}^{\tau/\tau_1} \Delta_{\tau_1} v(t+n\tau_1).$$
 (2)

If the incremental "steps" of duration τ_1 were independent (and identically distributed), the PDF $\Pi_{\tau}(\Delta v)$ would readily be obtained as a convolution of the elementary distribution at scale $\tau_1, \Pi_{\tau_1}(\Delta \nu)$ —plus an eventual convolution kernel to account for stationarity at large scales. Such a regular convolution process corresponds to the Kolmogorov K41 picture of turbulence [2]; the particle velocity fluctuations are Brownian and the scaling is monofractal. A first important result of our analysis is to show that the elementary steps are not independent. The autocorrelation of the signed increments, $\Delta_{\tau_1} v(t)$, decays very rapidly (Fig. 3): the correlation coefficient drops under 0.05 for time separations larger than $2\tau_1$. However, if one considers the amplitude of the steps $|\Delta_{\tau_1} v(t)|$, one finds that the autocorrelation decays very slowly and only vanishes at the largest time scales of the turbulent motion. Recast in terms of the random walk, our results show that the amplitudes of the steps are long range correlated in time although their directions are not. As this point is fundamental, we have verified it using a Lagrangian tracking algorithm in a direct numerical

254502-2

VOLUME 89, NUMBER 25

PHYSICAL REVIEW LETTERS

16 DECEMBER 2002

simulation of the Navier-Stokes equations, using a pseudospectral solver, at $R_{\ell} = 75$, and for the same ratio τ_1/T_L (Fig. 3). The results are in remarkable agreement with our measurements. All increments are correlated for $\Delta t < \tau_1$, the time over which they are computed. Above τ_1 , the correlation of the signed increments rapidly drops while the correlation coefficient of their absolute values decays very slowly, to vanish only for $\Delta t > 3 T_L$. This behavior is observed for τ_1 chosen from the smallest resolved time scales to inertial range values. These observations persist in the limit of very small time increments, and thus presumably for the acceleration of the fluid particle and thus for the forces acting on it.

Theoretically, one would like to understand this behavior from the hydrodynamic forces in the Navier-Stokes equations. Such a direct analytical treatment is out of reach at present. We propose, as a natural first step, to study a surrogate dynamical equation of the Langevin type. In this procedure, one considers a one-dimensional variable, W(t), representing the particle velocity, driven by a stochastic force:

$$dW = -\frac{1}{T_L}Wdt + dF(t).$$
 (3)

If this force is chosen as a white noise then W(t) has the dynamics of Brownian motion (discarding the effect of

FIG. 3. Variation of the normalized correlation coefficient $\chi(f,g)(\Delta t) = \langle [f(t + \Delta t) - \langle f \rangle] [g(t) - \langle g \rangle] \rangle / \sigma_f \sigma_g$. Two velocity components are considered: the squares and diamonds mark the $\chi(\Delta_{\tau_1}v_x, \Delta_{\tau_1}v_x)$ and $\chi(\Delta_{\tau_1}v_y, \Delta_{\tau_1}v_y)$ autocorrelation functions while the circles mark the cross correlation $\chi(\Delta_{\tau_1}v_x, \Delta_{\tau_1}v_y)$; curves with filled symbols are computed using the absolute value of the increments while the curves with open symbols are computed using the full signed increments. The main curve corresponds to the experiment at $R_\ell = 740$, with $\tau_1 = 0.03T_L$. The inset shows similar results for a direct numerical simulation at $R_\ell = 75$.

the drift term that accounts for stationarity), its statistics is monofractal with a similarity exponent equal to 1/2 the increments scale as $\langle |W(t + \tau) - W(t)|^p \rangle_t \sim \tau^{p/2}$, corresponding to the nonintermittent Kolmogorov picture. In order to account for intermittency, one needs to ascribe other properties to the stochastic force. Guided by our experimental results, we build a stochastic force F(t) =A(t)G(t), having a random direction and a long-range correlated magnitude. Specifically, its direction is modeled by a Gaussian variable G(t), chosen white in time, with zero mean and unit variance. Its amplitude, A(t), being a positive variable, is written $A(t) = \exp[\omega(t)]$ where the magnitude $\omega(t)$ is a stochastic process that satisfies

$$\langle \omega(t)\omega(t+\Delta t)\rangle_t = -\lambda^2 \ln(\Delta t/T_L)$$
 for $\Delta t < T_L$ (4)

and 0 otherwise, λ^2 being an adjustable parameter. When discretized, this dynamics corresponds to a onedimensional multifractal random walk (MRW) [14]. Analytical calculations show that the resulting dynamical variable W(t) has multiscaling properties. The moments have scaling laws, $\langle |\Delta_{\tau}W|^q \rangle \sim \tau^{\zeta(q)}$, with $\zeta(q) = (1/2 + \lambda^2)q - \lambda^2q^2/2$, so that λ^2 in Eq. (4) is the intermittency parameter of the model [14]. It is a fundamental point that the same parameter λ^2 governs both the evolution of the PDFs of the increments (one-time statistics) and the time correlation of the process (two-time statistics).

We find that this model captures the essential features of the Lagrangian data. First, in order to test the relevance of Eq. (4), we have computed, from the experimental and numerical data, the autocorrelation function of the logarithm of the amplitude of infinitesimal Lagrangian velocity increments. Figure 4(a) confirms that the logarithmic decrease build in the MRW model [Eq. (4)] is observed both in the experimental and the numerical data; it yields the estimate $\lambda^2 = 0.115 \pm 0.01$. Second, we check the relevance of the model for the description of the one-time statistics of the Lagrangian increments $\Delta_{\tau} v$. We note (Fig. 2, upper curve) that the choice $\lambda^2 = 0.115$ yields a PDF for the stochastic force that is in remarkable agreement with experimental measurements of fluid particle accelerations [9]. The agreement at larger time scales is evidenced on the behavior of the first two cumulants. Cumulants are computed with more reliability that the moments and are related to them through $\langle |\Delta_{\tau} v|^q \rangle =$ $\langle \exp(q \ln |\Delta_{\tau} v|) \rangle = \exp[\sum_{n} C_{n}(\tau)q^{n}/q!]$. In the MRW model, one can analytically derive [14]

$$C_1(\tau) = (1 + \lambda^2) \ln(\tau), \qquad C_2(\tau) = -\lambda^2 \ln(\tau), \quad (5)$$

all higher order cumulants being null. $C_1(\tau)$ and $C_2(\tau)$ computed from the experimental and numerical data are shown in Figs. 4(b) and 4(c) and compared to MRW model predictions when the intermittency parameter is set to the value $\lambda^2 = 0.115$ derived from the correlations in the dynamics. In each case the agreement is excellent;

in the dynamics. In each

254502-3


VOLUME 89, NUMBER 25



(a) $\chi(\ln(|\Delta_{\tau_{c}}V|), \ln(|\Delta_{\tau_{c}}V|))$ 0.4 0.3 0.2 0.1 10 10⁰ $\Delta t/T_L$ (b) ઉ Ö 10 10 τ/T_{l} (c) J 10 τ/T_L

FIG. 4. Experimental (open squares) and numerical data (open triangles) compared to the predictions of the MRW model (filled circles). (a) Correlation in time of the magnitude of one component of the velocity increments, $\chi(\ln |\Delta_{\tau_1} v_x|)$, $\ln[\Delta_{\tau_1} v_x]$, computed for a time lag $\tau_1 = 0.03T_L$. (b),(c): first and second order cumulants versus time scale τ .

the slope of the variation $\partial C_{1,2}(\tau)/\partial \ln \tau$ in the inertial range is correctly given by Eq. (5). The same intermittency parameter thus governs the anomalous scaling of the Lagrangian velocity increments and their long time dynamical correlations. We note however, that while the scale dependence $(\partial C_2 / \partial \ln \tau = -\lambda^2)$ is correctly given by the MRW model, the predicted value of C_2 is about 20% higher than the experimental value. This prevents a complete fitting of the experimental PDFs of velocity increments; only their rate of change across the scales is correctly given and directly related to the anomalous intermittency exponents.

We therefore believe that long time correlations in the Lagrangian dynamics are a key feature for the understanding of intermittency, which leads to a new dynamical picture of turbulence. Long time correlations and the

16 DECEMBER 2002

103

occurrence of very large fluctuations at small scales dominate the motion of a fluid particle. It can be understood if, along its trajectory, the particle encounters very intense small-scale structures over a more quiet background. Intermittency is then due to the nature and distribution of these small-scale structures. Indeed, the analogy with a random walk suggests that the statistics at all scales can be recovered if one ascribes two properties to the small scales: (1) the probability density function of fluid particle accelerations and (2) the functional form of their time correlations. In the Lagrangian framework, these features are directly linked to the Navier-Stokes equations that govern the elementary changes in the velocity (momentum) of the fluid particles. It thus gives a possibility to derive intermittency from the constitutive physical equations. Although this may be quite a theoretical challenge, direct numerical simulations look promising as they allow the study of the flow dynamical fields (pressure, velocity gradient tensor, etc.) along the trajectory of individual fluid particles.

This work is supported by the French Ministère de La Recherche (ACI), and the Centre National de la Recherche Scientifique under GDR Turbulence. Numerical simulations are performed at CINES (France) using an IBM SP computer. We thank P. Chanais, O. Michel, B. Portelli, P. Holdsworth for fruitful discussions, P. Metz, M. Moulin, and L. de Lastelle for their help.

- [1] A.M. Monin and A.S. Yaglom, Statistical Fluid Mechanics (MIT Press, Cambridge, MA, (1987).
- U. Frisch, Turbulence (Cambridge University Press, [2] Cambridge, (1995).
- A. N. Kolmogorov, J. Fluid Mech. 13, 82 (1962); A. M. Obhukov, J. Fluid Mech. 13, 77 (1962).
- [4] For example, see J. M. Ottino, *The Kinematics of Mixing* (Cambridge University Press, Cambridge, (1989).
- [5] G. Falkovich, K. Gawedzki, and M. Vergassola, Rev. Mod. Phys. 73, 913 (2001).
- A Pumir, B. Shraiman, and M. Chertkov, Phys. Rev. Lett. [6] 85, 5324 (2001).
- N. Mordant, P. Metz, O. Michel, and J.-F. Pinton, Phys. Rev. Lett. 87, 214501 (2001).
- [8] N. Mordant, O. Michel, and J.-F. Pinton, J. Acoust. Soc. Am. 112, 108-119 (2002).
- [9] A.L. La Porta et al., Nature (London) 409, 1017 (2001).
- [10] P.K. Yeung and S.B. Pope, J. Fluid Mech. 207, 531 (1989).
- [11] R. Benzi, S. Ciliberto, C. Baudet, G. Ruiz-Chavarria, and C. Tripiccione, Europhys. Lett. 24, 275 (1993).
- [12] J. Delour, J.-F. Muzy, and A. Arnéodo, Eur. Phys. J. B 23, 243 (2001).
- [13] M.S. Borgas, Philos. Trans. R. Soc. London A 342, 379 (1993).
- [14] E. Bacry, J. Delour, and J.-F. Muzy, Phys. Rev. E 64, 026103 (2001).

5.3.2 Experimental and Numerical Study of the Lagrangian Dynamics of High Reynolds Turbulence», N. MORDANT, E. LÉVÊQUE & J.-F. PINTON, New Journal of Physics, vol. 6, 2004, n° 116



Experimental and numerical study of the Lagrangian dynamics of high Reynolds turbulence

Nicolas Mordant¹, Emmanuel Lévêque and Jean-François Pinton

Laboratoire de Physique, Ecole Normale Supérieure de Lyon and CNRS umr5672, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France E-mail: pinton@ens-lyon.fr

New Journal of Physics **6** (2004) 116 Received 24 March 2004 Published 15 September 2004 Online at http://www.njp.org/ doi:10.1088/1367-2630/6/1/116

Abstract. We introduce an original acoustic method to track the motion of tracer particles in high Reynolds number turbulent flows. We present in detail the experimental technique and show that it yields a measurement of the Lagrangian velocity variations of single particles, resolved across the inertial range turbulence. Second-order quantities such as the velocity autocorrelation function and time spectrum are in agreement with Kolmogorov 1941 phenomenology. Higher-order quantities reveal a very strong intermittency in the Lagrangian dynamics. Using both the results of the measurements and of direct numerical simulations, we show that the origin of intermittency can be traced back to the existence of long-time correlations in the dynamics of the Lagrangian acceleration. Finally, we discuss the role played by vortices in the Lagrangian dynamics.

¹ Present address: Laboratoire de Physique Statistique, Ecole Normale Supérieure, 75 rue Lhomond, F-75005 Paris, France.

New Journal of Physics **6** (2004) 116 1367-2630/04/010116+44\$30.00

PII: S1367-2630(04)78330-5 © IOP Publishing Ltd and Deutsche Physikalische Gesellschaft

Institute of Physics 🤇	DEUTSCHE PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFI
------------------------	-------------------------------------

Contents

2

1.	Intro	oduction	2					
2.	Experimental set-up							
	2.1. Flow characteristics							
	2.2.	The experimental technique	6					
		2.2.1. Principle of measurement	6					
		2.2.2. Acquisition	8					
	2.3.	Signal processing	10					
		2.3.1. Principle	10					
		2.3.2. Particle velocity	11					
		2.3.3. Particle position	12					
	2.4.	Numerical simulation	12					
3.	Koln	nogorov's 1941 theory	13					
	3.1.	Lagrangian velocity PDF	14					
	3.2.	Lagrangian velocity autocorrelation function	15					
	3.3.	Power spectrum	20					
4.	The 1	Lagrangian acceleration	21					
	4.1.	Experimental measurements	21					
		4.1.1. Particle size effect	21					
		4.1.2. Particle acceleration PDF	22					
		4.1.3. Particle acceleration autocorrelation	23					
	4.2.	Numerical simulations	25					
		4.2.1. Lagrangian acceleration components	25					
		4.2.2. Amplitude and direction of the Lagrangian acceleration	26					
		4.2.3. Characteristic times	27					
5.	Lagr	angian intermittency	27					
	5.1.	PDF of velocity increments	27					
	5.2.	The flatness	29					
	5.3.	Structure functions	31					
	5.4.	Multifractal random walk	35					
	5.5.	Acceleration, dissipation and vorticity	37					
		5.5.1. Enstrophy and dissipation	37					
		5.5.2. Vorticity filaments	39					
6.	Conc	clusion	43					
Ac	know	ledgments	43					
Re	fereno	ces	44					

1. Introduction

The latest developments towards a theory of turbulence have been made using the Lagrangian approach [1], i.e. by studying the properties of fluid particle trajectories. Considering the Kraichnan model of simplified turbulence, one can derive the existence of anormal exponents that are the basis of the intermittency observed in Eulerian studies. Stochastic Lagrangian equations

Institute of **Physics DEUTSCHE PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT**

[2, 3] have also been developed to model the dispersion of particles in turbulent flows. In contrast, most experimental studies are still about Eulerian quantities, because of the technical difficulties associated with the implementation of particle measurements. One difficulty is to single out a fluid particle. Two options have been investigated: giving a real fluid particle a different physical parameter from the surrounding fluid (temperature, colour etc) or seeding the flow with small neutrally buoyant particles. The first attempts trace back to the 1920s with Taylor's work to relate Lagrangian velocity statistics to heat dispersion-the width of the thermal wake behind a heated wire in a wind tunnel is related to the autocorrelation function of the Lagrangian velocity [4]-[6]. This relation is restricted to the autocorrelation and is perturbed by diffusion effects and by the non-stationarity of the turbulence in the wind tunnel. Most of the recent experimental work in Lagrangian dynamics uses solid particles that are tracked with optical techniques. One is then confronted with the second technical difficulty in Lagrangian studies: obtaining a measurement of the motion resolved in time and space. Film cameras were used in the 1970s [7, 8], but they were restricted to only a few images per second and hence to low Reynolds numbers. At the end of the 1980s, the development of computers and digital cameras gave access to moderate Reynolds numbers and to more complex statistical quantities [9]. The 3D particle tracking velocimetry technique [10] is especially suited for Lagrangian studies but so far has been used only with standard camera rates (i.e. 25 frames s^{-1}) which limit the measurements to moderate Reynolds numbers [11]. The main results of all of these experiments so far are that the Lagrangian velocity distribution is Gaussian and that the velocity autocorrelation coefficient is likely to decrease exponentially with the Reynolds number. More recent experiments use ultra-fast detectors to access particle accelerations with a very accurate time resolution [12]-[14], but the measurements are limited to very short time scales (a few Kolmogorov times τ_n). They have observed a highly non-Gaussian distribution of acceleration components [15].

In parallel to these few experiments, the development of direct numerical simulations (DNS) has produced Lagrangian data from simulated turbulent flows. Although still restricted to moderate Reynolds numbers, they yield a lot of information as all dynamical variables are accessible [16]–[18]. These numerical experiments have revealed that (i) the Lagrangian velocity autocorrelation function has an exponential decrease with a time T_L characteristic of the large-scale motion; (ii) the direction of the Lagrangian acceleration decorrelates within a few Kolmogorov times while the magnitude remains correlated for times of order T_L and (iii) the time increments of Lagrangian velocity have probability density functions (PDFs) which evolve from a Gaussian distribution at integral scale to one with wide stretched exponential tails near τ_n .

It is the aim of the method presented here to investigate experimentally the above findings, using a resolved measurement that covers the entire inertial range of time scales of Lagrangian motion, in high Reynolds number flows. To this end, we have developed a new experimental technique based on the use of ultrasound [19]. The Lagrangian velocity is extracted from the Doppler frequency shift of ultrasound scattered by the solid particles—this step required the development of a high-resolution spectral analysis algorithm [20]. The main advantage of ultrasound is that, using only one emitter and one receiver, it is possible to have a large measurement volume without degrading the velocity resolution. The velocity is directly estimated from the Doppler shift, and not after differentiation of the particle position along its trajectory. It means that the velocity resolution and the time resolution are independent of the size of the measurement volume, which is not the case with digital cameras (for a given pixel resolution, increasing the measurement volume degrades the spatial resolution and thus the



Figure 1. The von Kármán swirling flow. The flow is generated by two counterrotating discs of radius 9.5 cm, with a 18 cm separation. The fluid is water, enclosed in a cylindrical tank of radius 10 cm so that the total volume is 91. The fluid temperature is regulated to ambient temperature by an external recirculation loop. The discs are driven by two 1 kW dc motors whose rotation frequency is kept constant. A measured trajectory of a 250 μ m particle is displayed.

velocity resolution). As this method is quite new, we shall compare our essential results with DNS data of Lagrangian motion.

The experimental technique (including acquisition and signal processing) and the numerical simulation are described in section 1. In section 2, we compare the results of our measurements to the dimensional predictions of the Kolmogorov 1941 theory. The third section is devoted to the analysis of the Lagrangian acceleration. Section 4 reports the analysis of the intermittency of the increments in time of the Lagrangian velocity. Our findings suggest a dynamical origin which is analysed further in section 5 with the help of the DNS data.

2. Experimental set-up

2.1. Flow characteristics

Our measurements are performed in a confined von Kármán swirling flow, used as a model flow for homogeneous and isotropic turbulence studies [12], [21]–[23]. The fluid is water, set into motion by two counter-rotating discs (figure 1) with radius 9.5 cm, set 18 cm apart. The discs may be smooth or with eight blades of height 5 mm. The flow is enclosed in a cylindrical shell of inner radius 10 cm so that the total volume is 91. The temperature is regulated to ambient by an external cooling recirculation loop. The discs are driven by two 1 kW dc motors whose rotation frequency Ω is kept constant. The values of the parameters are displayed in table 1. In a typical experiment (such as #3), the rms amplitude σ of velocity fluctuations is 1 m s⁻¹. The integral length scale L is close to 4.5 cm, the Taylor length scale λ is around 600 μ m and the Kolmogorov dissipation length scale η is 20 μ m. The Lagrangian integral time scale T_L is 20 ms and the Kolmogorov time scale τ_{η} is 0.2 ms. The average dissipation ϵ_{heat} is measured by

Institute of **Physics O** DEUTSCHE PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT

Table 1. Parameters of the different experiments. Ω is the frequency of rotation of the discs, σ the standard deviation of the Lagrangian velocity, L the integral length scale, ϵ the flow power consumption per unit mass, η the Kolmogorov dissipation length, τ_{η} the Kolmogorov dissipative time scale, λ the Taylor microscale, $R_{\lambda} = \sigma L/\nu$ the turbulent Reynolds number, S the number of Lagrangian trajectories analysed, corresponding to a number N_0 of data points, T_L the Lagrangian integral time scale, T_2 the outer time scale in Sawford stochastic equation, σ_a the standard deviation of the Lagrangian acceleration and C_0 the Kolmogorov constant in the Lagrangian velocity autocorrelation function. Error bars in the parameters can be estimated from the number of significant digits in the reported values.

Parameters	1	2	3	4	5
Blades	No	8	8	8	8
Ω (Hz)	17.5	4.0	7.2	11.2	7.2
Sphere diameter (μ m)	250	250	250	250	1000
R_{λ}	510	570	810	1000	810
$\sigma (\mathrm{ms^{-1}})$	0.38	0.48	0.98	1.6	0.98
L (cm)	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5
$\epsilon_{heat} (W \text{kg}^{-1})$	13	8	25	72	25
$\epsilon (\mathrm{Wkg^{-1}})$	1.2	2.5	21	87	21
η (μm)	30	25	15	10	15
τ_{η} (ms)	0.91	0.63	0.22	0.11	0.22
λ (mm)	1.3	1.2	0.83	0.65	0.83
S	5153	4269	9506	5331	3113
N_0 (10 ⁶ points)	2.01	1.56	3.2	1.44	0.96
$T = 1/\Omega \text{ (ms)}$	57.1	250	139	89.3	139
T_L (ms)	22.5	46.7	22.4	14.7	22.7
σT_L (cm)	0.86	22.4	22.0	23.2	22.2
T/T_L (ms)	1.3	5.4	6.2	6.1	5.7
T_2 (ms)	1	1	0.4	0.3	1.1
$\sigma_a ({\rm ms^{-2}})$	51	64	280	640	100
σ_{a-exp}	57	93	390	1000	250
a_0	2.0	1.0	0.81	0.50	0.81
C_0^{\star}	4.7	3.1	3.4	3.3	3.1
C_0	5.6	4.0	4.1	3.9	4.1

estimating the thermal power removed by the cooling system. The external cooling recirculation flow rate is tuned to stabilize the internal fluid temperature (in the middle of the flow) to the external ambient temperature so that there is no thermal flow between inside and outside the tank. The heat that is removed by the cooling system comes only from the turbulent dissipation. In this way, one obtains an estimation of the global dissipation in the experiment. The problem with this method is that the dissipation is not homogeneous in the tank. For example, there is a strong shear between the back of the disc and the wall. In case of smooth discs, this shear may be the dominant source of dissipation as the entrainment by the disc is done through the boundary layer, which is not a very efficient process. This will lead to an overestimate of the dissipation in the measurement volume. Even between the discs the flow is not fully homogeneous. Thus, the

Institute of **Physics DEUTSCHE** PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT

estimate of the dissipation obtained from the global heating may differ strongly from the actual dissipation rate in the measurement volume. Another way to estimate the dissipation ϵ is to use the relationship

$$\epsilon = \frac{u^3}{L},\tag{1}$$

where *u* is the standard deviation of the Eulerian flow velocity. The latter quantity is estimated from the Lagrangian velocity measurement, as the moments of the velocity are equal when estimated from Eulerian or Lagrangian measurements [24], so that $u = \sigma$. The integral length scale *L* can be estimated from the Eulerian autocorrelation function of the velocity. We have measured it in the centre of the flow, using air and a geometry very close to that used in water. The integral length scale *L* is found to be close to 4.5 cm and independent of the Reynolds number [23], in agreement with [14]. This allows the estimation of the dissipation rate as reported in table 1. One can see that, in most cases, the dissipation ϵ_{heat} estimated from the heating is too large. In this paper, we will use the value of the dissipation rate computed from equation (1) as the actual value for ϵ in the measurement volume (this is the reason why numerical values may differ slightly from previously published results on the same experiment [25]).

2.2. The experimental technique

2.2.1. Principle of measurement. Fluid particles are singled out by the use of a small number of solid polystyrene spheres that are advected by the flow. Their density is 1.06, so that the advection by the turbulent flow greatly dominates any density effect (the buoyant forces are less than a thousand times smaller than the inertial forces). In all experiments (except #5), the particle diameter is $250 \,\mu$ m. This is smaller than the Taylor length scale, so we expect the particle to follow the fluid motion in the inertial range. We will return to this point in the next section and discuss it in detail.

The measurement technique is based on the Doppler effect of the ultrasound scattered by the solid particle. Acoustic waves are emitted and detected by transducers located 18 cm off the axis of the cylindrical vessel as shown in figure 2(a). The emitter produces continuous monochromatic ultrasound at frequency 2.5 or 2.8 MHz (figure 3); the corresponding wavelength is around 0.6 mm in water. With square transducers of 2 mm sides, diffraction produces an emission beam with an aperture angle close to 35° . In this way, a large volume of the flow is insonified and probed (the emission beam has a diameter close to 10 cm at the centre of the flow). When a polystyrene sphere enters the emission beam, it scatters the ultrasound. The scattered sound frequency is shifted by Doppler effect so that the instantaneous pulsation is

$$\omega(t) = \omega_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}(t), \tag{2}$$

where ω_0 is the emission angular frequency, $\mathbf{q} = \mathbf{k}_{scat} - \mathbf{k}_{inc}$ is the scattering wavevector and $\mathbf{v}(t)$ the instantaneous velocity of the particle. The scattered sound is recorded by an array of transducers. The array is used to improve the signal-to-noise ratio (SNR) of the measurement: the transducer detects independent realizations of the noise but identical Doppler signals. The receiver array is made of 9 square transducers, 2 mm each side, lying on a cross and separated by 0.5 mm (figure 2(b)). The measurement domain, being the intersection of the two emitter and receiver beams, has a typical size of 10 cm. The measurement volume is located around the centre of the tank so that the average velocity is zero in the volume. Its size is larger than the integral length scale (L = 4.5 cm) so that one can expect a significant number of particles



Figure 2. (a) Transverse cut of the experimental vessel at equal distance from the discs. The dark grey region around the vessel corresponds to a sound absorbing resin used to damp the reflections. The measurement region is the intersection of the emission and the reception beams. (b) Geometry of the transducer array: each transducer is a square with a 2 mm side and the spacing between transducers is $100 \,\mu$ m.

remaining in the ultrasonic beam for a long enough time to study the Lagrangian dynamics of the flow up to its large time scales. The results presented below show that the Lagrangian integral time scale is indeed smaller than the typical sweeping time of the particles in the measurement volume. We observed that the average duration of the recorded tracks is typically more than twice as long as the estimated Lagrangian integral time scale. An emitter–receiver pair yields the measurement of one component of the Lagrangian velocity. Two such pairs (figure 2(a)) are used in order to record two components of the velocity of the tracer particle. Both components lie in the transverse plane of the tank. It is important to note that when measuring the transverse components, we do not insonify any moving wall such as the rotating discs that generate the flow. This means that the echoes off the wall are not frequency-shifted (they are damped by over 30 dB by an adequate coating of the inner walls of the cylinder). Even if the echoes are over



Institute of **Physics** DEUTSCHE PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT

Figure 3. Principle of measurement. A monochromatic ultrasound wave is emitted by one transducer. Its size (2 mm) is comparable with the sound wavelength (3 MHz corresponds to a 0.5 mm wavelength), so that diffraction ensures that a large volume of the flow is insonified. As a solid particle enters the emission beam it scatters ultrasound with a Doppler shift that mirrors the particle velocity. The scattered sound is recorded by one receiving transducer or by an array of transducers.

three orders of magnitude larger than the particle contribution, they can be removed in the data processing using a digital stop-band filter at the emission frequency. In this way, one detects the signal scattered by the particle as long as the particle velocity is not strictly zero.

2.2.2. Acquisition. Two velocity components are measured by recording the signal received by two arrays of nine transducers each. In order to avoid cross-talk problems, two distinct emission frequencies are used, equal to 2.5 and 2.8 MHz respectively. Because of the echoes on the wall, the signal has a large dynamic range. The largest part of the signal comes from the echoes and covers roughly 60 dB in magnitude. The scattering contribution from the particle has an amplitude that varies with the particle position in the ultrasonic beam (the amplitude of the beam decreases with distance to the transducer and also laterally due to the diffraction pattern) and its detection requires an extra 60 dB of dynamic range in the recorded transducer signal. The requirements for the acquisition device are as follows: 120 dB of dynamic range (to resolve the scattering signal) and a digitizing rate greater than 6 MHz (to sample the ultrasound accurately), for each of the 18 receiving transducers. As the Doppler shift induced by the particle motion is small compared with the frequency of the incoming wave ($\Delta \omega / \omega \approx \sigma / c_0$, the flow Mach number), frequency multiplexing is an alternative to the use of 18 independent high-speed, high-resolution digitizers [26]. The output from the transducers in each array are thus combined into a single signal. The principle of operation of the frequency multiplexer is shown in figure 4: the central frequency of the signal received by the nine transducers is shifted into nine distinct spectral bands. To this end, nine very stable clock signals are synthesized at nine different frequencies from a master



Figure 4. Principle of the multiplexing device: the TTL clock signal is filtered to a sinusoid and analogically multiplied with the acoustic signal. The output of the multiplier is then filtered to select the low-frequency spectral component, corresponding to the difference of the frequencies of the clock and the ultrasound. The output is summed with the output of the other channels and send to the acquisition device. High-level performance is achieved using ultra-fast and ultra-low noise components.



Figure 5. Power spectrum of the signal output by the multiplexing device. One can easily see the nine channels. Each channel is made of a sharp peak corresponding to the sound emission frequency. At the bottom of this peak is the part corresponding to the particle signal. It spans about 15 kHz (in this example the spectrum is computed over long time interval, so that the particle signal appears as a wide band and not as a single Doppler line), with an amplitude of 15 dB in this case.

clock signal at 40 MHz. These clock signals are multiplied by the analogue acoustic signals coming from the nine ultrasonic receivers. The nine outputs are then summed and digitized by a Agilent e1430A 10 MHz, 23 bits digitizer. Using ultra-fast and ultra-low noise components, the multiplexing device satisfies both the requirements of rapidity and large dynamic range. The digitizer computes a numeric heterodyne detection at the centre frequency of the nine frequency bands. A typical power spectrum of the output of the multiplexing device is shown in figure 5.

New Journal of Physics 6 (2004) 116 (http://www.njp.org/)

Institute of Physics DEUTSCHE PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT

One can see the nine spectral bands, each corresponding to one transducer. Every band is made of one large and narrow peak, due to the coupling emitter–receiver and echoes, and a wide, low-amplitude band due to the scattering by the particles. The individual spectra look alike because they measure the same scattered acoustic signal produced by a single particle moving in the measurement zone. After digital sampling, the first signal processing operation is to separate the nine signals, using numerical filtering and heterodyne detection. In its final form, the signal from each element of the transducers array correspond is complex and displays a spectrum centred about 0 Hz. The resulting data set is then analysed in two ways:

- (i) From each transducer signal, the Doppler shift from the sound scattered by a single particle moving in the measurement zone is extracted. This measures one component of the particle velocity. The advantage of the array detection is to obtain nine different realizations of the noise and, thus, to reduce the effective noise level by a factor of 3 compared with the use of a single transducer.
- (ii) The phase shift between the different transducers can be used to extract the direction of emission of the scattered sound. One line of transducers acts like a linear antenna so that by using the two arrays, one obtains the position of the particle.

We note here that the particle position and the particle velocity are obtained independently, a feature that provides a calibration and consistency check of the signal.

2.3. Signal processing

2.3.1. Principle. The velocity information is coded into the frequency modulation of the scattered ultrasound signal. This frequency modulation is highly non-stationary as the velocity may fluctuate on time scales as small as the Kolmogorov time scale (which is less than 1 ms), or more probably the eddy turnover time corresponding to the size of the tracer particle. At an emission frequency equal to 2.5 MHz, the typical order of magnitude of the Doppler frequency shift for a velocity fluctuation equal to 1 m s^{-1} is 3000 Hz. To estimate this frequency one needs a time window over which the signal may be considered to be stationary, i.e. spanning less than 1 ms. If one requires a 10% resolution on the frequency estimation (300 Hz) then the product $1 \text{ ms} \times 300 \text{ Hz} = 0.3$ is less than 1. It means that a detection based on Fourier analysis would not be efficient enough to satisfy this resolution requirement because of the uncertainty principle. The problem is made even more complex by the low SNR. Better performance can be obtained using parametric estimation.

Indeed, in order to improve the resolution of the frequency estimation, one needs to make some hypotheses about the structure of the signal. After pre-processing filtering operations that remove the contributions from the echoes, the signal contains only the sound scattered by the particle, which can be written as

$$x(t) = \sum_{m=1}^{M} \underline{a}_{m}(t) \exp(2i\pi f_{m}(t)) + n(t).$$
(3)

The signal is the sum of M complex exponential functions that are generated by every particle present in the measurement volume. Each one of these exponentials has a complex amplitude \underline{a}_m which fluctuates slowly due to the position of the particle in the measurement region (and due to the filters used to remove the low-frequency component due to the echoes), and a frequency



Figure 6. Example of an experimental acoustic signal. (a) Real part of the signal received by one transducer. The signal has been heterodyned at the emitting frequency. (b) Time frequency picture of the same signal (spectrogram). The energy of the signal is coded on a grey scale. The output of the AML algorithm is superimposed (black solid line).

modulation $f_m(t)$ that is proportional to the velocity component. The signal also contains an amount of noise n(t) that comes mostly from the electronics and which will be assumed to be white, Gaussian and i.i.d. (independent, identically distributed). A very small number of particles is introduced into the flow, so that M < 2 for most events. The case $M \ge 2$ is not conceptually different but is practically much more difficult because two (or more) particles may have the same velocity component at the same time so that several spectral components may have the same frequency. It raises problems such as changing the order of the estimation (M), and dealing with ambiguities to attribute a spectral component to each particle. As we are interested in singleparticle measurement, we lower the concentration of particle to have at most one particle in the measurement region for most events. The estimation of the different parameters (M, a_m , f_m and the noise variance) is done using an approximated maximum likelihood (AML) algorithm. This algorithm has been described in detail in a previous paper [20] and the reader is referred to it for technical details. The next subsection gives an example of extraction of the particle position and velocity from the scattered signal.

2.3.2. Particle velocity. The acoustic signal (heterodyned at null frequency) is made of alternating periods of time with (at least) one particle in the measurement region (we call this period an event) and periods without any particles. The first step of the processing is to select the events. This is done by thresholding the sound intensity. An example of a typical experimental event is presented in figure 6(a). The real part of the signal is displayed. At small times, the

New Journal of Physics 6 (2004) 116 (http://www.njp.org/)

Institute of **Physics DEUTSCHE** PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT

particle has not yet entered the measurement region, so that the signal is essentially noise. At t close to 10 ms, a particle enters the measurement volume and one observes the slow evolution of the amplitude corresponding to the motion of the particle inside the measurement volume. The frequency modulation due to changes in its velocity are also easily observed. Figure 6(b)displays a time-frequency picture (spectrogram) of the same signal. One column of the picture corresponds to a small time window of the signal centred around the corresponding time. The grey levels correspond to the amplitude of the power spectrum in this window. One can see a line of high energy that corresponds to the time evolution of the Doppler frequency shift due to the particle motion. It is obvious that the resolution of this technique is not high enough to extract the fast oscillations that are observed about t = 80 ms. The solid line is the output of the AML algorithm, using a time window of 15 consecutive samples. It can be seen that the algorithm extracts the frequency modulation even when it displays fast oscillations. The time response is restricted in part by the length of the time window and by the amplitude of the model noise [20, 26]. The resolution of the AML algorithm in estimating the Doppler shift is expected to be of the order of a few per cent of the velocity variance for the results presented below.

2.3.3. Particle position. The same algorithm can be used to extract the position of the particle. Indeed, let us consider N transducers in a line array, separated by a distance d. A monochromatic source at frequency ω , set at infinity in a direction that makes an angle θ with the line of transducers, creates an amplitude vector on the transducer array given by

$$\mathbf{Z} = [1, e^{i\omega d\cos\theta/c}, e^{2i\omega d\cos\theta/c}, \dots, e^{(N-1)i\omega d\cos\theta/c}],$$
(4)

where c is the speed of sound. One sees that such a source induces a spatial frequency on the line of transducers of

$$k = \frac{\omega \cos \theta}{2\pi c}.$$
(5)

Its measurement is equivalent to the estimation of the Doppler shift discussed above, and the AML algorithm can be used to extract the angle θ directly. Our set-up in which each transducer array is made of two perpendicular lines of transducers allows the measurement of two such angles with each cross array and, thus, defines a direction in space. Using two cross arrays, one obtains the position of the particle as the intersection of the two lines given by each of the arrays. An example of such a trajectory is given in figure 7. The resolution of the position measurement has not been studied in detail. The resolution of the *x* and *y* components is expected to be a fraction of a millimetre and the *z* component resolution is about 1 mm due to the use of only four transducers in one of the arrays. A good position resolution would require the use of more transducers as it depends mainly on the aperture of the array.

2.4. Numerical simulation

Several of our results will be compared with the analysis of DNS data which will also be used to link the properties of Lagrangian motion to the Eulerian characteristics of the flow field. This section describes the numerical method.

Institute of Physics DEUTSCHE PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT

 (\widetilde{u}) (\widetilde{u}) (

Figure 7. 3D trajectory reconstructed from the acoustics signals. Experiment #3, at $R_{\lambda} = 810$. Every 8 times step (i.e. every 1.2 ms) the position is marked as a filled circle symbol.

Numerical simulations refer to the integration of the incompressible Navier–Stokes equations in a cubic domain with 2π -periodic boundary conditions, using a parallel distributedmemory pseudo-spectral algorithm. The time evolution of Fourier modes is performed by a (second-order) leap-frog scheme. The large-scale kinetic-energy forcing is adjusted at each time step by scaling the amplitudes of modes $1.5 \le k < 2.5$ uniformly (phases are left to fluctuate freely), such as to compensate exactly for losses due to the viscous dissipation. This forcing scheme permits a rapid relaxation to stationarity [27]. Some Eulerian statistics of Run2 are reported in [28]; in particular, the Kolmogorov 4/5 law (including the viscous contribution) for isotropic and homogeneous turbulence has been checked carefully.

Fluid-particle trajectories are resolved in time by a second-order Runge–Kutta scheme [16]. Cubic spline interpolation is used to evaluate Lagrangian quantities from Eulerian fields. For Run1, 5000 particles, uniformly distributed at the initial time, are tracked for about $50T_E$ (T_E is the Eulerian integral-scale eddy turnover time). For Run2, 10000 particles are tracked for about $15T_E$. Along the fluid-particle trajectories, the velocity v, the gradient of pressure ∇p , the dissipation $v\Delta v$ and all derivatives of the velocity $\partial_j v_i$ are recorded at each time step. The parameters of the numerical simulations are given in tables 2 and 3.

3. Kolmogorov's 1941 theory

The Kolmogorov 1941 theory (K41) addresses mainly the Eulerian velocity field and relies on the von Kármán–Howarth relationship [29]. In the case of one-particle Lagrangian velocity, there is no equivalent theoretical relation but one can derive dimensional predictions in the same spirit as the K41 theory. For example, one expects the Lagrangian second-order structure function to behave linearly in both the time scale τ and the mean dissipation rate ϵ in the inertial range:

$$D_2^L(\tau) = \langle (v(t+\tau) - v(t))^2 \rangle = C_0 \epsilon \tau.$$
(6)

New Journal of Physics 6 (2004) 116 (http://www.njp.org/)

Institute of Physics DEUTSCHE PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT

Table 2. Parameters and Eulerian characteristic scales of simulated flows: u_{rms} is the root-mean-squared velocity, ν the kinematic viscosity, ε the mean dissipation, $\eta \equiv (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ the Kolmogorov dissipative scale, $\lambda \equiv \sqrt{15\nu u_{rms}^2/\varepsilon}$ the Taylor micro-scale and $R_{\lambda} \equiv u_{rms}\lambda/\nu$ is the Taylor-scale Reynolds number. $L \equiv \pi/2 \int k^{-1}E(k) dk/u_{rms}^2$ is the integral scale, where E(k) denotes the mean energy spectrum.

	Grid	$u_{rms} ({\rm ms^{-1}})$	$v (m^2 s^{-1})$	$\varepsilon (\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-3})$	η (m)	λ (m)	R_{λ}	<i>L</i> (m)
Run1	128 ³	0.12	5.4 10 ⁻⁴	1.0 10 ⁻³	0.020	0.34	75	1.2
Run2	256 ³	0.12	1.5 10 ⁻⁴	1.0 10 ⁻³	0.0075	0.18	140	1.2

Table 3. Eulerian and Lagrangian characteristic times of simulated flows. $T_E \equiv L/u_{rms}$ is the integral-scale eddy turn-over time, T_L the Lagrangian velocity correlation time and $\tau_{\eta} \equiv (\nu/\varepsilon)^{-1/2}$ the Kolmogorov dissipative time. δt is the time step of the simulation.

	R_{λ}	T_E (s)	$T_L(\mathbf{s})$	$ au_{\eta}$ (s)	δt (s)
Run1	75	6.75	5.9	0.74	0.025
Run2	140	6.75	4.8	0.39	0.005

It follows from this relation that the power spectrum of the Lagrangian velocity should scale as

$$E^{L}(\omega) \propto \epsilon \omega^{-2}.$$
(7)

This section is devoted to a comparison of our measurements with these dimensional K41 predictions.

3.1. Lagrangian velocity PDF

Figure 8 displays the PDF of one component of the Lagrangian velocity at $R_{\lambda} = 810$. It is compared with a Gaussian function of the same variance. The Gaussian shape for the Lagrangian velocity PDF is expected from the Eulerian measurements. Indeed, for homogenous and isotropic turbulence, the theory predicts that any single point statistical quantities should be identical for the Lagrangian or Eulerian fields [24]. There is a general agreement that the Eulerian velocity has a Gaussian distribution for homogeneous and isotropic turbulence [29]. Thus, the same distribution is expected in the Lagrangian case. One can see that, the agreement is very good, except for strongly negative values. The departure from the Gaussian shape observed for negative values may be due to the non-homogeneity of the flow as there is a mean recirculation of the fluid (generated by the differential rotation of the discs and by the centrifugal pumping). The decrease in probability for velocities close to 0 m s^{-1} is due to the pre-processing filtering operations that remove the contributions from the echoes at zero frequency shift, but which also remove the signal part. This cannot be avoided as the echoes create a large spectral component around zero frequency whose magnitude is typically three orders of magnitude larger than the particle signal. It makes the extraction of the particle Doppler impossible for zero velocities. For the



Figure 8. PDF of one velocity component (solid) at $R_{\lambda} = 810$. The small dip observed for velocity values close to zero is due to the preprocessing filtering operations. The dashed line is a Gaussian distribution with the same variance as the experimental data.

data set presented in figure 8, the non-accessible velocities are less than 0.1 m s^{-1} . For other Reynolds number, the observations are the same once rescaled by the velocity variance. Note that the probability of observing a zero velocity is not strictly zero, as the spectral estimation algorithm is coupled with a Kalman filter that partially reconstructs the zero-crossings of the frequency modulation. We do not expect this gap to have a significant effect on the analysis of the Lagrangian dynamics. Indeed, we show in section 5.1 that the PDF of velocity increments for time lags larger than the integral scale do not display this type of gap and are almost perfectly Gaussian. In addition, the observed intermittency properties, as shown below, are very close to those derived from DNS data.

3.2. Lagrangian velocity autocorrelation function

We consider two estimators of the autocorrelation coefficient $R^{L}(\tau)$ of one component v of the Lagrangian velocity. The first stems from its definition,

$$R^{L}(\tau) = \frac{1}{\sigma(\tau)^{2}} \langle v(t+\tau)v(t) \rangle, \tag{8}$$

where $\langle \rangle$ is the average over all recorded events. $\sigma(\tau)^2$ is the velocity variance of recorded tracks whose duration is longer than τ . These tracks are the only ones to contribute to the estimation of $R^L(\tau)$ as obviously v(t) and $v(t + \tau)$ cannot be measured for tracks shorter than τ . Because of the finite size of the measurement volume, the length of the recorded tracks displays a non-trivial distribution and we observe the following measurement bias: the particles that remain the longest in the measurement volume are the slowest. This means that as the value of τ is increased, one selects particles that are slower and slower. The evolution of $\sigma^2(\tau)$ is displayed in figure 9. The decrease in the variance with increasing width τ of the time interval is small but visible. We expect the normalization of equation (8) by $\sigma(\tau)^2$ instead of the total velocity variance to help correct for the bias.

New Journal of Physics 6 (2004) 116 (http://www.njp.org/)



Figure 9. Velocity variance $\sigma^2(\tau)$ of the recorded tracks whose duration is longer than τ . Experiment #3, at $R_{\lambda} = 810$.

A second way to estimate the autocorrelation coefficient is to compute the second-order structure function $D_2^L(\tau) = \langle (v(t + \tau) - v(t))^2 \rangle$. It is related to the autocorrelation coefficient, for a stationary process, by

$$R^{L}(\tau) = 1 - \frac{D_{2}^{L}(\tau)}{2\sigma(\tau)^{2}}.$$
(9)

The results of the two estimators are displayed in figure 10(a). The two curves display small but significant differences. The direct estimate decreases faster and becomes negative at $\tau = 0.05$ s, whereas the structure function estimate remains positive for times up to integral time scale and larger. The estimate based on the second order structure function displays an almost perfect exponential decrease within the estimation fluctuations. The difference of shape comes from the measurement bias discussed above. The normalization by σ^2 cannot correct the bias in the first estimate as it becomes negative (and will remain negative when divided by a positive value). This is not the case for the second estimate as the second-order structure function takes only positive values and is indeed unbiased by the normalization; in the following, we use the second estimator in the computation of $R^{L}(\tau)$. One can see here the importance of the size of the measurement volume compared with the integral length scale. In our case, the linear size of the measurement volume is about twice the integral length scale L, and there is still a small effect on the measurement. This effect is expected to be much more significant for smaller volumes. The negative values of the first estimator can be interpreted in the following way: particles that circle inside the measurement volume have a tendency to remain a long time in it. This creates a bias towards an anti-correlation of the Lagrangian velocities. The bias does not have a large effect on our results especially for those based on the structure functions as they can be corrected for these biases.

After correction for the bias, one can conclude that the autocorrelation function for homogeneous turbulence displays an exponential decrease for large time scales. This is in agreement with what has been suggested by previous experiments at lower Reynolds numbers [8]–[11], [30]. One defines the integral time scale T_L as the characteristic time of the exponential decrease of the Lagrangian velocity autocorrelation. In the experiment at $R_{\lambda} = 810$, one obtains



Figure 10. Lagrangian velocity autocorrelation coefficient. (a) Comparison of the two estimators for $R_{\lambda} = 810$. (---) direct estimation using equation (8), (----) estimation using the second-order structure function; (....) exponential decrease fitted to the solid line. Inset: same plot in semi-logarithmic scale. (b) The dashed and dash-dotted lines correspond to the autocorrelation of two orthogonal components of the velocity vector. The solid line corresponds to the cross-correlation between these two components.

 $T_L = 22.4$ ms, which is of the same order of the frequency of the blades (17.4 ms: disc rotation frequency/number of blades). In the case of smooth discs (experiment #1), one obtains $T_L = 42.5$ ms compared with the period of the disc rotation, T = 57.1 ms. It can be seen that this Lagrangian integral scale is of the same order of magnitude as the characteristic time of flow forcing (energy injection). We have also observed that when the geometry of the flow is fixed (experiments #2–4) the product of the velocity variance by the Lagrangian integral time scale defines an integral length scale that is constant ($\sigma T_L \sim 22.5 \pm 0.6$ mm for all three experiments).

Figure 10(b) displays the autocorrelation of two orthogonal components of the velocity together with their cross-correlation. The cross-correlation remains null at all times (within the estimation uncertainty). We note that these correlations are determined less accurately than in figure 10(a) because the necessity of matching the events from the two acquisition channels



Figure 11. Details of autocorrelation coefficient of one component for small times; experiment #3, at $R_{\lambda} = 810$. The circles are the data points, the dotted curve is the single exponential fit and the dashed curve corresponds to equation (10).

decreases the amount of available data (the number of samples is decreased by a factor 3 compared with figure 10(a)).

Figure 11 shows the autocorrelation coefficient for the smallest values of the time lag τ . One can observe a clear departure from the exponential behaviour (which appears linear at these time scales). The experimental curve is rounded and displays a horizontal asymptote at $\tau = 0$. This behaviour is expected from the well-known physical argument that the curvature of the velocity autocovariance is equal to the acceleration variance. As this acceleration variance is finite for finite Reynolds numbers, the velocity autocorrelation has to display a finite curvature at the origin. This introduces another time scale [31]. To estimate it, we fit the experimental curve by the expression proposed by Sawford in his second-order stochastic model [2],

$$R^{L}(\tau) = \frac{T_{L} \exp(-\tau/T_{L}) - T_{2} \exp(-\tau/T_{2})}{T_{L} - T_{2}}.$$
(10)

For the measurement at $R_{\lambda} = 810$, the fit gives $T_2 = 0.4$ ms. This value is 60 times smaller than the integral time scale T_L and twice the estimated Kolmogorov time scale. In [14], a value of $T_2 \approx 0.7 \tau_{\eta}$ is reported. One interpretation is that T_2 is a characteristic time scale related to the dissipation. In our case, our interpretation is that due to its size, the particle does not respond perfectly to the flow solicitations and acts as a low-pass filter. Thus, the value of T_2 estimated in our measurements is equal to $3\tau_{\eta}$ and should be considered a time characteristic of the response of the particle. Nevertheless, our observations show than only two time scales are involved in the velocity autocorrelation: the integral scale T_L related to the energy input, and a small scale linked with the energy dissipation (as T_2 is clearly in the dissipation range).

In the limit of large Reynolds numbers, in the framework of the Kolmogorov theory, one expects the second-order structure function to behave as

$$D_2^L(\tau) = C_0 \epsilon \tau, \tag{11}$$



Figure 12. Second-order structure function normalized by $\epsilon \tau$: (Δ) experiment #5 (sphere diameter 1 mm); (\Box) experiment #3 (sphere diameter 250 μ m); (\star) Sawford model [2] (with $a_0 = 6$ and $C_0 = 4.1$, i.e. $T_2 = 0.073$ ms); and (\circ) exponential fit.

and C_0 to be a universal constant. A first way to estimate the numerical value of C_0 is to find the maximum C_0^* of the function

$$\frac{D_2^L(\tau)}{\epsilon\tau} \tag{12}$$

which should tend to C_0 as the Reynolds number tends to infinity. This function is displayed in figure 12 for $R_{\lambda} = 810$ and the values of the maximum for the various experiments are given in table 1. The different curves in figure 12 correspond to two different sizes of the particles, the Sawford model [2] (with $a_0 = 6$ from [14] and with $C_0 = 4.1$ to reproduce the observed velocity autocovariance), and the exponential fit of the velocity autocovariance function. The Sawford model is expected to be close to the real curve. Even for the smaller particle, our estimation is significantly lower than the Sawford model curve at the smallest times which leads to the estimate $C_0^{\star} = 3.4$, whereas the Sawford model gives $C_0^{\star} = 3.8$. This is due to the time response of the particle which is not fast enough to follow the flow at its smallest time scales. The maximum is seen to be even lower for the larger particle. It means that in our experiments, C_0^{\star} depends more on the particle cut-off frequency than on the Reynolds number and makes any comparison between experiments difficult. One way to circumvent this problem is to try to extrapolate to infinite Reynolds number. As the smallest time scale T_2 is related to the Kolmogorov time scale, it will vanish at infinite Reynolds number so that one expects the second-order structure function to be

$$D_2^L(\tau) = 2\sigma^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{\tau}{T_L}\right) \right)$$

$$\sim \frac{2\sigma^2 \tau}{T_L} \quad \text{for } \tau \ll T_L. \tag{13}$$

New Journal of Physics 6 (2004) 116 (http://www.njp.org/)

Institute of Physics DEUTSCHE PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT

In that case, the C_0 parameter becomes simply

$$C_0 = \frac{2\sigma^2}{T_L \epsilon}.$$
(14)

This method to estimate C_0 from finite Reynolds number measurements is also found in [32]. The estimated values of C_0 are displayed in table 1. Except for the experiment with smooth disks, the value of C_0 is close to 4, which is consistent both with the estimation from atmospheric measurements [33] and with the values reported in [32]. For a given flow geometry, there is no dependence on the Reynolds number on this estimate of C_0 , within the precision of the experiment. The higher value obtained for the case of smooth disks may be due to the fact that the flow geometry is slightly different. Note that in equation (14), C_0 is defined only in terms of large-scale quantities so that it may be dependent on the structure of the flow.

3.3. Power spectrum

The estimation of the power spectrum of the Lagrangian velocity is difficult because of the structure of the signal. The raw data consist of a set of events of varying length (imposed by the residence time of the particle in the measurement volume). The common estimator of the power spectrum is based on the Fourier transform. One computes the spectrum over a window, of, say, 1024 samples, and then averages this spectrum by sliding the window over the signal. In our case, the estimation is reduced to the events that are larger than the length of the window. In particular, if one wishes to resolve the smallest frequencies, one has to increase the window size. It means that fewer and fewer events are used for the estimate. Another estimate of the power spectrum is obtained from the Fourier transform of the (biased) estimate of the autocovariance function. Even if the two estimates are supposed to have the same result as the number of samples tends to infinity, they yield different results in practice. The first estimator is well adapted at high frequencies and the second one gives better results at low frequencies (because the autocovariance function is noise-sensitive at high frequencies). Combining the two estimators in their respective domain of best confidence, one obtains the curve displayed in figure 13, which is compared with the Fourier transform of the fit given by equation (10):

$$E^{L}(\omega) = \frac{2\sigma^{2}}{T_{L} - T_{2}} \left(\frac{T_{L}^{2}}{1 + (\omega T_{L})^{2}} - \frac{T_{2}^{2}}{1 + (\omega T_{2})^{2}} \right).$$
(15)

One observes that the agreement between the two curves is excellent. Four regions can be identified in the experimental curve. At low frequency $(f < 1/2\pi T_L)$ the spectrum is flat (the Lagrangian velocity becomes uncorrelated at times larger than T_L). In the second region $(1/2\pi T_L < f < 1/2\pi T_2)$, the spectrum has a nearly algebraic decay with an exponent close to -2, consistent with (15) and with the Kolmogorov 1941 prediction (equation (7)). The third regime $(f > 1/2\pi T_2)$ has a faster fall-off than the inertial range power law until the signal reaches the noise level—for $f \simeq 1$ kHz in figure 13. At the highest frequencies (in figure 13 for f > 1.5 kHz), one can observe oscillations that trace back to the demodulation algorithm (whose cut-off frequency is about 1.1 kHz with the settings of figure 13). An *inertial range* is thus developing in between the frequencies $1/T_L$ and $1/T_2 \approx 1/\tau_\eta$. Its width is thus proportional to the turbulent Reynolds number R_{λ} of the flow, since $T_L/\tau_\eta \sim L\sqrt{\varepsilon}/\sigma\sqrt{\nu} = R_{\lambda}$. This, again, is observed in figure 13.

New Journal of Physics 6 (2004) 116 (http://www.njp.org/)



Figure 13. Lagrangian velocity power spectrum. The dot-dashed curve corresponds to the Fourier transform of the double-exponential fit (equation (15)). The dashed straight line is an guide to the eye for an ω^{-2} , K41 scaling.

and it would require much higher Reynolds numbers to observe a clear power-law scaling in the spectrum.

These first measurements (PDF and autocorrelation coefficient) are in full agreement with the few existing theoretical predictions that come from symmetry arguments and from Kolmogorov's 1941 theory. We can estimate the Kolmogorov constant C_0 used in models of Lagrangian dispersion. From an experimental point of view, the results presented in this section show that the acoustic technique developed here yields a measurement of the Lagrangian motion of single particles over more than two decades of frequencies (from 3 Hz to 1 kHz) with a dynamic range in excess of 60 dB (when the signal reaches the noise level). This level of performance is comparable with most hot-wire measurements used in Eulerian studies.

4. The Lagrangian acceleration

Even if the particle is not a perfect Lagrangian tracer, its response time is close to the Kolmogorov time scale. Thus, we expect its acceleration to display most of the properties of the actual Lagrangian acceleration. We first describe the experimental observations of the particle acceleration and then the results of numerical simulations which give the actual Lagrangian acceleration, albeit at a lower Reynolds number.

4.1. Experimental measurements

4.1.1. Particle size effect. As the particle is larger than the Kolmogorov scale, the smallest scales of the inertial range will be partially filtered out by the particle response to fluid solicitations.



Figure 14. Particle acceleration PDF (experiment #3, $R_{\lambda} = 810$).

This effect has been studied in detail in a previous paper [19] for the case of a particle settling in a fluid at rest. It was shown there that the particle response has a characteristic time

$$\tau_c \simeq 6.5 \sqrt{\frac{r_p(d-1)}{a_p}},\tag{16}$$

where r_p is the particle radius, d the density of the particle relative to that of the fluid and a_p a typical value for the acceleration of the particle. Let us assume that this behaviour is valid for a small particle in a turbulent flow. On the other hand, using a Kolmogorov scaling, the characteristic time at a length scale r should be proportional to

$$\tau(r) = \epsilon^{-1/3} r^{2/3} \tag{17}$$

(up to a multiplicative constant of order unity). Equating these two expressions with $r = r_p$, one can extract an expectation for the acceleration variance. The result is given in table 1 as σ_{a-exp} together with the measured acceleration variance. The two results are in good agreement considering the crudeness of the argument. The mismatch increases with the Reynolds number or the size because the implicit hypothesis that the particle is small compared with turbulence length scales becomes less and less accurate. Nevertheless, we can conclude so far that the filtering observed at small time scales comes is due to the finite size of the particle. The particle does not react perfectly to solicitations of the flow that occur at scales smaller than its radius. The experiment at Reynolds number 1000 can be compared with the data by Voth *et al* [14] at the same Reynolds number and a particle size of 450 μ m, which has roughly the same ratio to the Kolmogorov length scale (about 25). They report a value of a_0 lying between 1.5 and 2, whereas in our experiment #4 we get only 0.5. The difference between the two experiments cannot be explained by the uncertainty on the estimation of the dissipation rate alone.

4.1.2. Particle acceleration PDF. Figure 14 shows the PDF of the acceleration at $R_{\lambda} = 810$. It is strongly non-Gaussian and has a flatness factor equal to 19. This curve must be compared with the Lagrangian acceleration measured from the motion of very small tracer particles [15]; in this work, flatness factors up to 55 have been reported. In our case, the distribution is not



Figure 15. Examples of events with high particle accelerations (experiment #3, $R_{\lambda} = 810$).

as wide because the particle does not respond to the smallest scales of the flow. Numerically, we observe at $R_{\lambda} = 810$ a particle acceleration variance equal to $280 \,\mathrm{m \, s^{-2}}$, and very intense acceleration events can be detected, as intense as $4000 \,\mathrm{m \, s^{-2}}$ (i.e. 14 times the acceleration variance or 400 times larger than gravity!). Example of such intense acceleration events are displayed in figure 15. We have observed that these very intense events look either like impulsions (figure 15(a)) or oscillations (figures 15(b) and (c)).

4.1.3. Particle acceleration autocorrelation. Figure 16(a) shows the autocorrelation coefficient for one component of the particle acceleration vector. The correlation decreases very rapidly and becomes negative for times larger than $9\tau_{\eta}$. This zero crossing is expected since the integral of the autocorrelation must be zero. Thus, the correlation takes small negative values and tends to zero at infinite time lags. On the same graph, the cross-correlation of two components of acceleration is displayed. It can be seen that they are uncorrelated at all times. The zero crossing of the autocorrelation occurs for time lags of about eight Kolmogorov times. This is four times longer results than reported from other experiments or numerical simulations [12, 14, 16, 34] due to the time response of the particle. In [12, 14], the particle tracer is much smaller (about one Kolmogorov length scale) and thus displays a much shorter time response.

New Journal of Physics 6 (2004) 116 (http://www.njp.org/)



Figure 16. Particle acceleration autocorrelation coefficients, $R_{\lambda} = 810$. (a) Autocorrelation coefficient of one component (——) and cross-correlation of two components of acceleration (–––). (b) Autocorrelation coefficient of the absolute value of one component (——) and cross-correlation of the absolute values of two components of acceleration (–––). In each case, the inset shows the curves as a function of τ/τ_{η} , instead of τ/T_L .

We cannot study directly the amplitude of the acceleration vector since we have access to only two of its components, but we can make a rough estimate of its dynamics by studying the absolute value of the acceleration components. The autocorrelation and cross-correlation coefficients are displayed in figure 16(b). Their behaviour is quite different from that of the signed components. First, the decrease is much slower. The absolute value remains correlated for times up to the integral scale. Secondly, the cross-correlation is no longer zero and remains very close to the autocorrelation.

Institute of **Physics DEUTSCHE** PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT

The above observations are consistent with Pope's proposition [35] to write the Lagrangian acceleration as

$$\mathbf{a}(t) = A(t)\mathbf{e}(t),\tag{18}$$

where A(t) is the amplitude and $\mathbf{e}(t)$ the direction vector, these two quantities being independent. His numerical observation is that \mathbf{e} has a typical decorrelation time that scales as τ_{η} . This is confirmed by experiments [14] that show a decrease of the (signed) acceleration autocovariance over time close to τ_{η} . The DNS of Yeung and Pope [16] and Yeung [34] shows that the acceleration amplitude remains correlated over a time that increases with R_{λ} . Our observation is that the decrease in the correlation of the acceleration amplitude covers the entire inertial range, ending at the integral scale. The link between the amplitude of one acceleration component $|a_i(t)|$ and the acceleration modulus A(t) is not straightforward except under the hypothesis that both e_i and $|e_i|$ have a decorrelation time of the order of τ_{η} . In this case, and assuming the independence of \mathbf{e} and A, the autocorrelation of one acceleration component maybe rewritten as

$$R^{L}_{|a_{i}|}(\tau) = \frac{\langle A(t)A(t+\tau)\rangle\langle |e_{i}(t)e_{i}(t+\tau)|\rangle - \langle A\rangle^{2}\langle |e_{i}|\rangle^{2}}{\langle A^{2}\rangle\langle |e_{i}|^{2}\rangle - \langle A\rangle^{2}\langle e_{i}\rangle^{2}}.$$
(19)

Then for times larger than a few τ_{η} one obtains

$$R_{|a_i|}^L(\tau) = \frac{(\langle A(t)A(t+\tau)\rangle - \langle A\rangle^2)\langle |e_i|\rangle^2}{\langle A^2\rangle\langle |e_i|^2\rangle - \langle A\rangle^2\langle e_i\rangle^2} \propto R_A^L(\tau).$$
(20)

Under the same set of assumptions, the cross-correlation would also be proportional to R_A^L in the inertial range. The hypothesis of the short time correlation of e_i has been verified by Yeung and Pope [16] in a low Reynolds number DNS, but the same hypothesis for $|e_i|$ is *ad hoc* and can only be checked from a full three-component measurement of the Lagrangian acceleration or from DNS data. We will return to this point in the next section.

We conclude from the experimental results that the Lagrangian acceleration presents complex dynamics that involves both the dissipation time scale for the evolution of its direction and the integral time scale for the dynamics of its amplitude. This behaviour violates the K41 postulate that the acceleration characteristics should be independent of the integral time scale.

4.2. Numerical simulations

Even though our simulations are restricted to relatively low Reynolds numbers ($R_{\lambda} = 75$ or 140), they have the advantage of giving access to full 3D quantities, in particular the acceleration amplitude. In addition, one gets the true fluid particle acceleration in this case. We will show that the features described in the previous section concerning the particle acceleration are also observed in the numerical fluid acceleration. We also check the hypothesis developed in the previous section.

4.2.1. Lagrangian acceleration components. Figure 17 shows the autocorrelation coefficients of the (signed) acceleration components. The curves are qualitatively similar to the experimental autocorrelation functions for the particle acceleration except that they reach zero in a time of $2.05\tau_{\eta}$ at $R_{\lambda} = 75$ and $1.95\tau_{\eta}$ at $R_{\lambda} = 140$. These values are similar to the one reported by Yeung and Pope [16] and Yeung [34]. The components of the Lagrangian acceleration are uncorrelated.



Figure 17. Lagrangian (signed) acceleration autocorrelation coefficients for $R_{\lambda} = 75$ (O) and $R_{\lambda} = 140$ (*). Autocorrelation of one component (——) and cross-correlation of two components of the Lagrangian acceleration (– –). The inset shows the curves as a function of τ/τ_{η} , instead of τ/T_L .

4.2.2. Amplitude and direction of the Lagrangian acceleration. We now turn to the behaviour of the acceleration modulus. Figure 18 shows the autocorrelation coefficient of the modulus of the acceleration vector, to which we compare the autocorrelation of the absolute value of one acceleration component and the cross-correlation of the absolute value of two components. For times larger than $1.5\tau_{\eta}$, the three curves can be superimposed after multiplication by a numerical factor. This in agreement with equation (20). To check the corresponding hypothesis, we study the behaviour of the unit vector **e** giving the direction of the Lagrangian acceleration. In figure 19(a) it is observed that the (signed) components have a short correlation time (the zero crossing occurring at $3.7\tau_{\eta}$) and they are not cross-correlated, nor are they correlated with the amplitude of acceleration. When the same functions are computed for the absolute value of the correlation is always positive in that case). In addition, the absolute value of the components of **e** is not correlated with the amplitude *a*. These observations justify the hypothesis needed to obtain equation (20). To measure the autocorrelation of the magnitude of the Lagrangian acceleration in the inertial range, one only needs a 1D measurement of the acceleration.

If one has a closer look at figure 18, one can see that the curves corresponding to the two different Reynolds numbers are not superimposed when the time is scaled either by T_L or by τ_{η} . One can only partially rescale the curves: for long times ($\tau > 2T_L$) the curves seem to scale with T_L so that the full damping of the correlation occurs only at times of the order of the large time scale. For very short times ($\tau < 2\tau_{\eta}$), the scaling seems to be with τ_{η} . In the inertial range, the two curves are not found to scale either with the dissipation nor the integral time scales. The question of the dependence of this new time scale *T* as a function of the Reynolds number cannot be addressed here except by saying that T/T_L seems to decrease with R_{λ} while T/τ_{η} seems to increase with R_{λ} .



Figure 18. Lagrangian acceleration modulus autocorrelation coefficients for $R_{\lambda} = 75$ (\odot) and $R_{\lambda} = 140$ (*). Autocorrelation of the modulus of the amplitude of the Lagrangian acceleration vector (——), autocorrelation coefficient of the absolute value of one component (·—·—) and cross-correlation of the absolute value of two components (–––). The two latter quantities have been multiplied by a factor of 3.65 and 4.2, respectively, for $R_{\lambda} = 75$, and 3.8 and 4 for $R_{\lambda} = 140$.

4.2.3. Characteristic times. It is instructive to compare the characteristic times for the velocity, acceleration and acceleration modulus. This is done in figure 20 where the autocorrelation coefficients for these quantities are plotted in the same graph. One observes there that the acceleration modulus shares the long time correlation established for the velocity. This again emphasizes that a scale separation between velocity and acceleration is not observed, in contradiction with the Kolmogorov 41 hypothesis. The Lagrangian acceleration displays features that are definitely linked with the integral scale.

5. Lagrangian intermittency

The Lagrangian acceleration has a strongly non-Gaussian behaviour, as observed in our experiments and reported in [13]. On the other hand, it is also well established that the Lagrangian velocity has Gaussian statistics. Thus, one expects to observe intermittency, i.e. a progressive evolution of the Lagrangian velocity time increments from Gaussian statistics at large time scales to non-Gaussian distributions at dissipative time scales. This section is devoted to the analysis of this behaviour.

5.1. PDF of velocity increments

To show and characterize this Lagrangian intermittency, we study the evolution of the statistics of the Lagrangian velocity time increments

$$\Delta_{\tau} v(t) = v(t+\tau) - v(t) \tag{21}$$

New Journal of Physics 6 (2004) 116 (http://www.njp.org/)



Figure 19. Autocorrelation coefficients of the components of direction vector **e** for $R_{\lambda} = 75$ (O) and $R_{\lambda} = 140$ (*). (a) Signed quantities: autocorrelation of one component (——), cross-correlation of two components of the Lagrangian acceleration and cross-correlation of one component with the Lagrangian acceleration magnitude A (–––). (b) Absolute values: autocorrelation (——) and cross-correlation of the absolute value of the components of **e** and cross-correlation of the absolute value of one component and the magnitude A (–––).

as the time scale τ varies. The experimental PDFs for $\Delta_{\tau}v$ are presented in figure 21(a) for τ varying from $0.75\tau_{\eta}$ to $1.75T_L$. At scales larger than the integral scale, the measured PDF is Gaussian. As the time scale decreases, the PDFs develop stretched exponential tails. For the smallest time scale, one recovers the shape of the acceleration PDF. The tails do not become as wide as that of the acceleration PDF [13] (dashed line) because of the particle size effect.



Figure 20. Comparison of the different characteristic times. Autocorrelation of one component of the velocity (——), one component of the acceleration vector (–––) and the acceleration magnitude (·–·–) for the two Reynolds numbers $R_{\lambda} = 75$ (\odot) and $R_{\lambda} = 140$ (*).

Nevertheless, the consistency of our data with this measurement is quite obvious. Even though the DNS is done at moderate Reynolds numbers, intermittency is well observed there, as shown in figure 21(b), where the PDFs of the increments at $R_{\lambda} = 140$ are displayed.

5.2. The flatness

A first way to quantify the observed intermittency, as the change of shape of the velocity increment PDF, is to study the evolution of the flatness factor, i.e. the normalized fourth moment:

$$F(\tau) = \frac{\langle (\Delta_{\tau} \upsilon)^4 \rangle}{\langle (\Delta_{\tau} \upsilon)^2 \rangle^2}.$$
(22)

This is shown in figure 22 for the DNS data and the experimental measurement. At large scales the flatness factor is close to 3 as expected for a Gaussian distribution. The flatness then increases as the time scale decreases. The DNS data show that it increases for time scales down to $0.1\tau_{\eta}$. For example, at $R_{\lambda} = 140$, the flatness is only 14 at $\tau = \tau_{\eta}$ and saturates at a value equal to 22 at the smallest scales. This increase in the flatness for time scales below the Kolmogorov dissipative time is noteworthy. For instance, it means that the flatness factor computed from the optical measurements in [13] is probably slightly underestimated, as the effective cut-off corresponds to a scale close to $0.2\tau_{\eta}$. Our measurements have the same behaviour, except that the increase in the flatness with decreasing scale shows an inflection at $\tau = 3\tau_{\eta}$ so that at $\tau = \tau_{\eta}$ it has almost saturated to a value close to 18. However, because of the finite time response of the tracer particles used here, this saturation value is much lower than what is expected at this Reynolds number (\approx 55; from [15]).

New Journal of Physics 6 (2004) 116 (http://www.njp.org/)



Figure 21. Normalized PDF of Lagrangian velocity increments. (a) Experiment at $R_{\lambda} = 810$: from top to bottom, the solid lines correspond to values of the time scale $\tau = 0.15, 0.31, 0.61, 1.2, 2.5, 4.9, 9.8, 20$ and 39 ms. The Lagrangian integral time scale is 22.4 ms. The dashed lines correspond to the experimental fit of the acceleration PDF proposed in [13]. The dotted line at the bottom corresponds to a Gaussian distribution. (b) DNS at $R_{\lambda} = 140$. From top to bottom, the solid lines correspond to values of the time scale $\tau = 0.07, 0.14, 0.27, 0.53, 1.05, 2.1, 4.2, 8.3 (0.67), 16.4 (1.34), 32.6 (2.65) <math>\tau_{\eta}$ (resp. T_L). The dotted line at the bottom corresponds to a Gaussian distribution. The curves have been vertically shifted for clarity.



Figure 22. Flatness of the Lagrangian velocity as a function of time scale: (\bigcirc) DNS at $R_{\lambda} = 75$; (*) DNS at $R_{\lambda} = 140$; (----) experiment at $R_{\lambda} = 810$. For each curve the vertical arrow indicates τ_{η} .

5.3. Structure functions

Intermittency is traditionally quantified by the evolution of the successive moments of the velocity increments with scale, i.e. using the structure functions:

$$D_{p}^{L}(\tau) = \langle (\Delta_{\tau} v)^{p} \rangle.$$
⁽²³⁾

Note that the PDFs of $\Delta_{\tau} v$ are symmetric due to the isotropy of the flow: a particle trajectory and a trajectory symmetric under any reflection are equiprobable. This is in contrast with the Eulerian case where the scale under consideration is a length scale. In this case, the von Kármán–Howarth– Monin relation states that the third moment of the Eulerian velocity increments is non-zero and related to the energy transfer rate.

The experimental structure functions are displayed in figure 23(a) for values of p from 1 to 6. We do not have a sufficient amount of data to estimate higher orders. For odd values of p, the structure functions are estimated using the absolute values:

$$D_p^L(\tau) = \langle |\Delta_\tau v|^p \rangle \tag{24}$$

because the signed moments are zero due to the symmetry of the distributions. Figure 24(a) shows the same quantities computed from the DNS data, for p up to 10. Such a high value is allowed by the small Reynolds number ($R_{\lambda} = 75$ is displayed) and the high statistics gathered in the numerical simulation. In both the DNS and the experiment, clear power laws $D_p^L(\tau) \propto \tau^{\zeta_p}$ are

New Journal of Physics 6 (2004) 116 (http://www.njp.org/)



Figure 23. Lagrangian structure functions $D_p^L(\tau)$. The curves have been shifted for clarity. (a) $D_p^L(\tau)$ as a function of the time scale τ , for p = 1, 2, 3, 4, 5, 6, from top to bottom. (b) Extended self-similarity: $D_p^L(\tau)$ as a function of $D_2^L(\tau)$, for p = 1, 3, 4, 5, 6, from top to bottom. The dashed lines corresponds to best fits of power-law behaviour $D_p^L(\tau) \propto D_2^L(\tau)^{\xi_p}$.

not observed in natural unit plots. In the DNS case, this could be justified by the low Reynolds number, but even for the experiment at $R_{\lambda} = 1000$ no true scaling can be found. Note that this could be expected from the exponential behaviour of the second-order structure function, which is not rigourously compatible with a linear scaling in the inertial range.

Institute of Physics DEUTSCHE PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT



Figure 24. The Lagrangian structure function $D_p^L(\tau)$ for $R_{\lambda} = 75$. The curves have been shifted for clarity. (a) $D_p^L(\tau)$ as a function of the time scale τ , from top to bottom: p = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 and 10. (b) $D_p^L(\tau)$ as a function of $D_2^L(\tau)$: extended self-similarity. From top to bottom: p = 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 and 10. The dashed lines correspond to power-law best fits $D_p^L(\tau) \propto D_2^L(\tau)^{\xi_p}$.

In such situations, it has now became common to study scaling properties using the hypothesis of extended self-similarity (ESS) [36], i.e. looking for power laws in the evolution of one structure function relative to another:

$$D_p^L(\tau) \propto D_q^L(\tau)^{\xi_{pq}^L}.$$
(25)

New Journal of Physics 6 (2004) 116 (http://www.njp.org/)

Institute of **Physics DEUTSCHE** PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT

Table 4. Structure function relative exponents for the experimental measurements and the DNS data. Uncertainties are estimated from the fluctuations of the local slope of the curves D_p^L versus D_2^L in log–log plots.

	Exp. #1 $R_{\lambda} = 510$	Exp. #2 $R_{\lambda} = 570$	Exp. #3 $R_{\lambda} = 810$	Exp. #4 $R_{\lambda} = 1000$	Experimental uncertainty	DNS	
р						$R_{\lambda} = 75$	$R_{\lambda} = 140$
1	0.57	0.56	0.56	0.56	±0.01	0.560 ± 0.005	0.56 ± 0.02
3	1.33	1.32	1.33	1.34	± 0.02	1.33 ± 0.01	1.30 ± 0.04
4	1.57	1.54	1.56	1.58	± 0.06	1.56 ± 0.03	1.50 ± 0.09
5	1.75	1.68	1.73	1.76	± 0.1	1.71 ± 0.06	1.61 ± 0.13
6	1.9	1.8	1.8	1.9	± 0.2	1.82 ± 0.08	1.69 ± 0.2
7						1.88 ± 0.1	1.74 ± 0.2
8						1.92 ± 0.14	
9						1.92 ± 0.2	
10						1.93 ± 0.3	



Figure 25. Structure function relative exponents ξ_p : (.....) experiment; (\blacktriangle) DNS $R_{\lambda} = 75$; (*) DNS $R_{\lambda} = 140$. The dashed line is a K41 prediction for Lagrangian exponents.

In the Eulerian case, the reference structure function is of third order, as it is assumed to scale linearly with the increment. In the Lagrangian case, the second-order structure function plays a similar role and is used as a reference. Figures 23(b) and 24(b) show the relative behaviour of the structure functions versus D_2^L . One observes a clear power-law scaling; the corresponding exponents ξ_p^L are given in table 4 (for the DNS data, relative scaling can be observed up to very high orders as shown in figure 24(b)). The values of measured exponents are given in table 4 and plotted in figure 25; as expected one observes a clear departure from the dimensional behaviour

Institute of Physics DEUTSCHE PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT

 $\xi_p^L = p/2$. It is found that the exponents from the DNS data are equal to the ones computed from the measurements (within estimation errors), despite the very large difference in Reynolds numbers. As observed in Eulerian measurements [37], the Lagrangian relative scaling exponents do not seem to depend on Reynolds number.

Another aspect of intermittency which has been the object of much debate over the years [29] is the function form of ξ_p as a function of p. Given the limited data set available in our study, the matter cannot be resolved here. The experiments allow an estimate of the first six orders, but for $p \leq 6$, there is no significant difference between the experimental and numerical exponents. Within experimental error, the $\xi_p(p)$ curve, for p < 6, is well fit by a quadratic law

$$\xi_p = \frac{1}{2}p(1 - \lambda^2(p - 2))$$
 with $\lambda^2 = 0.115 \pm 0.01$, (26)

which should be considered a next order improvement over the linear dependance assumed in a Kolmogorov K41 argument. For higher orders, the above equation predicts that the exponent ξ_p should decrease with increasing order. This is not consistent with the fact that the velocity should remain bounded. Indeed, it is not observed in our data, particularly in the numerics where orders up to 10 have been computed. Our observation is that the measured values of the exponents saturate for p > 7.

5.4. Multifractal random walk

As an alternative, a dynamical approach to intermittency has been proposed in [38]. In that framework, the Lagrangian velocity fluctuations are modelled by a stochastic equation of the Langevin type in which the force term has long-range correlations. Specifically, the stochastic process is a multifractal random walk (MRW) [39]; it is built such that the autocovariance of the logarithm of the velocity increments at the smallest time scale decreases logarithmically with increasing increment interval

$$\langle \ln |\Delta_{\tau_{\min}} v(t)| \ln |\Delta_{\tau_{\min}} v(t + \Delta t)| \rangle_t = -\lambda_1^2 \ln(\Delta t/T), \tag{27}$$

which reaches zero at a large time scale *T*. This ingredient is shown to lead to a log-normal multifractal process in which the correlation coefficient λ_1^2 is exactly equal to the intermittency parameters λ^2 in equation (26). The main advantage of the model is that the statistical description of intermittency in linked to specific features in the Lagrangian dynamics of fluid particles.

In the DNS, the smallest time scales are resolved ($\tau_{min} < \tau_{\eta}$), and we can study here in more detail the functional form of the autocovariance of the logarithm of the acceleration amplitude (figure 26(a)). The continuous lines show the actual acceleration modulus, whereas the dashed lines show the absolute value of one component of the acceleration. One observes that the acceleration displays almost one decade of logarithmic behaviour in the inertial range at $R_{\lambda} = 140$. In the dissipation range, the decay is slower. The decay to zero is not as abrupt as in the MRW model but is a smooth transition. The coefficient of the logarithmic decay

$$R_{\ln|a|} = -\lambda_1^2 \ln\left(\frac{t}{T}\right) \tag{28}$$

is computed to be $\lambda_1^2 \approx 0.14$, a value that is in good agreement with the intermittency parameter computed from the low-order scaling exponents, $\lambda^2 = 0.115 \pm 0.01$.

New Journal of Physics 6 (2004) 116 (http://www.njp.org/)


Figure 26. (a) Autocovariance of the logarithm of the acceleration magnitude (--) and the absolute value of one acceleration component (--). (O) $R_{\lambda} = 75$; (*) $R_{\lambda} = 140$; (--) best fit of logarithmic decrease $-\lambda_1^2 \ln(t/T)$ for the case $R_{\lambda} = 140$. $\lambda_1^2 = 0.142$, $T = 1.9T_L$. Inset in semilogarithmic units. (b) Autocovariance of the logarithm of the absolute value of one velocity increment component (----) for the experiments. Upper curve: exp. #1, $R_{\lambda} = 510$, smooth discs and time scale of the increments $1.8\tau_{\eta}$. Lower curve: exp. #3, $R_{\lambda} = 810$, discs with eight blades and time scale of the increments $2.7\tau_{\eta}$. (---) best fits of logarithmic decrease. Exp. #1: $\lambda_1^2 = 0.137$, $T = 19.5T_L$. Exp. #3: $\lambda_1^2 = 0.10$, $T = 3T_L$. Inset in semilogarithmic units.

New Journal of Physics 6 (2004) 116 (http://www.njp.org/)

Institute of Physics DEUTSCHE PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT

For the experimental measurement, instead of the acceleration, which we cannot estimate, we use velocity increments for the smallest time scale we actually resolve. We also cannot use the amplitude of the vector so we have to use the absolute value of the velocity increment. Its behaviour is close to that of the acceleration in the case of the DNS (figure 26(a)). The main effect of this replacement is to reduce the interval in which the logarithmic behaviour is observed. The experimental curves are plotted in figure 26(b) together with the logarithmic fits for two experiments: experiment #1 in which the discs have no blades ($R_{\lambda} = 510$), and experiment #3 with blades ($R_{\lambda} = 810$). In both cases, more than one decade of logarithmic decrease is observed. The decay rate λ_1^2 is close to the intermittency exponent. One important difference is the value of T. In the case of discs with blades, T is three times the integral time T_L . This is different from the DNS where T is twice T_L for both cases. However, in the case of the flow driven with smooth discs, T is 20 times T_L which is a very long time (note that our experimental technique allows us in that case to follow a particle during such long time intervals). We thus conclude that the Lagrangian acceleration dynamics can involve time scales that can be one order of magnitude larger than the integral time scale which is characteristic of the forcing.

Such long time correlations have yet to be explained, on theoretical or phenomenological grounds. One picture comes easily to mind. If a particle is caught in a vortex, then its motion consists of a centripetal acceleration. One component of the acceleration will display oscillations with a very short period. The acceleration amplitude, in contrast, will remain high as long as the particle is trapped inside the vortex, which can be as long as lifetime of the vortex. This (not unique) picture is supported by some experimental observations: the acceleration component is indeed short-time-correlated and its amplitude is long-time-correlated. In that case, the correlation time of the acceleration magnitude reflects in part the lifetime of the vortices present in the flow. The acceleration component has a time scale of the order of the Kolmogorov time, so this suggests that the vortices would have a length scale close to the dissipative scale, which is indeed true for the case of vorticity filaments. On the other hand, their lifetime would then be distributed up to the large time scales [21, 40]. Note that, in the above picture, filamentary vortices would contribute strongly to the statistics particle acceleration, but not necessarily to the statistics of the velocity itself which may be dominated by regions of weak acceleration. Indeed, the filaments are not associated with high-velocity events (in terms of velocity standard deviation).

5.5. Acceleration, dissipation and vorticity

As reported in previous work, information about the dynamics of Lagrangian motion can be gained by studying how the flow enstrophy and dissipation vary along particles paths. These quantities are extremely difficult to measure experimentally; one measurement has been reported very recently by Zeff *et al* [41] in a small volume fixed in space, but their variations along Lagrangian trajectories are only accessible through direct numerical simulations [16]. Using the DNS data, this section is devoted to the study of the particle acceleration conditioned on the Eulerian flow characteristics encountered during its motion: enstrophy, dissipation and vorticity.

5.5.1. Enstrophy and dissipation. We first consider the joint evolutions of the acceleration modulus (A), enstrophy (ω^2) and dissipation (ϵ), and begin with an analysis of their time



Figure 27. Cross-correlation coefficients of acceleration, enstrophy and dissipation for the DNS at $R_{\lambda} = 75$: (solid line) autocorrelation coefficient of the acceleration magnitude; (thick dashed line) $\chi(a, \omega^2)$; (thick dashed-dotted line) $\chi(a, \epsilon^2)$; (thin dashed line) $\chi(\omega^2, \epsilon)$.

correlations along Lagrangian trajectories. Figure 27 displays the correlation coefficients:

$$\chi(A,\omega^2)(\tau) = \frac{\langle (A(t+\tau) - \langle A \rangle)(\omega(t)^2 - \langle \omega^2 \rangle) \rangle}{\sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \langle (\omega^2 - \langle \omega^2 \rangle)^2 \rangle}},$$
(29)

and so on for the other pairs; the brackets stand for time average. These curves are very similar to those published by Yeung and Pope [16]. The cross-correlations (acceleration-vorticity and acceleration-enstrophy) have significant values, peaking at 0.5 for a zero time delay and decreasing only very slowly. It takes a time of the order of the Lagrangian integral time scale for the correlation coefficient to drop to half of its maximum value. These correlation functions are also observed to be asymmetric. The acceleration-vorticity cross-correlation peaks for negative values of the time lag and the decrease of the correlation is slower for negative values of τ . This means that the high-acceleration events tend to precede the high-vorticity events. This is consistent with the filament picture. If a particle is attracted to a vortex then the acceleration is higher on the edge of the vortex core, whereas the vorticity is greatest in the core. The vorticity-dissipation correlation peaks for positive values of τ and in the same way the decrease in the correlation is slower for $\tau > 0$. This is consistent with observations by Gotoh and Rogallo [42] and with recent measurements by Zeff et al [41], who report the vorticity lagging behind the dissipation in Eulerian measurements. Again this can be explained in the vorticity filament picture, the filaments being surrounded by a region of high dissipation that the particle must cross before reaching the high vorticity core. The acceleration-dissipation curve is harder to interpret. It is maximum for $\tau > 0$ and the correlation decreases faster for positive values of τ than for negative values. Note that long-time dynamics is observed in all

New Journal of Physics 6 (2004) 116 (http://www.njp.org/)

39 Institute of Physics DEUTSCHE PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT

these cross-correlation functions. One thus observes that the long correlations that constitute an essential feature of the Lagrangian dynamics are also found in the enstrophy and dissipation fields.

Large enstrophy or dissipation regions are probable candidates for the large changes observed in the momentum of the Lagrangian tracers, leading to the highly non-Gaussian Lagrangian acceleration statistics observed in experiments. It is thus of interest to investigate the relationship between the acceleration of the particle and the fluctuations of enstrophy or strain encountered during Lagrangian motion. One way to do this is to compute joint probabilities. For two independent variables, one should observe, for example,

$$P(A, \omega^2) = P(A)P(\omega^2), \tag{30}$$

where $P(A, \omega^2)$ is the joint PDF of A and ω^2 and P(A) is the PDF of the acceleration A. An estimation of the possible dependency is given by the study of the ratio of the left to the right components of the equation above, i.e. in the above example

$$\frac{P(A,\omega^2)}{P(A)P(\omega^2)}.$$
(31)

If the two quantities are independent then this ratio should be equal to unity. Figures 28(a), (b) and (c) show this ratio for the pairs of variables $(A, \omega^2), (A, \epsilon)$ and (ω^2, ϵ) , respectively, at $R_{\lambda} = 75$ (plotted only for value of the joint probabilities larger than 10⁻⁶). It is easily seen that the three quantities are not independent. For the three pairs of variables, the probability of observing simultaneous high values of the two quantities is much higher than would be the case if they were independent. The highest ratio is observed for the pair (A, ω^2) for which the ratio reaches values over 50. The pair (A, ϵ) shows values as high as 30, whereas the pair enstrophy-dissipation reaches values over 40. In all three cases the ratio increases along the diagonal of the picture. In contrast, the probability ratio to observe a small value of one of the variables while the other takes a large value is much less than 1. In agreement with previous numerical simulations [16] and recent measurement at a lower Reynolds number [41], this also indicates that high values of enstrophy and dissipation happen jointly. Another way to show the non-independence of the three quantities is to compute the conditional averages of one variable given another. We call, for example, $\langle a | \epsilon \rangle$ the average of the acceleration magnitude a conditioned on a given value of the dissipation ϵ . The different combinations are displayed in figure 28(d). As expected from the previous observations, the conditional averages are not constant. All of them are increasing functions of the conditioning variable confirming that the occurrence of large values of the three variables are highly correlated.

5.5.2. Vorticity filaments. The above observations support the hypothesis of a strong influence of vorticity on the acceleration dynamics. This suggests that the acceleration of the Lagrangian particle has its strongest variations when it enters regions of high vorticity. We call these regions 'filaments' (with no attempt to define them more precisely) and only associate their vorticity modulus and the local direction of their axis with these vortical structures. Doing so, it can be shown that the vortices that have the largest influence on the Lagrangian motion are those with axes perpendicular to the trajectory of the particle. To wit, we first compute the acceleration

~



Figure 28. (a)–(c) Ratio of the joint probability to the product of individual probabilities for the three following pairs of variables, respectively: (a, ω^2) , (a, ϵ) and (ω^2, ϵ) (from top to bottom). Direct numerical simulation at $R_{\lambda} = 75$. The grey scale is logarithmic. (d) Conditional average of the three quantities: $\langle a|\omega^2\rangle/\langle a\rangle$ (\bigcirc), $\langle a|\epsilon\rangle/\langle a\rangle$ (\bullet), $\langle \omega^2|a\rangle/\langle \omega^2\rangle$ (\square), $\langle \omega^2|\epsilon\rangle/\langle \omega^2\rangle$ (\blacksquare), $\langle \epsilon|a\rangle/\langle \epsilon\rangle$ (Δ) and $\langle \epsilon|\omega^2\rangle/\langle \omega^2\rangle$ (\blacktriangle).

components parallel and perpendicular to the local vorticity field along the trajectory:

$$\mathbf{a}_{\parallel} = (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\omega}) \frac{\boldsymbol{\omega}}{\parallel \boldsymbol{\omega} \parallel},\tag{32}$$

$$\mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\parallel} \tag{33}$$

and the acceleration induced by the filaments:

$$\mathbf{a}_{\omega} = \frac{1}{2}\omega \times \mathbf{v}.\tag{34}$$

(Note that $\frac{1}{2}\omega$ is the local rotation rate of the fluid particle; in the simple case of a solid rotation in the core of a single vortex, this quantity is the acceleration of the particle.) An example of

New Journal of Physics 6 (2004) 116 (http://www.njp.org/)



Figure 29. Example of time series of the *x* component of **a**, \mathbf{a}_{ω} , \mathbf{a}_{\perp} and \mathbf{a}_{\parallel} from top to bottom: DNS, $R_{\lambda} = 140$.

time variations of these quantities along a Lagrangian trajectory is shown in figure 29. It can be seen that \mathbf{a}_{ω} reproduces the occurrences of the large acceleration events (the variance of acceleration for the DNS represented in this picture is 0.09). When the acceleration values are comparable with the variance, \mathbf{a}_{ω} does not follow the same evolution as the particle acceleration, as these quantities are expected to be comparable only for high vorticity events. The acceleration perpendicular to the vorticity vector is seen to be almost equal to the full acceleration, especially for large accelerations. The acceleration parallel to vorticity displays much smaller fluctuations and is comparable with the full acceleration only when the latter is of low amplitude (of the order of the variance).

The features observed in single trajectories are robust at a statistical level. This is first shown in figure 30, which shows the PDFs of the four quantities. It is seen that the PDF of \mathbf{a}_{ω} captures the wide tails observed in the PDF of the full acceleration component, confirming the importance of the vorticity filaments. The acceleration parallel to the vorticity vector displays a much narrower

41



Figure 30. PDF of the *x* component of **a** (----), \mathbf{a}_{\parallel} (----), \mathbf{a}_{\parallel} (----) and \mathbf{a}_{ω} (\odot); DNS, $R_{\lambda} = 140$.



Figure 31. Time autocovariances of a (——), \mathbf{a}_{\perp} (–––) and \mathbf{a}_{\parallel} (·–·–) together with the cross-covariance of **a** and \mathbf{a}_{ω} (*); DNS, $R_{\lambda} = 140$.

distribution than the components of acceleration lying in the plane perpendicular to the vorticity vector, which show the exact same tails as the full acceleration. As a second test, we show, in figure 31, the time-correlation functions of $(\mathbf{a}, \mathbf{a}_{\perp}, \mathbf{a}_{\parallel})$ together with the cross-covariance of \mathbf{a}_{ω} and the full acceleration peaks at half the acceleration variance showing that \mathbf{a}_{ω} reproduces a significant part of the acceleration. This cross-correlation is only about 50% \mathbf{a}_{ω} and reproduces the behaviour of the acceleration only for large acceleration events

New Journal of Physics 6 (2004) 116 (http://www.njp.org/)

Institute of Physics DEUTSCHE PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT

(note that since the autocovariance is a second-order moment, it is not very sensitive to the tails of the distributions).

6. Conclusion

We have described an experimental technique for the measurement of the Lagrangian velocity of a fluid particle. The velocity is estimated from the Doppler frequency shift induced on sound scattered by a small solid tracer advected by the flow. The use of high-performance acquisition electronics and of a high-resolution spectral analysis algorithm yields a measurement with a fast time resolution (less than a ms) and a large dynamic range of velocity fluctuations (about 60 dB). When compared with optical tracking techniques, one important advantage of this acoustic technique is that it samples a very large measurement volume in both time and space. Particles are tracked for durations that exceed several integral time scales of the flow. Together with the time resolution of the measurement it yields records of Lagrangian velocity variations at all time scales in the inertial range and up to the largest time scales of the flow. The observations deduced from the measurement have also been compared with direct numerical simulations of Lagrangian trajectories. The agreement is excellent and thus validates the experimental measurement technique with which high Reynolds number flows can be studied. In addition, the numerical simulations complement the measurements because they compute some quantities that are not accessible to the experiment, such as the vorticity and dissipation rate.

We have observed that the velocity field is Gaussian with an exponential correlation in time. Second-order quantities such as the Lagrangian velocity spectrum are observed to follow dimensional predictions à la Kolmogorov (1941). The dynamics of the Lagrangian acceleration is shown to have a mixed behaviour in terms of the time scales involved. The direction of acceleration evolves over a time scale close to the Kolmogorov time scale, i.e. the dissipative scales. In contrast, the acceleration magnitude displays correlations over a much longer time scale. In particular, the correlation of the logarithm of acceleration decays to zero in a time of the order of the integral scales. This time scale depends on the flow under consideration: for the DNS it is $2T_L$, for the flow entrained by discs with blades it is $3T_L$ and for smooth discs it is much larger than the integral scale (close to $20T_L$). We have also observed that the Lagrangian dynamics displays a very strong intermittency, defined as the change in the functional form of the probability density of velocity increments. Structure function exponents relative to the second-order moment are found to be independent of the flow and Reynolds number. We believe that the long time correlations observed in the Lagrangian dynamics are the origin of the strong intermittency observed in the Lagrangian velocity time series. Dynamically, we observe that the Lagrangian dynamics is strongly influenced when the particles enters regions of high local vorticity (filaments). The analysis of $\frac{1}{2}\omega \times \mathbf{v}$ definitely shows that these intense events are responsible for the wide tails of the distribution of the acceleration components.

Acknowledgments

We are indebted to Marc Moulin for the realization of the experimental set-up and to Pascal Metz for the development of the electronic multiplexing device. We acknowledge many fruitful discussions with A Arnéodo, B Castaing, P Chainais and J Delour. This work has been partially supported by ACI grant #2226 of the French Ministère de la Recherche. Calculations have been

43

Institute of **Physics DEUTSCHE** PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT

performed using IBM SP computers at the Centre National Informatique de l'Enseignement Supérieur (CINES).

References

- [1] Falkovich G, Gawedzki K and Vergassola M 2001 Rev. Mod. Phys. 73 913
- [2] Sawford B L 1991 Phys. Fluids A 3 1577
- [3] Reynolds A M 2003 Phys. Fluids 15 L1
- [4] Taylor G I 1921 Proc. London Math. Soc. 2 20 196
- [5] Townsend A A 1954 Proc. R. Soc. A 224 487
- [6] Karnik U and Tavoularis S 1990 Phys. Fluids A 2 587
- [7] Sullivan P J 1971 J. Fluid Mech. 49 551
- [8] Snyder W H and Lumley J L 1971 J. Fluid Mech. 48 41
- [9] Sato Y and Yamamoto K 1987 J. Fluid Mech. 175 183
- [10] Virant M and Dracos T 1997 Meas. Sci. Technol. 8 1539
- [11] Ott S and Mann J 2000 J. Fluid Mech. 422 207
- [12] Voth G A, Satyanarayan K and Bodenschatz E 1998 Phys. Fluids 10 2268
- [13] La Porta A, Voth G A, Crawford A M, Alexander J and Bodenschatz E 2001 *Nature* 409 1017
- [14] Voth G A, La Porta A, Crawford A M, Alexander J and Bodenschatz E 2002 J. Fluid Mech. 469 121
- [15] Mordant N, Crawford A M and Bodenschatz E 2004 Physica D, in press
- [16] Yeung P K and Pope S B 1989 J. Fluid Mech. 207 531
- [17] Gotoh T, Rogallo R S, Herring J R and Kraichnan R H 1993 Phys. Fluids A 5 2846
- [18] Yeung P K 2001 J. Fluid Mech. 427 241
- [19] Mordant N and Pinton J-F 2000 Eur. Phys. J. B 18 343
- [20] Mordant N, Pinton J-F and Michel O 2002 J. Acoust. Soc. Am. 112 108
- [21] Cadot O, Douady S and Couder Y 1995 Phys. Fluids 7 630
- [22] Belin F, Maurer J, Tabeling P and Willaime H 1997 Phys. Fluids 9 3843
- [23] Mordant N, Pinton J-F and Chillá F 1997 J. Phys. II 7 1729
- [24] Monin A S and Yaglom A M 1987 Statistical Fluid Dynamics: Mechanics of Turbulence (Cambridge, MA: MIT Press)
- [25] Mordant N, Metz P, Michel O and Pinton J-F 2001 Phys. Rev. Lett. 87 214501
- [26] Mordant N 2001 PhD Thesis Ecole Normale Suprieure de Lyon
- [27] Eswaran V and Pope S B 1998 Comput. Fluids 16 257
- [28] Lévèque E and Koudella C R 2001 Phys. Rev. Lett. 86 4033
- [29] Frisch U 1995 Turbulence (Cambridge: Cambridge University Press)
- [30] Mickelsen W R 1955 NACA Technical Note 3570
- [31] Tennekes H and Lumley J L 1972 A First Course in Turbulence (Cambridge, MA: MIT press)
- [32] Lien R-C and D'Asaro E 2002 Phys. Fluids 14 4456
- [33] Hanna S R 1981 J. Appl. Meteor. 20 242
- [34] Yeung P K 1997 Phys. Fluids 9 2981
- [35] Pope S B and Chen Y L 1990 Phys. Fluids 2 1437
- [36] Benzi R, Ciliberto S, Tripiccione R, Baudet C, Massaioli F and Succi S 1993 Phys. Rev. E 48 R29
- [37] Arnéodo A 1996 EuroPhys. Lett. 34 411
- [38] Mordant N, Delour J, Lévèque E, Arnéodo A and Pinton J-F 2002 Phys. Rev. Lett. 89 254502
- [39] Bacry E, Delour J and Muzy J-F 2001 Phys. Rev. E 64 026103
- [40] Moisy F, La Porta A, Voth G A and Bodenschatz E 2000 Phys. Fluids 12 1485
- [41] Zeff B W, Lanterman D D, McAllister R, Roy R, Kostelich E J and Lathrop D P 2003 Nature 421 146
- [42] Gotoh T and Rogallo R S 1999 J. Fluid Mech. 396 257

New Journal of Physics 6 (2004) 116 (http://www.njp.org/)

Turbulence au voisinage d'une paroi solide

6.1 Présentation du problème

Du fait de la condition de vitesse nulle au bord, un écoulement turbulent subit une variation très rapide de sa vitesse moyenne au voisinage immédiat d'une paroi solide (figure 6.1) [37]. La présence de ce gradient de vitesse moyenne, appelé *cisaillement*, influence fortement la cinétique de l'écoulement près de la paroi. L'étude de ces propriétés cinétiques particulières est un sujet ouvert, présentant un enjeu théorique dont l'impact est important pour la modélisation numérique de la turbulence.



FIG. 6.1 – Profil de la vitesse moyenne U(y) d'un écoulement turbulent entre deux plans horizontaux d'équation $y = \pm h$ (données numériques, F. Laadhari). La variation de la vitesse moyenne près de la paroi définit une couche limite qui peut être décomposée en sous-couches : la souscouche visqueuse où les effets dissipatifs sont prépondérants (au voisinage immédiat de la paroi); la sous-couche logarithmique où les effets d'agitation turbulente dominent. La zone intermédiaire est appelée la zone tampon. L'étude des propriétés cinétiques de l'écoulement dans la sous-couche logarithmique est l'objet des travaux présentés dans ce chapitre.

Dans le domaine des simulations numériques des grandes échelles de la turbulence, les modèles actuels de viscosité sous-maille rencontrent des difficultés dans le traitement de la couche limite : ils s'avèrent en général trop dissipatifs [84] (article de revue). Une solution empirique souvent utilisée consiste à atténuer exponentiellement la viscosité turbulente près de la paroi, mais cette solution reste arbitraire. Les travaux présentés dans ce chapitre conduisent à l'introduction d'une nouvelle viscosité sous-maille qui tient compte explicitement du cisaillement et qui s'annule naturellement à la paroi. Ce modèle constitue une généralisation simple du modèle de Smagorinsky (1963) [85] au cas d'une turbulence non-homogène. Il est motivé par des considérations théoriques qui seront tout d'abord présentées.

L'équation de la dynamique de l'agitation turbulente s'écrit

$$\left(\frac{\partial u_i'}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right) + \left(u_j'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} - \overline{u_j'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}\right) + u_j'\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j\partial x_j}.$$
(6.1)

On revient ici aux notations du début en écrivant la vitesse $u_i = \overline{u_i} + u'_i$, où $\overline{u_i}$ est la composante moyenne de la vitesse et u'_i sa composante turbulente.

Le terme important de cette équation est $u'_j \partial_j \overline{u_i}$: il s'agit du terme de forçage du mouvement d'agitation turbulente par les gradients de la vitesse moyenne (voir le chapitre d'introduction). On fait généralement l'hypothèse que ce terme ne force la dynamique turbulente qu'à grande échelle. Ainsi, si l'on se place à des échelles suffisamment petites, on considère que l'agitation turbulente a perdu la mémoire de l'écoulement moyen et suit une statistique universelle, homogène et isotrope ; il s'agit du cadre (académique) des études présentées dans les chapitres précédents. Cette hypothèse est généralement valide loin de la paroi mais ne peut pas être admise près de la paroi, où le gradient de la vitesse moyenne est très grand. Lorsqu'on se rapproche de la paroi, l'échelle de variation de la vitesse moyenne diminue fortement ; elle décroît typiquement comme la distance à la paroi. Dans ce cas, se placer à des échelles suffisamment petites devant l'échelle de forçage n'a plus de sens. Il devient alors nécessaire de considérer l'influence directe du terme de production d'énergie $u'_j \partial_j \overline{u_i}$ sur la dynamique des petites échelles de la turbulence. Il faut donc tenir compte explicitement du cisaillement dans la description statistique de l'agitation turbulente.

Dans la section 6.2, nous décrirons brièvement la cinétique de l'écoulement moyen près de la paroi puis nous présenterons les résultats concernant la statistique turbulente dans la sous-couche logarithmique (section 6.3). Nous avons proposé une description unifiée de la turbulence qui repose sur l'introduction de fonctions de structure généralisées du champ de vitesse, qui tiennent compte du gradient de la vitesse moyenne. Cette description est en bon accord avec les données expérimentales et numériques. Une implication concernant la simulation des grandes échelles de la turbulence sera présentée dans la section 6.4. Il s'agit d'une perspective de recherche.

6.2 Description de l'écoulement moyen près d'une paroi solide

Dans un premier temps, il convient de caractériser l'écoulement moyen.

On peut distinguer différents types d'écoulements de paroi : les écoulements de conduite où la couche limite est généralement bien établie, et les écoulements externes : couche limite sur une plaque ou sur un profil d'aile, où la couche limite présente la particularité d'avoir une interface libre entre la partie turbulente et l'écoulement extérieur [13] [18] (cours de turbulence).

Nous aborderons ici le cas d'un écoulement de conduite entre deux plaques horizontales, parallèles et séparées d'une distance 2h (figure 6.2). Dans ce cas, le cisaillement est donné par

$$S(y) \equiv \frac{d\overline{u}(y)}{dy}.$$
(6.2)



FIG. 6.2 – Configuration de l'écoulement de conduite plan. Numériquement, les équations de Navier-Stokes sont intégrées par une méthode pseudo-spectrale : le champ de vitesse est décomposé en modes de Fourier dans les directions x et z, et en polynômes de Chebyshev dans la direction y. Les résultats numériques présentés dans ce chapitre ont été obtenus par Faouzi Laadhari du laboratoire de mécanique des fluides et acoustique de l'École Centrale de Lyon.

l'écoulement moyen entre deux plaques :

Nous notons (u,v,w) les trois composantes de la vitesse suivant les axes x, y et z; l'axe vertical est l'axe y. Pour simplifier les expressions, on considère ici que y est nul à la paroi. Les équations de l'écoulement moyen (supposé stationnaire) s'écrivent

$$0 = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \right)$$
(6.3)

$$0 = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} - \frac{\partial \rho v'^2}{\partial y}$$
(6.4)

$$0 = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} \tag{6.5}$$

On déduit de la troisième équation que la pression ne dépend que de x et $y: \overline{p} = \overline{p}(x,y)$. Si l'on intègre la seconde équation suivant l'axe vertical, on obtient $p_0(x) = \overline{p} + \rho v'^2$ où $p_0(x)$ désigne la pression hydrodynamique à la paroi. D'autre part, l'écoulement moyen est invariant par translation selon x d'où $\partial_x \overline{v'^2} = 0$. Il en suit

$$\frac{dp_0(x)}{dx} = \frac{d}{dy} \left(\mu \frac{d\overline{u}}{dy} - \rho \overline{u'v'} \right) = \text{Cte.}$$
(6.6)

On reconnaît dans cette expression le terme

$$\tau(y) = \mu \frac{d\overline{u}}{dy} - \rho \overline{u'v'},\tag{6.7}$$

qui correspond au frottement total : visqueux $(\mu d\overline{u}/dy)$ et turbulent $(-\rho \overline{u'v'})$ des filets de l'écoulement moyen. Dans le cas de l'écoulement entre deux plaques, le plan y = h est un plan de symétrie du mouvement moyen. Il en suit $\tau(h) = 0$ et donc finalement

$$\tau(y) = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{h} \right). \tag{6.8}$$

 τ_0 désigne la force de frottement (visqueux) qui agit sur l'unité d'aire de la paroi ; il s'agit également du flux de quantité de mouvement cédé par le fluide à la paroi [37].



FIG. 6.3 – Le frottement total de l'écoulement moyen est donné par $\tau(y)$. Près de la paroi, le frottement visqueux est important alors que le frottement turbulent (du mouvement moyen) est très faible. Lorsque l'on s'éloigne de la paroi, le frottement turbulent s'intensifie et le frottement visqueux diminue.

6.2.1 Les différentes zones de la couche limite

On peut distinguer plusieurs régions dans la couche limite :

– au voisinage immédiat de la paroi, les effets visqueux sont prépondérants : $\mu d\overline{u}/dy \simeq \tau_0$ (au premier ordre) d'où

$$\overline{u}(y) = y \frac{\tau_0}{\mu}.$$
(6.9)

Il y a à même la paroi une fine couche de fluide dans laquelle la vitesse moyenne varie linéairement avec y. La vitesse caractéristique u_0 , appelée vitesse de friction à la paroi, est définie par

$$u_0 = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}.\tag{6.10}$$

Si l'on considère les grandeurs sans dimension $\bar{u}^+ = \bar{u}/u_0$ et $y^+ = yu_0/\nu$, la loi de variation de la vitesse moyenne dans la sous-couche visqueuse s'écrit

$$\bar{u}^+ = y^+.$$
 (6.11)

Cette loi linéaire est généralement observée pour $0 < y^+ < 5 - 10$.

Près de la paroi, le développement de Taylor (suivant la direction y) du champ de vitesse turbulente s'écrit

$$u'(x,y,z,t) = b_1(x,z,t)y + \dots$$
 (6.12)

$$v'(x,y,z,t) = b_2(x,z,t)y + c_2(x,z,t)y^2 + \dots$$
 (6.13)

$$w'(x,y,z,t) = b_3(x,z,t)y + \dots$$
 (6.14)



FIG. 6.4 – L'énergie cinétique turbulente est $e'_c = \frac{1}{2}(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'})$; u_0 désigne la vitesse de friction à la paroi. Le terme de contrainte de Reynolds (par unité de masse) est $\overline{u'v'}$.

À la paroi $\partial u'/\partial x = 0$ et $\partial w'/\partial z = 0$: la condition d'incompressibilité impose $\partial v'/\partial y = 0$ et par conséquent $b_2(x,z) = 0$. L'énergie cinétique turbulente croît en y^2 et le tenseur des contraintes de Reynolds $\overline{u'v'}$ en y^3 (figure 6.4):

$$\overline{e'_c} = \mathcal{O}(y^2)$$
 et $\overline{u'v'} = \mathcal{O}(y^3).$ (6.15)

- ensuite, il y a une zone intermédiaire (*buffer layer*) dans laquelle les effets visqueux sont encore importants mais diminuent avec la distance à la paroi. Le frottement turbulent, quant à lui, s'intensifie avec la distance à la paroi (figure 6.3). Dans cette région, la viscosité s'applique à des tourbillons plus gros, porteurs d'énergie cinétique. Cette zone s'étend typiquement entre $5 10 < y^+ < 30$.
- enfin, la sous-couche logarithmique correspond à $y^+ > 30$. Le frottement entre les filets de l'écoulement moyen est essentiellement dû à l'agitation turbulente $\tau(y) \approx -\rho \overline{u'v'} \gg \mu d\overline{u}/dy$. On retrouve ici la condition de turbulence développée ; la viscosité cinématique ne joue aucun rôle dans la cinétique du mouvement moyen.

Pour déterminer le profil moyen de vitesse dans la sous-couche logarithmique, il est judicieux de considérer le taux moyen de dissipation (par unité de masse): $\varepsilon(y)$. Si l'on suppose que u_0 représente la valeur caractéristique des fluctuations de vitesse turbulente, on obtient

$$\varepsilon(y) = -\overline{u'v'}\frac{d\overline{u}}{dy} \sim u_0^2 \frac{d\overline{u}}{dy}.$$
(6.16)

D'autre part, un argument d'analyse dimensionnelle conduit à $\varepsilon(y) \sim u_0^3/L(y)$ où L(y) désigne l'échelle intégrale de l'agitation turbulente. Dans la sous-couche logarithmique, le mouvement du fluide ne possède aucune longueur caractéristique (interne) pouvant déterminer une macro-échelle. Ainsi, l'échelle intégrale est donnée par la distance y elle-même. On obtient ainsi

$$\varepsilon(y) \sim \frac{u_0^3}{y},\tag{6.17}$$



FIG. 6.5 – Profil renormalisé de la vitesse moyenne U(y) selon la direction y.

ce qui conduit au profil logarithmique (figure 6.5)

$$\frac{\overline{u}}{u_0}(y^+) = \frac{1}{\kappa}\log(y^+) + A,$$
 (6.18)

où κ est une constante universelle [86] (livre sur le sujet).

Enfin, le bilan d'énergie cinétique turbulente dans la sous-couche logarithmique s'écrit

$$-\overline{u'v'}\frac{d\overline{u}}{dy} = 2\nu \overline{\|S'\|^2}.$$
(6.19)

6.3 Description statistique de la turbulence dans la zone logarithmique

6.3.1 Échelles caractéristiques et lois d'échelle ; approche phénoménologique

Dans la sous-couche logarithmique, le mécanisme de cascade turbulente est perturbé par le cisaillement du mouvement moyen. Le cisaillement déforme les gros tourbillons et, de ce fait, modifie le processus de transfert d'énergie vers les petites échelles.

Si l'on considère un tourbillon de taille r, le temps associé à la déformation de ce tourbillon par le cisaillement est 1/S: ce temps ne dépend pas de l'échelle r. D'autre part, le temps associé à la dynamique propre de déformation du tourbillon, par interaction avec les autres tourbillons de même taille, est lui donné par $\varepsilon^{-1/3}r^{2/3}$: ce temps décroît avec l'échelle r.

Si l'on considère que le transfert d'énergie à l'échelle r est gouverné par le mécanisme le plus rapide, on s'attend à ce que celui-ci soit forcé par le cisaillement à grande échelle, et dominé par le mécanisme de cascade non-linéaire à petite échelle. Pour séparer ces deux régimes, il faut comparer les deux temps caractéristiques 1/S et $\varepsilon^{-1/3}r^{2/3}$. On obtient alors l'échelle caractéristique du cisaillement :

$$L_{\mathcal{S}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mathcal{S}^3}} \sim y$$
 dans la sous-couche logarithmique (turbulente). (6.20)



FIG. 6.6 – Représentation du transfert d'énergie turbulente vers les petites échelles, à une distance y de la paroi dans la sous-couche logarithmique. À grand échelle, le cisaillement force la dynamique de transfert d'énergie : $r S(y) \delta u(r,y)^2 \sim \varepsilon(y) r$. À petite échelle, le mécanisme interne de cascade d'énergie devient prépondérant : $\delta u(r,y)^3 \sim \varepsilon(y) r$. On se place ici dans le cadre phénoménologique de la théorie de Kolmogorov (1941).

Une illustration des mécanismes mis en jeu dans le transfert d'énergie vers les petites échelles, dans la sous-couche logarithmique, est présentée sur la figure 6.6.

Nous avons publié une description phénoménologique des propriétés statistiques des fonctions de structure de la vitesse turbulente dans la sous-couche logarithmique :

• «Scaling Properties of the Streamwise Component of Velocity in a Turbulent Boundary Layer», G. RUIZ-CHAVARRIA, S. CILIBERTO, C. BAUDET & E. LÉVÊQUE, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 141, 2000, p. 183

Un résultat important concerne l'universalité des lois d'échelles de ces fonctions de structure. Les lois d'échelle dépendent fortement de l'intensité du cisaillement et par conséquent de la distance à la paroi :

$$\langle |\delta u(r,y)|^p \rangle \sim r^{\zeta_p(y)}.$$
 (6.21)

Au contraire, le comportement relatif des fonctions de structure ne dépend pas de la distance à la paroi : $\zeta_p(y)/\zeta_q(y)$ est indépendant de y. Ce résultat est analogue à l'universalité des exposants relatifs observée pour le modèle en couche de la turbulence (voir le chapitre 2).

6.3.2 Les fonctions de structure généralisées de la vitesse

Dans un cadre plus général, nous avons proposé une description unifiée de la turbulence en présence d'un cisaillement. Il s'agissait de comprendre comment la phénoménologie de la turbulence homogène et isotrope pouvait être modifiée, ou généralisée, en tenant compte des effets du gradient de la vitesse moyenne (cisaillement). Nous avons proposé l'introduction d'une fluctuation généralisée de vitesse, permettant de rendre compte à la fois du mécanisme de transfert d'énergie forcé par le cisaillement et du mécanisme de transfert non-linéaire :

$$\delta \widetilde{u}(r,y)^3 = \underbrace{\delta u(r,y)^3}_{\text{transfert par la cascade}} + \alpha \underbrace{\mathcal{S}(y) \ r \ \delta u(r,y)^2}_{\text{transfert forcé par le cisaillement}}.$$
(6.22)

 α est un coefficient de pondération, indépendant de l'échelle r et de la distance à la paroi y. On considère ici des incréments de vitesse (longitudinaux) dans la direction de l'écoulement moyen.

Si l'on reprend les arguments de similarité de la théorie de Kolmogorov (1941), on est ainsi amené à considérer $\delta \tilde{u}(r,y)^3 \sim \varepsilon(y)r$, soit

$$\delta u(r,y)^3 + \alpha \,\mathcal{S}(y) \, r \,\,\delta u(r,y)^2 \sim \varepsilon(y) \, r \quad \text{pour } \eta \ll r \ll L. \tag{6.23}$$

En comparant l'importance relative des deux termes du membre de gauche, on retrouve l'estimation de l'échelle caractéristique du cisaillement L_S (introduite précédemment). D'autre part, on obtient

- pour
$$r > L_{\mathcal{S}}$$
 : $r \mathcal{S}(y) \delta u(r,y)^2 \sim \varepsilon(y) r$.

- pour
$$r < L_{\mathcal{S}}$$
 : $\delta u(r,y)^3 \sim \varepsilon(y) r$.

Nous avons aussi montré que ce formalisme permet de décrire le phénomène d'intermittence de manière unifiée à toutes les échelles inertielles, en tenant compte du cisaillement. Ces résultats ont été publiés dans l'article présenté dans la section 6.5 :

• «Shear Effects in Non-Homogeneous Turbulence», F. TOSCHI, E. LÉVÊQUE & G. RUIZ-CHAVARRIA, *Physical Review Letters*, vol. 85, 2000, p. 1436

Les arguments phénoménologiques développés dans cet article ont été démontrés de manière analytique pour la solution des équations de Navier-Stokes, en présence d'un cisaillement uniforme [87].

6.4 Applications importantes à suivre dans le domaine de la simulation des grandes échelles de la turbulence

Pour de grandes valeurs du nombre de Reynolds, il est impossible de prendre en compte toutes les structures turbulentes par une simulation directe (sans approximation) des équations de Navier-Stokes. Le maillage nécessaire serait trop fin et les calculs trop volumineux (voir le chapitre 3). Il faut alors se résoudre à ne traiter que les grosses structures du champ turbulent, que l'on isole par une opération de filtrage. Les petites structures disparaissent du champ étudié mais leur influence sur la dynamique des grosses structures doit être prise en compte. Il s'agit de la problématique de la simulation des grandes échelles de la turbulence (LES) [88] (livre sur le sujet).

6.4.1 Le cadre général de la modélisation sous-maille de la turbulence

La vitesse turbulente $u_i(\vec{x},t)$ est décomposée en une composante grande échelle

$$u_{i}^{<}(\vec{x},t) \equiv [H_{\Delta} \otimes u_{i}](\vec{x},t) = \int H_{\Delta}(\vec{x'})u_{i}(\vec{x}-\vec{x'},t)d\vec{x'}, \qquad (6.24)$$

où H_{Δ} désigne un filtre passe-bas de longueur caractéristique Δ , et une composante petite échelle $u_i^>(\vec{x},t)$ telle que

$$u_i(\vec{x},t) = u_i^<(\vec{x},t) + u_i^>(\vec{x},t).$$
(6.25)

À partir des équations de Navier-Stokes forcées, on établit

$$\frac{\partial u_i^<}{\partial t} + u_j^< \frac{\partial u_i^<}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(p^< \delta_{ij} + \tau_{ij} \right) + \nu \frac{\partial^2 u_i^<}{\partial x_j \partial x_j} + f_i^<, \tag{6.26}$$

оù

$$\tau_{ij} \equiv (u_i u_j)^< - u_i^< u_j^< \tag{6.27}$$

désigne le *tenseur de contrainte sous-maille*. τ_{ij} représente le courant de quantité de mouvement entre la composante grande-échelle et la composante petite-échelle de la vitesse turbulente.

Pour l'énergie cinétique des grandes échelles $e^<\equiv \frac{1}{2}(u_i^<)^2,$ on obtient

$$\frac{\partial e^{<}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_{i}} J_{i}^{<} = \underbrace{-\Pi^{<}}_{\text{flux sous-maille}} + \underbrace{f_{i}^{<} . u_{i}^{<}}_{f_{i}^{<} . u_{i}^{<}} - \underbrace{2\nu \|S^{<}\|^{2}}_{2\nu \|S^{<}\|^{2}}, \tag{6.28}$$

où

$$\Pi^{<}(\vec{x},t) \equiv -\frac{\partial u_{j}^{<}(\vec{x},t)}{\partial x_{i}} \cdot \tau_{ij}(\vec{x},t)$$
(6.29)

peut être vu comme le flux d'énergie sous-maille entre les grandes et les petites structures de l'écoulement, au point \vec{x} à l'instant t.

Dans une simulation des grandes échelles de la turbulence, seule la dynamique de la composante grande-échelle est intégrée ; l'interaction avec la composante petite-échelle est modélisée. Concrètement, il s'agit d'établir une équation fermée pour le champ de vitesse filtré $u_i^{\leq}(\vec{x},t)$, en définissant un ansatz pour le tenseur sous-maille, noté $\tilde{\tau}_{ij}$.

6.4.2 Le modèle de Smagorinsky

Le modèle proposé par Smagorinsky (1963) est sans doute le modèle sous-maille le plus simple que l'on puisse construire dans un contexte de turbulence homogène et isotrope [85] :

$$\widetilde{\tau_{ij}} \underbrace{-\frac{1}{3} \widetilde{\tau_{kk}}}_{\text{intégré dans la pression}} = -2\nu_t S_{ij}^{<}.$$
(6.30)

 ν_t est une viscosité turbulente sous-maille.

En analogie avec l'hypothèse de longueur de mélange, Smagorinsky propose

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 \|S^{<}\| \text{ avec } \|S^{<}\| \equiv \sqrt{2S_{ij}^{<}S_{ij}^{<}}.$$
(6.31)

 C_s est une constante empirique indépendante de Δ .

L'équation dynamique obtenue pour la composante grande-échelle de la vitesse s'écrit ainsi

$$\frac{\partial u_i^<}{\partial t} + u_j^< \frac{\partial u_i^<}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^<}{\partial x_i} + (\nu + \nu_t) \frac{\partial^2 u_i^<}{\partial x_j \partial x_j} \quad \text{avec} \quad \nu_t = (C_s \Delta)^2 \sqrt{2S_{ij}^< S_{ij}^<}. \tag{6.32}$$

On reconnaît l'équation de Navier-Stokes mais avec une viscosité modifiée. Si l'on reprend les arguments de la théorie de Kolmogorov (1941), on obtient que l'échelle élémentaire de la turbulence à grande échelle est donnée par

$$\eta^{<} = \left(\frac{(\nu + \nu_t)^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} = C_s \Delta \left(1 + \frac{\nu}{\nu_t}\right)^{1/2} \quad \text{en remarquant que } \varepsilon = (\nu + \nu_t) \|S^{<}\|^2.$$
(6.33)

Pour une turbulence pleinement développée, obtenue dans la limite $\nu \to 0$: $\eta^{<} \approx C_s \Delta$. Ainsi, dans le modèle de Smagorinsky, l'échelle de filtrage $C_s \Delta$ joue le rôle de l'échelle de coupure dissipative. Cette propriété est importante car elle va nous permettre, en utilisant la fonction de structure généralisée de la vitesse, de raffiner le modèle de Smagorinsky, en y incluant les effets du cisaillement.

6.4.3 Le raffinement du modèle de Smagorinsky près d'une paroi plane

Le modèle de Smagorinsky donne des résultats satisfaisants dans le cadre d'une turbulence homogène et isotrope, mais ne peut pas décrire correctement les interactions sous-maille près d'une paroi solide. Nous allons maintenant développer ce point.

Reprenons la configuration de l'écoulement plan entre deux plaques horizontales.

On considère ici que le champ de vitesse n'est filtré que dans les directions (x,z), parallèles à la paroi. Le développement de Taylor de la section (6.2) devient

$$u^{<}(x,y,z,t) = b_{1}^{<}(x,z,t)y + \dots$$
(6.34)

$$v^{<}(x,y,z,t) = c_{2}^{<}(x,z,t)y^{2} + \dots$$
 (6.35)

$$w^{<}(x,y,z,t) = b_{3}^{<}(x,z,t)y + \dots$$
 (6.36)

et l'on en déduit

$$\tau_{xy} = \left((b_1 c_2)^< - b_1^< c_2^< \right) y^3 + \dots \tag{6.37}$$

Pour le modèle de Smagorinsky, on obtient au contraire

$$\widetilde{\tau_{xy}} \sim \Delta^2$$
 près de la paroi! (6.38)

Nous proposons de modifier la définition de la viscosité turbulente du modèle de Smagorinsky, en tenant compte explicitement de l'intensité du cisaillement près de la paroi. Cette modélisation est présentée dans la section suivante.

Il s'agit d'un travail en cours, mené en collaboration avec

- FEDERICO TOSCHI, CNR-Istituto per le Applicazioni del Calcolo, Rome, Italie.
- JEAN-PIERRE BERTOGLIO, LIANG SHAO & FAOUZI LAADHARI, laboratoire de mécanique des fluides et acoustique de l'École Centrale de Lyon.

6.4.4 «Modified Smagorinsky model for boundary layer flow»

In large-eddy numerical simulations of turbulence, only the large-scale component of flow variables is integrated and the interaction with the unresolved small-scale component is modelled. A spatial low-pass filter of characteristic length Δ is introduced in order to separate the large and small scales of motion. This filter smooths out fluctuations at scales smaller than Δ so that the filtered field $f^{<}$ may be considered as the large-scale component of f. The small-scale component is the residual part $f - f^{<}$.

Filtering the Navier-Stokes equations yields

$$\partial_t u_i^< + u_j^< \partial_j u_i^< + \partial_j \tau_{ij} = -\partial_i p^< + \nu \partial_{jj} u_i^< \partial_i u_i^< = 0,$$
(6.39)

where $u_i^{<}$ and $p^{<}$ represent respectively the filtered velocity and pressure fields (for simplicity it is considered here that the mass density of the incompressible fluid is one), ν is the molecular kinematic viscosity and

$$\tau_{ij} \equiv (u_i u_j)^< - u_i^< u_j^<$$

denotes the so-called subgrid-stress tensor. This tensor arises from the nonlinearity inherent to the Navier-Stokes equations and encompasses interactions between the resolved (large-scale) and unresolved (small-scale) fluctuations of the velocity field. This term must be expressed as a function of large-scale variables in order to get a closed set of equations.

Eddy-viscosity models rely on the assumption that the (traceless) subgrid-stress tensor reads

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk} = -2\nu_t S_{ij}^<,$$

where $S_{ij}^{<} \equiv \frac{1}{2} \left(\partial_j u_i^{<} + \partial_i u_j^{<} \right)$ is the filtered rate-of-strain tensor and ν_t denotes an eddy-viscosity. Under this assumption, the Smagorinsky model is the simplest, and most commonly used, proposal. More concretely, Smagorinsky suggests that $\nu_t = (C_s \Delta)^2 \cdot ||S^{<}||,$

where

$$||S^{<}|| \equiv \sqrt{2\sum_{i,j} S_{ij}^{<2}}$$

is the local characteristic filtered rate-of-strain and C_s is the so-called (adjustable) Smagorinsky coefficient. This model yields fairly acceptable results in simulating homogeneous and isotropic turbulence but it is obviously inappropriate in near-wall regions, where shear effects prevail.

The shortcomings of the Smagorinsky model, in the near-wall treatment, have been addressed by arbitrarily damping the eddy-viscosity close to the wall. Van-Driest has suggested, based on pure empirical arguments, to multiply the Smagorinsky coefficient by the so-called Van-Driest damping function. More specifically, it is suggested that

$$\nu_t = \left(C_s\left(1 - \exp\left(\frac{z^+}{A^+}\right)\right)\Delta\right)^2 \cdot ||S^<||,$$

where z^+ is the dimensionless distance from the (planar) wall and A^+ is an ad hoc constant. More precisely, $z^+ = u_* z/\nu$ where u_* is the characteristic velocity of the viscous sublayer, ν is the kinematic viscosity of the fluid.

Here, we consider a correction to the Smagorinsky eddy-viscosity without adjustable parameter. This proposal is motivated by some recent findings about the scaling behavior of velocity spatial correlations in the turbulent logarithmic boundary layer. This model provides a (very) simple and attractive alternative for simulating near-wall region of turbulent flows.

Before introducing this modification, let us recast the Smagorinsky model in the phenomenological framework of Kolmogorov's theory. In homogeneous and isotropic turbulence, the Kolmogorov's dissipative scale, which may be viewed as the smallest scale of turbulent motions, is given by

$$\eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4},$$

where $\varepsilon = \nu ||S||^2$ denotes the rate-of-dissipation under molecular viscous effects. This estimate of the dissipative length-scale is obtained by matching the relations

$$\delta u(r)^3 \sim \varepsilon \cdot r$$

$$\varepsilon \sim \nu \frac{\delta u(r)^2}{r^2},$$

where $\delta u(r)$ denotes the fluctuations of velocity differences across a distance r. The sign ~ stands for "behaves in scale r as". The first relation prevail in the inertial range of scales where non-linear dynamics dominate, whereas the second is valid at scales where the velocity field is smoothed out under viscous effects. In the context of eddy-viscosity models, the mesh-size Δ may be viewed as the dissipative length-scale. This yields

$$\Delta \sim \left(\frac{\nu_t^3}{\varepsilon^<}\right)^{1/4},$$

where $\varepsilon^{<}$ is now interpreted as the subgrid energy flux, i.e., from resolved modes to unresolved modes. This flux is characterized by $\varepsilon^{<} = \nu_t ||S^{<}||^2$; the Smagorinsky proposal $\nu_t \sim \Delta^2 \cdot ||S_{ij}^{<}||$ is then recovered.

Relying on some recent experimental and theoretical findings, it is proposed that in the presence of a mean shear S(z), the dissipative scale η should be given by matching the relations

$$\delta u(r,z)^3 + \alpha \, \mathcal{S}(z)r \cdot \delta u(r,z)^2 \sim \varepsilon(z) \cdot r$$
$$\varepsilon(z) \sim \nu \frac{\delta u(r,z)^2}{r^2},$$

where α is a constant coefficient of order one (independent of z). We consider here generic cases in which the shear only depends on the distance z from the wall. The average is meant on x-y planes parallel to the wall. The shear is defined as

$$\mathcal{S}(z) \equiv \frac{dU_x(z)}{dz},$$

where $U_x(z)$ denotes the mean velocity, here along the x-direction. This yields

$$\eta(z) \sim \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon(z)}\right)^{1/4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha \frac{\mathcal{S}(z)}{||S||(z)}}}.$$

In the absence of shear, i.e. S(z) = 0, the previous estimation of η is recovered.

In the context of eddy-viscosity models, these arguments yield

$$\Delta \sim \left(\frac{\nu_t^3(z)}{\varepsilon^<(z)}\right)^{1/4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha \frac{\mathcal{S}(z)}{||S^<||(z)}}}.$$

and therefore $\nu_t(z) \sim \Delta^2(||S^{<}||(z) + \alpha S(z))$. As one gets closer to the wall $\nu_t(z)$ must vanish. It follows that

$$\nu_t(z) \sim \Delta^2 \left(||S^{<}||(z) - \frac{\mathcal{S}(z) \cdot ||S^{<}||(0)}{\mathcal{S}(0)} \right), \tag{6.40}$$

where $S(0) = u_{\star}^2 / \nu$ is the shear at the boundary.

A priori tests are displayed on figures (6.7) and (6.8) for two coarse-graining sizes. It is observed that this model gives a very satisfactory estimation of the mean subgrid energy flux $\langle \tau_{ij}.S_{ij}^{<} \rangle$; there is a significant improvement compared to the Smagorinsky model with Van-Driest damping. The agreement is a bit disappointing for the subgrid-stress in the direction of the shear; this should be addressed in the future.



FIG. 6.7 – The coarse-graining size is 4 (in wall unit).



FIG. 6.8 – The coarse-graining size is 8 (in wall unit).

6.5 Article présenté

6.5.1 «Shear effects in non-homogeneous turublence», F. TOSCHI, E. LÉVÊQUE, & G. RUIZ-CHAVARRIA, *Physical Review Letters*, vol. 85 (7), 2000, p. 1436

VOLUME 85, NUMBER 7

PHYSICAL REVIEW LETTERS

14 AUGUST 2000

Shear Effects in Nonhomogeneous Turbulence

F. Toschi,¹ E. Lévêque,² and G. Ruiz-Chavarria³

¹Department of Applied Physics, University of Twente, P.O. Box 217, 7500 AE Enschede, The Netherlands INFM, Unitá di Tor Vergata, Roma, Italy ²Laboratoire de Physique CNRS, ENS de Lyon, 69364 Lyon Cedex 07, France

³Departamento de Física, Facultad de Ciencias, UNAM, 04510 Mexico D. F., Mexico (Received 18 January 2000)

Motivated by recent experimental and numerical results, a simple unifying picture of intermittency in turbulent shear flows is suggested. Integral structure functions (ISF), taking into account explicitly the shear intensity, are introduced on phenomenological grounds. ISF can exhibit a universal scaling behavior, independent of the shear intensity. This picture is in satisfactory agreement with both experimental and numerical data. Possible extension to convective turbulence and implication on closure conditions for large-eddy simulation of nonhomogeneous flows are briefly discussed.

PACS numbers: 47.27.-i, 47.27.Ak, 47.27.Nz

Statistical properties of turbulent flows are usually characterized in terms of the scaling behavior of velocity structure functions (SF). These quantities are defined as the statistical moments of longitudinal velocity increments across a separation r at the location x: $D_p(x,r) =$ $\langle \delta v(x,r)^p \rangle$. In homogeneous and isotropic turbulence, $D_p(x,r)$ depends only on the distance (or scale) r. Experimental and numerical observations support the idea that $D_p(r)$ display universal power-law dependence on r in the so-called inertial range, i.e., $D_p(r) \sim r^{\xi_p}$. Universality refers here to the scaling exponents ζ_p being independent of the stirring process of turbulence. The ζ_p values are found to be in disagreement with Kolmogorov's linear prediction (K41) $\zeta_p = p/3$ [1]. The understanding of this correction to K41, usually referred to as intermittency, has stimulated many phenomenological and theoretical works during the last 40 years (see [2] for a recent review).

Only recently, interests in understanding intermittency in nonhomogeneous turbulent flows have started to emerge (see [3–10]). The major point is to understand how the phenomenology of intermittency is modified, or can be extended, in case of nonhomogeneous flows. A common characteristic of such flows, e.g., wall-bounded flows, is the presence of a nonzero mean velocity gradient (usually called shear). Note that shear does not necessarily imply inhomogeneity, e.g., in homogeneous shear, straining, and rotational flows.

Our investigation starts from the following key observations: (i) In the presence of a strong shear, intermittency, defined as the deviation of scaling exponents ζ_p from the linear law, is larger than in homogeneous and isotropic turbulence. (ii) Relative scaling exponents, measured in very different flows but in positions where the shear is strong enough, seem to be very similar (universal).

Data in Fig. 1 fully confirm our two key observations. They come from very different situations: near the wall in a channel flow numerical simulation [4,5] and experiment [6], in the logarithmic sublayer of a boundary layer flow [7], near a strong vortex [8], in the wake of a cylinder [9], and in a Kolmogorov flow [10].

In order to provide a theoretical unifying framework for nonhomogeneous turbulent shear flows, we start from the Navier-Stokes equations. The velocity field can be decomposed into a mean value (average is meant on time) plus a fluctuating part: $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x};t) = \overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x};t)$. It yields the usual Reynolds decomposition

$$D_t v'_i + S_{ij}(\mathbf{x})v'_j + v'_j \partial_j v'_i - v'_j \partial_j v'_i = -\partial_i p' + \nu \Delta v'_i$$
⁽¹⁾

with $D_t = (\partial_t + \overline{v}_j \partial_j)$. The shear is defined as $S_{ij}(\mathbf{x}) = \partial_j \overline{v}_i(\mathbf{x})$ and will depend on the mean flow geometry. In regions where $S_{ij} = 0$, e.g., very far from the boundaries, turbulence can be considered as homogeneous. Otherwise, the shear term $S_{ij}(\mathbf{x})v'_i$ must be taken into account. The



FIG. 1. Intermittency corrections to scaling exponents, $\zeta_p/\zeta_3 - p/3$, in homogeneous and isotropic turbulence (\Box), and several turbulent shear flows (Δ). Intermittency corrections are significantly larger in the presence of shear and display universality.

© 2000 The American Physical Society

VOLUME 85, NUMBER 7

results displayed in Fig. 1 show that the presence of this term modifies significantly the statistical properties of turbulence. In order to better highlight the physical implication of the shear, we consider together the second and third terms of the left-hand side of (1), defining the following integral structure functions (ISF):

$$\tilde{D}_p(z,r) = \langle [\delta v(z,r)^3 + \alpha r \cdot S(z) \cdot \delta v(z,r)^2]^{p/3} \rangle,$$
(2)

where α is an empirical prefactor of order one. These ISF are expected to take into account shear effects, particularly at large scales (see next paragraph) and to display a universal behavior. We consider here *generic* situations in which the shear reduces to $S(z) = \partial_z \overline{v}_x$. Such situations occur near a rigid wall, where the principal mean-velocity component aligns in the *x* direction, parallel to the boundary [11]. The shear S(z) characterizes the variation of v_x along the *z* direction, i.e., as one moves off the wall. Finally, we consider increments in the direction.

ISF reduce on two different SF when either the first or the second term dominates. These two terms will exactly balance at scale L_S such that $\delta v(L_S)/L_S = \alpha S$. At scales $r \ll L_S$, shear effects become negligible and homogeneous and isotropic scalings are expected. Kolmogorov's scaling then yields $\delta v(\tilde{r}) \sim \epsilon^{1/3} r^{1/3}$, where ϵ denotes the mean energy dissipation rate. By extending this similarity relation to the scale $r = L_S$, one obtains the usual dimensional estimate for the shear length scale $L_S \sim (\epsilon/S^3)^{1/2}$ [12]. In the logarithmic layer of a plane near-wall flow it yields $L_S(z) \sim z$ [7]. Roughly speaking, L_S can be viewed as the size of small-scale eddies, whose turnover time equals the shear time scale 1/S, imposed by the flow geometry and the stirring process of turbulence at large scales. Note that this estimate of the shear length scale stems out from dimensional analysis. In practice, there may be a prefactor in the expression of L_s : this is taken into account by the coefficient α . From previous reasoning it follows that $\tilde{D}_p(r) \sim D_p(r)$ for $r \ll L_s$ and $\tilde{D}_p(r) \sim (rS)^{p/3} D_{2p/3}(r)$ for $r \gg L_s$.

Another way to see that the central objects, in the presence of shear, are the ISF comes from the generalization of Yaglom's equation to homogeneous-shear flows, i.e., with S(z) = S [12,13]:

$$\frac{4}{5} \epsilon r = D_3(r) - 6\nu \frac{d D_2(r)}{dr} + \frac{2S}{r^4} \int_0^r dx \, x^4 \overline{v'_x(x_0)v'_z(x_0+x)} \,.$$
(3)

Supposing that this relation can be generalized, along the same line of idea of the Kolmogorov's refined similarity hypothesis [14], one obtains

$$\delta v^3(r) + \alpha r \cdot S \cdot \overline{v'_x(x)v'_z(x+r)} \sim \varepsilon(r)r$$
, (4)

where $\varepsilon(r)$ denotes the coarse graining of the energy dissipation field $\epsilon = \frac{\nu}{2} \sum_{i,j} (\partial_i v_j)^2$, at scale *r*.

Simplifying, on pure dimensional grounds, the velocity cross correlation $\overline{v'_x v'_z}$, with $\delta v(r)^2$ one ends up again with $\tilde{D}_p(r)$. Furthermore, we propose the following refined similarity hypothesis:

$$\begin{split} \tilde{D}_p(r) &= \langle [\delta v(r)^3 + \alpha r \cdot S \cdot \delta v(r)^2]^{p/3} \rangle \\ &\sim \langle \varepsilon(r)^{p/3} \rangle r^{p/3}. \end{split}$$

This formulation is consistent, in the limiting cases of strong and negligible shear, with some recent findings (see [4,5]). In addition to that, the ISF should be able to abridge smoothly between these two limiting regimes, i.e.,

$$r \ll L_S: D_p(r) \sim \langle \varepsilon(r)^{p/3} \rangle r^{p/3},$$
 (5)

and

$$r \gg L_{S}: D_{p}(r) \sim \langle \varepsilon(r)^{p/2} \rangle.$$
 (6)

Equation (5) is in agreement with the restoration of homogeneity and isotropy at small scales. For $r \gg L_S$, Eq. (6) gives $D_2(r) \sim \text{const}$ (modulo possible logarithmic corrections), yielding for the energy spectrum $E(k) \sim k^{-1}$ (a relation suggested a long time ago in [12]).

In the previous picture, it is assumed that the shear length scale L_S remains larger than the dissipation length scale η . The dissipation field $\varepsilon(r)$ is then expected to display the same scaling properties as in homogeneous and isotropic turbulence. However, in regions where $L_S \leq \eta$ (very close to the wall) it is expected that shear effects act down to the dissipative scale and therefore can modify the scaling behavior of $\varepsilon(r)$. The scalings of $D_p(r)$ should then also change according to [6].

The relevance of integral structure functions for describing the scaling properties of nonhomogeneous shear flows is now tested on both experimental and numerical data. The experiment, performed in the recirculating wind tunnel of ENS de Lyon, consists of a turbulent boundarylayer flow over a smooth horizontal plate (see [7] for details about the experimental apparatus). Velocity measurements are carried out at various elevations from the plate in the logarithmic turbulent sublayer [11]. Numerical results are obtained from a direct simulation of the Navier-Stokes equations in a rectangular channel flow (see [4] for details).

In Fig. 2, D_3 and D_6 , measured in the logarithmic boundary sublayer, are compared with the corresponding \tilde{D}_3 and \tilde{D}_6 . The shear $S(z) = \partial_z \overline{v}_x$ has been estimated from the mean-velocity profile. In standard nondimensional variables [15], namely, $z^+ = v_* z/\nu$ and $v^+ = \bar{v}_x/v_*$, where v_* is the characteristic velocity of the viscous sublayer, our data are well fitted by the logarithmic profile $v^+(z^+) = (1/\kappa) \log(z^+) + B$. We obtain $\kappa \approx 0.4$ and $B \approx 5.26$ in agreement with previously reported results [7]. For what concerns the coefficient α , all our results have been obtained with the fixed value

14 AUGUST 2000

VOLUME 85, NUMBER 7



FIG. 2. In the turbulent boundary layer at the distance $z^+ = 102$. D_3 and D_6 (Δ) are compared with \tilde{D}_3 and \tilde{D}_6 (\star). The scale *r* has been renormalized by the characteristic shear length scale L_s . The solid lines passing through \tilde{D}_3 and \tilde{D}_6 indicate the expected *homogeneous and isotropic* power laws, respectively, $\zeta_3 = 1$ and $\zeta_6 = 1.78$. For comparison, the dashed line has slope 2.

 $\alpha \approx 0.2$. Note that the constant α is not (a priori) intended to be universal but may strongly depend on the geometry and stirring process of the flow. However, it is expected to remain of order unity. In practice, the value of α has been extracted from data by requiring that one third-order ISF scale as r (see next paragraph). Corresponding estimates of L_s are indicated in all figures. Finally, one must point out that velocity increments have been estimated in the direction of the mean flow by use of the Taylor hypothesis. Both D_3 and D_6 exhibit a power-law dependence on r, but the scaling exponents are clearly different from those observed in homogeneous and isotropic (h-i) turbulence, respectively, $\zeta_3 \simeq 1$ and $\zeta_6 \simeq 1.78$. On the other hand, the corresponding ISF exhibit power laws in good agreement with h-i scalings (up to very large scales).

In Fig. 3, third-order SF and ISF are displayed for various distances from the wall. We notice that scaling behavior of D_3 changes with z^+ . On the contrary, all the corresponding \tilde{D}_3 display the same power-law scaling with exponent 1. We recall that the coefficient α is kept constant and the shear is estimated from the mean-velocity profile; there is no adjustable parameter.

We now report a sharper test: SF and ISF, compensated by h-i power-law scalings, are displayed in Fig. 4 for p = 1, ..., 6 at distance $z^+ = 102$. A departure from h-i scalings is clearly observed for SF.

On the contrary, $\tilde{D}_p(r)/r^{\zeta_p}$ exhibits a plateau up to very large scales, indicating that ISF roughly behave as r^{ζ_p} . In other terms, ISF compensate shear effects and restore, via the extra term $\alpha r \cdot S \cdot \delta v(r)^2$, the h-i scalings. Finally, the same test, made on numerical data, is reported in Fig. 5 for the sake of comparison. Data are obtained



FIG. 3. From the boundary layer experiment, third-order structure function at various distances from the wall: $z^+ = 37$ (o), $z^+ = 124$ (Δ), and $z^+ = 233$ (\Box). The scaling properties of D_3 (SF) do depend on the distance z^+ . On the contrary, \tilde{D}_3 (ISF) displays the same scaling behavior for all z^+ . The dashed line has slope 1. The curves have been shifted vertically for convenience.

at distance $z^+ = 25$ from the wall, i.e., where the shear is strong. Results are in reasonable agreement with those of Fig. 4, despite the lower resolution of the numerical simulation. We emphasize the major points of our study. Our description relates the scaling properties of velocity fluctuations in nonhomogeneous shear flows to those of the coarse-grained dissipation rate $\varepsilon(r)$. Provided that the shear length scale remains much larger than the dissipative length scale, we are inclined to believe that the scaling properties of $\varepsilon(r)$ remain flow independent; the dissipation process, operating on very small scales, is mainly insensitive to the presence of the shear. We then claim that the



FIG. 4. In the experimental boundary layer at $z^+ = 102$. SF and ISF, compensated by homogeneous and isotropic scalings, are displayed for p = 1, ..., 6.

VOLUME 85, NUMBER 7

165



FIG. 5. As in Fig. 4 but from numerical data at $z^+ = 25$.

scalings of velocity fluctuations are different in sheared regions only because the similarity between $\delta v(r)$ and $\varepsilon(r)$ changes form [see (5) and (6)]. When $L_S \leq \eta$, shear effects acting down to dissipative scales are expected to modify the scaling behavior of $\varepsilon(r)$. Nonetheless, we observe in Fig. 1 that relative scalings exponents of velocity structure functions remain universal.

The introduction of ISF relies on quite simple dimensional arguments. However, they have proved to be valuable (preliminary) tools in order to capture (at leading order) shear effects on the scaling behavior of velocity structure functions. We believe that some refinements in the definition of ISF may be possible, e.g., considering the cross correlation $v'_x v'_z$ instead of $\delta v(r)^2$: however, ISF are of practical interest as they are easily accessible experimentally.

A possible extension of ISF applies to thermal turbulent convection, the buoyancy term $ag\delta T(r)$ playing a similar role of $S \cdot \delta v(r)$. In that case, the ISF would read

$$\tilde{D}_p^{\text{RB}}(r) = \langle [\delta v(r)^3 + \alpha r \ ag \delta T(r) \delta v(r)]^{p/3} \rangle$$

and are expected to take into account buoyancy effects at scales larger than the Bolgiano length scale.

An important application of our findings concerns large eddy simulations (LES). Usual eddy viscosity models are known to fail close to the boundary. As one moves near the boundary, the shear length scale L_S becomes smaller and smaller. While L_S remains larger than the cutoff scale Δ of the LES, usual closure conditions, based on homogeneous and isotropic turbulent dynamics, remain acceptable. However, when L_S becomes comparable or smaller than Δ , shear effects must be taken into account and the closure condition should be modified. An alternative consists of decreasing the mesh size near the wall so that L_S always remains larger than Δ . More simply, our study suggests considering $[\delta v(r)^3 + \alpha r S \delta v(r)^2]^{1/3}$ instead of $\delta v(r)$ in closure relations. Along this line of idea, the Smagorinski's closure condition [16] can be generalized in order to uniformly take into account shear effects. The eddy viscosity v_{eddy} then reads

$$\nu_{\rm eddy} = C_s \Delta^2 (\overline{S} + \alpha S)$$

where the extra term αS takes care of shear effects. C_s is the empirical constant of the Smagorinski's closure and \overline{S} denotes the rate of strain on scale Δ .

F.T. thanks S. Ciliberto for his kind hospitality at ENS de Lyon. G.R.-C. and E.L. acknowledge the ECOS committee and CONACYT for their financial support under Project No. M96-E03. G.R.-C. also acknowledges DGAPA-UNAM for partial support under Project No. IN-107197.

- A.N. Kolmogorov, C.R. Acad. Sci. USSR 30, 301 (1941);
 31, 538 (1941); 32, 16 (1941).
- [2] U. Frisch, Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1995).
- [3] L. Danaila, F. Anselmet, T. Zhou, and R.A. Antonia, "A Generalization of Yaglom's Equation which Accounts for the Large-Scale Forcing in Heated Grid Turbulence" (to be published).
- [4] F. Toschi, G. Amati, S. Succi, R. Benzi, and R. Piva, Phys. Rev. Lett. 82, 5044 (1999).
- [5] R. Benzi, G. Amati, C. M. Casciola, F. Toschi, and R. Piva, Phys. Fluids 11, 1284 (1999).
- [6] M. Onorato, R. Camussi, and G. Iuso, Phys. Rev. E 61, 1447–1454 (2000).
- [7] G. Ruiz-Chavarria, S. Ciliberto, C. Baudet, and E. Lévêque, "Scaling Properties of the Streamwise Component of Velocity in a Turbulent Boundary Layer" (to be published).
- [8] F. Chillá and J.-F. Pinton, Advances in Turbulence VII, edited by U. Frisch (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1998), pp. 211–214.
- [9] E. Gaudin, B. Protas, S. Goujon-Durand, J. Wojciechowski, and J. E. Wesfreid, Phys. Rev. E 57, R9 (1998).
- [10] R. Benzi, M. V. Struglia, and R. Tripiccione, Phys. Rev. E 53, 5565 (1996).
- [11] H. Tennekes and J.L. Lumley, *A First Course in Turbulence* (MIT Press, Cambridge, MA, 1972).
- [12] O.J. Hinze, *Turbulence* (McGraw-Hill, New York, 1959).
- [13] M. V. Struglia, Ph.D. thesis, Universitá di Roma, Tor Ver-
- gata, Roma, Italy, 1996.
- [14] A.N. Kolmogorov, J. Fluid Mech. 62, 82 (1962).
- [15] H. Schlichting, *Boundary Layer Theory* (McGraw-Hill, New York, 1968).
- [16] J. Smagorinski, Mon. Weather Rev. 91, 99-164 (1963).

Deuxième partie

PRODUCTION ET ACTIVITÉS SCIENTIFIQUES

Publications scientifiques

Thèse de doctorat

 Les lois d'échelle de la turbulence développée soutenue le 09 juin 1995 à l'observatoire de la Côte d'azur (Nice) directeur de thèse : Uriel Frisch cette thèse a été préparée au département de mathématiques de l'université d'Arizona, Tucson, États-Unis, sous la direction de Zhen-Su She

Articles parus dans des revues à comité de lecture

Les articles cités ci-dessous sont téléchargeables sur ma page web: http://perso.ens-lyon.fr/emmanuel.leveque

- «On the Rapid Increase of Intermittency in the Near-Dissipation Range of Fully Developed Turbulence»
 L. CHEVILLARD, B. CASTAING & <u>E. LÉVÊQUE</u> *European Physical Journal B*, 2005
- «Experimental and Numerical Study of the Lagrangian Dynamics of High Reynolds Turbulence»
 N. MORDANT, E. LÉVÊQUE & J.-F. PINTON
 New Journal of Physics, vol. 6, 2004, N° 116
- «Huge Fluctuations in Weight Measurements at the Bottom of a Two-Dimensional Vertical Sheet of Grains»
 B. GILLES, <u>E. LÉVÊQUE</u>, C. LAROCHE & C. COSTE *Physical Review Letters*, vol. 92, 2004, N° 204301
- «Lagrangian Velocity Statistics in Fully Developed Turbulent Flows : Effects of Dissipation»
 L. CHEVILLARD, S. ROUX, <u>E. LÉVÊQUE</u>, A. ARNÉODO & J.-F. PINTON *Physical Review Letters*, vol. 91, 2003, N° 214502

- «Lagrangian Velocity Fluctuations in Fully Developed Turbulence: Scaling, Intermittency and Dynamics»
 N. MORDANT, J. DELOUR, <u>E. LÉVÊQUE</u>, O. MICHEL, A. ARNÉODO & J.-F. PINTON Journal of Statistical Physics, vol. 113 (5/6), 2003, p. 701
- «Long-Time Correlations in Lagrangian Dynamics : A Key to Intermittency in Turbulence»
 N. MORDANT, J. DELOUR, <u>E. LÉVÊQUE</u>, A. ARNÉODO & J.-F. PINTON *Physical Review Letters*, vol. 89, 2002, N° 254502
- «Finite-Mode Spectral Model of Homogeneous and Isotropic Navier-Stokes Turbulence : A Rapidly Depleted Energy Cascade»
 <u>E. LÉVÊQUE</u> & C. KOUDELLA *Physical Review Letters*, vol. 86, 2001, p. 4033
- «Shear Effects in Non-Homogeneous Turbulence»
 F. TOSCHI, <u>E. LÉVÊQUE</u> & G. RUIZ-CHAVARRIA *Physical Review Letters*, vol. 85, 2000, p. 1436
- «Scaling Properties of the Streamwise Component of Velocity in a Turbulent Boundary Layer»
 G. RUIZ-CHAVARRIA, S. CILIBERTO, C. BAUDET & <u>E. LÉVÊQUE</u> *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 141, 2000, p. 183
- «Scaling Laws for the Turbulent Mixing of a Passive Scalar in the Wake of a Cylinder»
 <u>E. LÉVÊQUE</u>, G. RUIZ-CHAVARRIA, C. BAUDET & S. CILIBERTO
 Physics of Fluids, vol. 11, 1999, p. 1869
- «Cascade Structures and Scaling Exponents in a Dynamical Model of Turbulence : Measurements and Comparisons»
 <u>E. LÉVÊQUE</u> & Z.-S. SHE *Physical Review E*, vol. 55, 1997, p. 2789
- «Viscous Effects on Inertial Range Scalings in a Dynamical Model of Turbulence»
 <u>E. LÉVÊQUE</u> & Z.-S. SHE
 Physical Review Letters, vol. 75, 1995, p. 2690
- «Universal Scaling Laws in Fully Developed Turbulence»
 Z.-S. SHE & <u>E. LÉVÊQUE</u> Physical Review Letters, vol. 72, 1994, p. 334

Articles parus dans des revues de vulgarisation

- «Des filets d'ultrason, pour aller à la chasse aux tourbillons»
 C. BAUDET, R.-H. HERNANDEZ, O. MICHEL & <u>E. LÉVÊQUE</u> dans *Image de la Physique 2000*, édition CNRS SPM
- «La spectroscopie acoustique de la turbulence, ou... comment trouver une aiguille dans une botte de foin»
 C. BAUDET, R.-H. HERNANDEZ, O. MICHEL & <u>E. LÉVÊQUE</u> dans *Bulletin de la Société française de physique*, 1999, nº 120

Articles parus dans des actes de conférence avec comité de lecture

_	«Multifractal Description of Lagrangian Velocity Statistics in Turbulent Flows: From dissipative to inertial scales » L. CHEVILLARD, S. G. ROUX, <u>E. LÉVÊQUE</u> , N. MORDANT, JF. PINTON & A. ARNÉODO Proceedings of the European Turbulence Conference X, Trondheim, Norvège publié dans <i>Advances in Turbulence X</i> , édité par H. I. Andersson et PA. Krogstad Kluwer Academic Publishers, 2004
_	«Long-Time Correlations in Lagrangian Dynamics» N. MORDANT, J. DELOUR, <u>E. LÉVÊQUE</u> , A. ARNÉODO & JF. PINTON Proceedings of the European Turbulence Conference IX, Southampton, Angleterre publié dans <i>Advances in Turbulence IX</i> , édité par I.P. Castro et co-auteurs Kluwer Academic Publishers, 2002
_	«Non-Homogeneous Scalings in Boundary Layer Turbulence» S. CILIBERTO, <u>E. LÉVÊQUE</u> & G. RUIZ-CHAVARRIA Proceedings of a workshop on Turbulence, Isaac Newton Institute, Cambridge, Angleterre publié dans <i>Intermittency in Turbulent Flows</i> , édité par J. C. Vassilicos Cambridge University Press, 2001
_	«A Finite-Mode Spectral Model of Homogeneous and Isotropic Turbulence» <u>E. LÉVÊQUE</u> & C. R. KOUDELLA Proceedings of the 4 th workshop on Direct and Large-Eddy Simulations, Twente, Pays-Bas publié dans <i>Direct and Large-Eddy Simulations IV</i> , édité par B. Geurts et co-auteurs Kluwer Academic Publishers, 2001
_	«Huge Relative Fluctuations in Weight Measurements at the Bottom of a Two-Dimensional Vertical Sheet of Grains» <u>E. LÉVÊQUE</u> , B. GILLES, C. LAROCHE & C. COSTE publié dans <i>Proceedings of the 4th International Conference on Micro-Mechanics</i> of Granular Media: Powder and Grains, édité par Y. Kishino, A. A. Balkema Publishers, 2001
_	«Intermittency in Turbulent Boundary Layer» F. TOSCHI, <u>E. LÉVÊQUE</u> & G. RUIZ-CHAVARRIA Proceedings of the European Turbulence Conference VIII, Barcelone, Espagne publié dans <i>Advances in Turbulence VIII</i> , édité par C. Dopazo et co-auteurs Kluwer Academic Publishers, 2000
_	«Remarkable Features of Multipliers in Turbulence» P. CHAINAIS, <u>E. LÉVÊQUE</u> , P. ABRY & C. BAUDET Proceedings of the European Turbulence Conference VIII, Barcelone, Espagne publié dans <i>Advances in Turbulence VIII</i> , édité par C. Dopazo et co-auteurs Kluwer Academic Publishers, 2000
_	«Statistical Properties of the Energy Flow of a Passive Scalar in Fully Developed Turbulence» <u>E. LÉVÊQUE</u> , S. CILIBERTO, C. BAUDET & G. RUIZ-CHAVARRIA Proceedings of the European Turbulence Conference VII, Nice publié dans <i>Advances in Turbulence VII</i> , édité par U. Frisch

Activités et responsabilités liées au métier de chercheur

Séminaires, conférences et workshops

- «On the rapid increase of intermittency in the near-dissipation range of turbulence» séminaire au département de mécanique et aéronautique de l'université «La Sapienza», Rome, Italie, 2003
- «Finite-mode spectral model of Navier-Stokes turbulence» séminaire à l'institut Erwin Schrödinger, Vienne, Autriche, 2002
- «Modèle réduit des équations de Navier-Stokes» séminaire au laboratoire de mécanique des fluides et acoustique, École Centrale de Lyon, 2001
- «Lois d'échelle dans une couche limite turbulente»
 séminaire au laboratoire de physique et mécanique des milieux hétérogènes,
 École supérieure de physique et chimie industrielle, Paris, 2000
- «Hiérarchie des moments statistiques de la dissipation en turbulence pleinement développée» séminaire à l'institut Laue Langevin, Grenoble, 1998
- Participation à des conférences ou workshops :
 - école thématique «Dynamique des fluides stellaires et simulations numériques associées» centre Paul Langevin, Aussois, 2004
 - conférence «Kolmogorov's Legacy in Physics»
 The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italie, 2003
 - école thématique «Turbulence : Measurements and Signals» Institut d'Etudes Scientifiques de Cargèse, 2002
 - workshop «Developed Turbulence», Vienne, Autriche, 2002
 - conférence «Direct and Large-Eddy Simulations», Twente, Pays-Bas, 2001
 - workshop «Intermittency in Turbulent Flows», Isaac Newton Institute, Cambridge, 1999
 - «European Turbulence Conference» VII, VIII, IX, X 1998-2000-2002-2004

- Participation aux différentes rencontres du GDR «Turbulence», 1998-2003
- Participation à la formation CNRS «Applications numériques parallèles hautes performances, analyse, conception et utilisation», Aussois, 2000

Responsabilités

- Agent chargé de la mise en oeuvre de la sécurité (ACMO) au laboratoire de physique de l'ENS-Lyon, nommé le 01 septembre 2001 :
 - rédaction du «règlement intérieur du laboratoire» : mesures d'urgence et règles spécifiques de sécurité en vigueur au laboratoire
- Organisation d'une rencontre du GDR Turbulence, à l'ENS-Lyon, 2001
- Représentant de l'ENS-Lyon au conseil des partenaires du centre de calcul pour la recherche et les technologies du CEA, depuis 2001 :
 - organisation du colloque bi-annuel des partenaires du CCRT-CEA au grand amphithéâtre de l'ENS-Lyon, 2002
- Membre du conseil du laboratoire de physique de l'ENS-Lyon
- Membre de la commission de spécialistes sciences et techniques de la mécanique et de l'énergie, 60ème et 62ème sections, de l'École Centrale de Lyon
- Membre suppléant de la commission de spécialistes de physique, 28ème, 29ème, 30ème, 60ème et 61ème sections, de l'ENS-Lyon
- Conception et correction de l'épreuve écrite de physique option MP au concours d'entrée aux Écoles normales supérieures de Lyon et Cachan, 2002 et 2003

Activités d'enseignement

- cours magistral «Description statistique des systèmes non-linéaires»
 DEA Physique Statistique et Phénomènes Non-Linéaires
 École doctorale de Physique fondamentale et astrophysique
 12 h., 1998-2002, ENS-Lyon
- cours magistral «Analyse numérique»
 Master M1 du LMD des Sciences de la Matière de l'ENS-Lyon 30 h., depuis 1999
- cours à l'école d'été «Turbulence : Measurements and Signals» Institut d'Etudes Scientifiques de Cargèse, CNRS 3 h., 2002, Cargèse
- cours à l'école de physique stellaire d'Aussois
 «Dynamique des fluides stellaires et simulations numériques associées»
 centre Paul Langevin, CNRS
 3 h., 2004, Aussois
- cours magistral «Hydrodynamique»
 Master M2 du LMD des Sciences de la Matière de l'ENS-Lyon 20 h., depuis 2004
Encadrements d'étudiants

— CHRISTOPHE KOUDELLA, doctorant au laboratoire de physique de l'ENS-Lyon (1995-1999) sous la direction de Chantal Staquet, puis post-doctorant au DAMTP de l'université de Cambridge (Angleterre). Nous avons mené ensemble une étude théorique et numérique sur la dynamique de cascade de la turbulence. Ce travail a conduit à une publication dans *Physical Review Letters* en 2001.

— BRUNO GILLES, doctorant au laboratoire de physique de l'ENS-Lyon (1997-2001) sous la direction de Christophe Coste. En marge du travail de thèse de Bruno Gilles, nous avons mené une étude expérimentale et numérique sur le phénomène de voûte dans un milieu granulaire bi-dimensionnel. Ce travail a conduit à une publication dans *Physical Review Letters* en 2004.

— NICOLAS MORDANT, doctorant au laboratoire de physique de l'ENS-Lyon (1998-2001) sous la direction de Jean-François Pinton. J'ai participé à l'encadrement de la thèse de Nicolas Mordant sur la mesure Lagrangienne en turbulence. Il a été question d'analyser les résultats des mesures expérimentales obtenues par Nicolas, et de les comparer aux résultats de mes simulations numériques. Ce travail a conduit à plusieurs publications collégiales : deux articles parus dans *Physical Review Letters* (2002-2003), un article dans *Journal of Statistical Physics* (2003) et un article dans *New Journal of Physics* (2004).

— LAURENT CHEVILLARD, doctorant au laboratoire de physique de l'ENS-Lyon (2001-2004) sous la direction d'Alain Arnéodo. J'ai participé à l'encadrement de la thèse de Laurent Chevillard. Nous avons travaillé ensemble sur la description théorique des corrélations de vitesse en turbulence. Un article en collaboration avec Bernard Castaing est considéré pour publication dans *European Physical Journal B* (2004).

Participation à un jury de thèse

— thèse d'ANTOINE MOREAU : «étude du mélange de scalaires en écoulement turbulent et application à la modélisation des petites échelles» directeur de thèse : Jean-Pierre Bertoglio soutenu le 20 Décembre 2002 à l'École Centrale de Lyon

Referee

 pour les journaux à comité de lecture: Physical Review Letters; Physical Review E; Physics of Fluids; Canadian Journal of Physics; European Physical Journal B

Contrats, financements

Bourse Bonus-Qualité-Recherche inter-établissements projet : «Modélisation de la viscosité sous-maille près d'une paroi solide, en simulation numérique des grandes échelles de la turbulence» entre le laboratoire de physique de l'ENS-Lyon (porteur de projet : E. LÉVÊQUE) et le laboratoire de mécanique des fluides et acoustique de l'École Centrale de Lyon (porteur de projet : J.-P. BERTOGLIO) 6.000 Euros pour chaque laboratoire, 2004

- Partenaire du contrat Région Émergence «Acoustique et vibrations» responsable : C. BAUDET, université Joseph Fourier, Grenoble 2286 Euros (15.000 F) par an, 2001-2003
- Bourse ACI Jeunes Chercheurs du MENRT «Télétrafic informatique et turbulence» responsables du projet : P. ABRY (équipe traitement du signal du laboratoire) et E. LÉVÊQUE (équipe physique non-linéaire, hydrodynamique et turbulence) 400 000 F, 1999-2002
- Heures de calcul sur calculateur parallèle IBM SP3 et SP4 du CINES, Montpellier:
 6000 h en 2001, 10.000 h en 2002, et 10.000 h en 2003

Bibliographie

- [1] *Turbulence : The Legacy of A. N. Kolmogorov*, U. FRISCH, édition Cambridge University Press, Cambridge, Angleterre, 1995.
- [2] «Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres»,
 J. L. M. POISEUILLE, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 12, 1841, p. 112.
- [3] Principia Mathematica, I. NEWTON, 1687.
- [4] Cours de mécanique des milieux continus (cours de l'école polytechnique), J. MANDEL, édition J. Gabay, Paris, 1994.
- [5] «Über die bewegung des wassers in engen zylinderschen rohren», G. H. L. HAGEN, Poggendorff's Ann. Phys. Chem., vol. 46, 1839, p. 423-442.
- [6] J. L. M. POISEUILLE, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 11, 1840, p. 961.
- [7] «Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond», J. V. BOUSSINESQ, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 17, 1872, p. 55-108.
- [8] «On the nature of turbulence», D. RUELLE & F. TAKENS, Comm. Math. Phys., vol. 20, 1971, p. 167-192.
- [9] «On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion»,
 O. REYNOLDS, *Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, vol. 186, 1895, p. 123-164.
- [10] «Hot-wire anenometry», G. COMTE-BELLOT, Annu. Rev. Fluid Mech., vol. 8, 1976, p. 209. Hotwire anenometry: Principles and signal analysis, H. H. BRUUN, édition Oxford University Press, Oxford, Angleterre, 1995.
- [11] «On the scaling of three-dimensional homogeneous and isotropic turbulence», R. BENZI, S. CI-LIBERTO, C. BAUDET & G. RUIZ-CHAVARRIA, *Physica D*, vol. 80, 1995, p. 385. — «Hierarchy of the energy dissipation moments in fully developed turbulence», G. RUIZ-CHAVARRIA, C. BAUDET & S. CILIBERTO, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 74 (11), 1995, p. 1986.
- [12] «Mémoire sur les lois du mouvement des fluides», C. L. M. H. NAVIER, Mem. Acad. R. Sci. Paris, vol. 6, 1823, p. 389-416. «On some cases of fluid motion», G. G. STOKES, Trans. Camb. Phil. Soc., vol. 8, 1843, p. 105.
- [13] A first course in turbulence, H. TENNEKES & J. L. LUMLEY, édition MIT Press, Cambridge, États-Unis, 1972.
- [14] Analyse en ondelette de l'auto-similarité de signaux de turbulence pleinement développée, S. ROUX, thèse présentée à l'université de Bordeaux I, 1996.
- [15] Ondelettes et turbulences Multirésolutions, algorithmes de décompositions, invariance d'échelle et signaux de pression, P. ABRY, édition Diderot, Paris, 1997. Fractales, Ondelettes et Turbulence :

de l'ADN aux croissances cristallines, A. ARNEODO, F. ARGOUL, E. BACRY, J. ELEZGARAY & J.F. MUZY, édition Diderot, Paris, 1995.

- [16] «Turbulence : défis théoriques et expérimentaux», U. FRISCH, intervention au carrefour des sciences CNRS, Atelier L'ordre dans le désordre, Palais de l'Unesco, 13 Février 1990.
- [17] «Bericht ueber Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz», L. PRANDTL, Zeitschrift Angew. Math. und Mech., vol. 3, 1925, p. 136-139.
- [18] Turbulence, C. BAILLY & G. COMTE-BELLOT, édition CNRS, Paris, 2003.
- [19] Weather Prediction by Numerical Process, L.F. RICHARDSON, édition Cambridge University Press, Cambridge, Angleterre, 1922.
- [20] «The spectrum of turbulence», G. I. TAYLOR, Proc. R. Soc. London Ser. A, vol. 164, 1938, p. 476-490.
- [21] Description multifractale unifiée du phénomène d'intermittence en turbulence Eulérienne et Lagrangienne, L. CHEVILLARD, thèse présentée à l'université de Bordeaux I, 2004.
- [22] «Statistical theory of turbulence», G. I. TAYLOR, Proc. R. Soc. London Ser. A, vol. 151, 1935, p. 421-464.
- [23] *The theory of homogeneous turbulence*, G. K. BATCHELOR, édition Cambridge University Press, Cambridge, Angleterre, 1952.
- [24] Statistical fluid mechanics, A. S. MONIN & A. M. YAGLOM, édition MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1975.
- [25] «Turbulence : Challenges for theory and experiment», U. FRISCH & S. A. ORSZAG, *Physics Today*, janv. 1990, p. 24-32.
- [26] «Direct-Interaction Approximation for Shear and Thermally Driven Turbulence», R. H. KRAICH-NAN, *The Physics of Fluids*, vol. 7 (7), 1964, p. 1048. — «Irreversible Statistical Mechanics of Incompressible Hydromagnetic turbulence», R. H. KRAICHNAN, *The Physical Review*, vol. 109 (5), 1958, p. 1407.
- [27] «Statistical theory of turbulence», S. A. ORSZAG, *Fluid dynamics, Les Houches, 1973*, édité par R. BALIAN & J. L. PEUBE, édition Gordon and Breach, New-York, 1977, p. 237-374.
- [28] Spectral methods in fluid dynamics, C. CANUTO, M. Y. HUSSAINI, A. QUARTERONI & T. A. ZANG, édition Springer-Verlag, 1988.
- [29] Physique statistique, B. DIU et co-auteurs, édition Hermann, Paris, 1989.
- [30] «Information theory and statistical mecahnics», E. T. JAYNES, *Physical Review*, vol.106, 1957, p. 620.
- [31] «Ergodic theory of chaos and strange attractors», J.-P. ECKMANN & D. RUELLE, *Rev. Modern Phys.*, vol. 57, 1985, p. 617-656. «The turbulent fluid as a dynamical system», D. RUELLE, *New Perspectives in Turbulence*, édité par L. SIROVICH, édition Springer, Berlin, 1991, p. 123-138.
- [32] «The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers», R. H. KRAICHNAN, J. Fluid Mech., vol. 5, 1959, p. 497. «Lagrangian-history closure approximation for turbulence», R. H. KRAICHNAN, Phys. Fluids, vol. 8, 1965, p. 575-598.
- [33] «Variational approach to the closure problem of turbulence theory», J. QIAN, *Phys. Fluids*, vol. 26(8), 1983, p. 2098.
- [34] «The origin of intermittency in fully developed turbulence», E. D. SIGGIA, *Phys. Rev. A*, vol. 15(4), 1977, p. 1730.
- [35] Cascades log-infiniment divisibles et analyse multi-résolution. Application à l'étude de l'intermittence en turbulence, P. CHAINAIS, thèse présentée à l'École normale supérieure de Lyon, 2001.

- [36] «The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds' numbers», A. N. KOLMOGOROV, *Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS*, vol. XXX n. 4, 1941, p. 301.
- [37] Fluid Mechanics, L. D. LANDAU & E.M. LIFSHITZ, édition Pergamon, Londres, 1959.
- [38] «Kolomogorov two-thirds law by matched asymptotic expansion», T. S. LUNDGREN, *Phys. of Fluids*, vol. 14 (2), 2002, p. 638.
- [39] «On the statistical theory of isotropic turbulence», T. VON KARMAN AND L. HOWARTH, *Proc. R. Soc. London ser. A*, vol. 164, 1938, p. 192.
- [40] «High-order velocity structure functions in turbulent shear flows», F. ANSELMET, Y. GAGNE, E. J. HOPFINGER & R. ANTONIA, J. Fluid Mech., vol. 140, 1984, 63. — «The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence», A. VINCENT & M. MENEGUZZI, J. Fluid Mech., vol. 225, 1991, p. 1. — «Exponents of the structure functions in a low temperature helium experiment», F. BELIN, P. TABELING & H. WILLAIME, Physica D, vol. 93, 1996, p. 52.
- [41] «A refinement of previous hypothesis concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds numbers», A.N. KOLMOGOROV, *J. Fluid Mech.*, vol. 13, 1962, p. 82; «Some specific features of atmospheric turbulence», A. M. OBOUKHOV, *J. Fluid Mech.*, vol. 13, 1962, p. 77.
- [42] «On Kolmogorov's inertial-range theories», R. H. KRAICHNAN, J. Fluid Mech., vol. 62 (2), 1974, p. 305-330.
- [43] «The multifractal nature of turbulent energy dissipation», C. MENEVEAU & K. R. SREENIVASAN, J. Fluid Mech., vol. 224, 1991, p. 429.
- [44] «Dependence on Reynolds number of higher-order moments of velocity derivatives in isotropic turbulence», P. G. SAFFMAN, *Phys. Fluids*, vol. 13, 1970, p. 2193. «Vortex dynamics in turbulence», D. I. PULLIN & P. G. SAFFMAN, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 30, 1998, p. 31.
- [45] «Local energy flux and the refined similarity hypothesis», G. L. EYINK, J. Stat. Phys., vol. 78, 1995, p. 335. «Local energy flux and subgrid-scale statistics in three-dimensional turbulence», V. BORUE & S. ORSZAG, J. Fluid Mech., vol. 366, 1998, p. 1-31.
- [46] «Velocity probability density functions of high-Reynolds-number turbulence», B. CASTAING, Y. GAGNE & E. HOPFINGER, *Physica D*, vol. 46, 1990, p. 177. «Log-similarity for turbulent flows?», B. CASTAING, Y. GAGNE & M. MARCHAND, *Physica D*, vol. 68, 1993, p. 387. «Fully developed turbulence: A unifying point of view», B. CASTAING & B. DUBRULLE, *J. Phys. II France*, vol. 5, 1995, p. 895. «Multilicative process in turbulent velocity statistics: a simplified analysis», F. CHILLÀ, J. PEINKE & B. CASTAING, *J. Phys. II France*, vol. 6, 1996, p. 455.
- [47] «Intermittency of one dimensional velocity spatial profiles in turbulence : a magnitude cumulant analysis», J. DELOUR, J.-F. MUZY & A. ARNÉODO, *Eur. Phys. J. B*, vol. 23, 2001, p. 243.
- [48] «Hydrodynamical turbulence: a 19th century problem with a challenge for the 21st century», V. L'VOV & I. PROCACCIA, http://arxiv.org/abs/chao-dyn/9606015, 1996.
- [49] «Direct observation of the intermittency of intense vorticity filaments in turbulence», S. DOUADY,
 Y. COUDER & M. E. BRACHET, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 67, 1991, p. 983. «Characterization of the low-pressure filaments in a three-dimensional turbulent shear flow», O. CADOT, S. DOUADY & Y. COUDER, *Phys. Fluids*, vol. 7 (3), 1995, p. 630. «Intense vortical structures in grid-generated turbulence», E. VILLERMAUX, B. SIXOU & Y. GAGNE, *Phys. Fluids*, vol. 7, 1995, p. 2008.
- [50] «Orthogonal wavelet decomposition of turbulent flows: intermittency and coherent structures», R. CAMUSSI & G. GUJ, J. Fluid Mech., vol. 348, 1997, p. 177. «Intermittency and coherent structures in a swirling flow: a wavelet analysis of joint pressure and velocity measurements», P. CHAINAIS, P. ABRY & J.-F. PINTON, Phys. Fluids, vol. 11 (11), 1999, p. 3524.

- [51] «Numerical study of small-scale intermittency in three-dimensional turbulence», E. D. SIGGIA, J. Fluid Mech., vol. 107, 1981, p. 375. «Géométrie des structures à petites échelles dans le vortex de Taylor-Green», M.E. BRACHET, C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS, vol. 311, 1990, p. 775. «Structure and dynamics of homogeneous turbulence : models and simulations», Z.-S. SHE, E. JACKSON & S. ORSZAG, Proc. R. Soc. London Ser. A, vol. 434, 1991, p. 101. «The structure of intense vorticity in homogeneous isotropic turbulence», J. JIMENEZ, A. A. WRAY, P. G. SAFFMAN & R. S. ROGALLO, J. Fluid Mech., vol. 255, 1993, p. 65.
- [52] «Scale Invariance and Scaling Exponents in Fully Developed Turbulence», B. DUBRULLE & F. GRANER, J. Phys. II France, vol. 6, 1996, p. 817-824.
- [53] «Theoretical structures and scaling in turbulence », Z.-S. SHE, Lecture Notes in Physics, vol. 491, édité par EDEN ET AL., 1997, p. 28.
- [54] «Universal laws of cascade of turbulent fluctuations», Z.-S. SHE, Prog. Theo. Phys. Supplement (Japan), vol. 130, 1998, p. 87.
- [55] «Universality and scaling in fully developed turbulence», M. NELKIN, Adv. Phys., vol. 43, 1994, p. 143-181.
- [56] «From global scaling, à la Kolmogorov, to local multifractal scaling in fully developed turbulence», U. FRISCH, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, vol. 434, 1991, p. 89.
- [57] Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics, U. FRISCH & G. PARISI, édition M. GHIL, R. BENZI & G. PARISI, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [58] «Intermittency in fully developed turbulence : Log-Poisson statistics and scale invariance», B. DU-BRULLE, Phys. Rev. Lett., vol. 73, 1994, p. 959.
- [59] «Quantized energy cascade and log-Poisson statistics in fully developed turbulence», Z.-S. SHE & E. C. WAYMIRE, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 74, 1995, p. 262.
- [60] «Shell-models of energy cascade in turbulence», L. BIFERALE, Ann. Rev. Fluid. Mech., vol. 35, 2003, p. 441.
- [61] «Temporal intermittency in the energy cascade process and local Lyapunov analysis in fully developed model turbulence», K. OHKITANI & M. YAMADA, Prog. Theor. Phys., vol. 81, 1989, p. 329.
- [62] Turbulence in fluids, M. LESIEUR, édition Kluwer academic publishers, Dordrecht, 1987.
- [63] Turbulent flows, S. POPE, édition Cambridge University Press, Cambridge, Angleterre, 2000.
- [64] Foundation of fluid dynamics, G. GALLAVOTTI, édition Springler-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2002.
- [65] «Eddy-viscosity in two and three dimensions», R. H. KRAICHNAN, Journal Atmospheric sciences, vol. 33, 1976, p. 1521.
- [66] «Numerical simulation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence», S. A. ORSZAG & G. S. PATTERSON, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 28 (2), 1972, p. 76-79.
- [67] «Velocity field statistics in homogeneous steady turbulence obtained using a high resolution direct numerical simulation», T. GOTOH, D. FUKAYAMA & T. NAKANO, *Phys. Fluids*, vol. 14, 2002, p. 1065-1081.
- [68] Numerical computation of internal and external flows, C. HIRSCH, édition John Wiley & Sons, New-York, 1988.
- [69] «Gramming more components onto integrated circuits», G. MOORE, Electronics, vol. 38 (8), 1965.
- [70] «Inertial ranges in two-dimensional turbulence», R. KRAICHNAN, *Phys. of Fluids*, vol. 10 (7), 1967, p. 1417.
- [71] «Intermittency in nonlinear dynamics and singularities at complex times», U. FRISCH & R. MORF, *Phys. Rev. A*, vol. 23 (5), 1981, p. 2673.
- [72] «Intermittency in the very small scales of turbulence», R. H. KRAICHNAN, *Phys. of Fluids*, vol. 10, 1967, p. 2080.

- [73] «Degrees of freedom of turbulence», G. PALADIN & A. VULPIANI, Phys. Rev. A, vol. 35, 1987, p. 1971.
- [74] *Mesure lagrangienne en turbulence : mise en oeuvre et analyse*, N. MORDANT, thèse présentée à l'ENS-Lyon, 2001.
- [75] the kinematics of mixing, J. M. OTTINO, édition Cambridge University Press, Cambridge, Angleterre, 1989.
- [76] «Measurement of Lagrangian velocity in fully developed turbulence», N. MORDANT, P. METZ, O. MICHEL & J.-F. PINTON, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, 2001, No 214501.
- [77] «Lagrangian statistics from direct numerical simulations of isotropic turbulence», P. K. YEUNG & S. B. POPE, *J. Fluid Mech.*, vol. 207, 1989, p. 531-586.
- [78] «Isotropic turbulence and inertial-range structure», R. H. KRAICHNAN, *The Physics of Fluids*, vol.9 (9), 1966, p. 1729.
- [79] «Diffusion of continuous movements», G. I. TAYLOR, Proc. London Math. Soc., vol. 2 (20), 1921, p. 196-212.
- [80] The Fokker-Planck equation : Methods of solutions and applications, H. RISKEN, édition Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [81] «One dimensional Langevin models of fluid particle acceleration in developed turbulence», A. K. ARINGAZIN & M. I. MAZHITOV, *Phys. Rev. E*, vol. 69, 2004, No 026305.
- [82] «Multifractal Random Walk», E. BACRY, J. DELOUR & J.-F. MUSY, Phys. Rev. E, vol. 64, 2001, No 026103.
- [83] *Processus aléatoire auto-similaires : applications en turbulence et en finance*, J. DELOUR, thèse présentée à l'université de Bordeaux I, 2001.
- [84] «Scale invariance and turbulence models for large-eddy simulation», C. MENEVEAU & J. KATZ, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 32, 2000, p. 1-32.
- [85] «General circulation experiments with the primitive equations : I the basic equations», J. SMAGO-RINSKY, *Mon. Weather Rev.*, vol. 91, 1963, p.99-164.
- [86] Boundary Layer Theory, H. SCHLICHTING, édition McGraw-Hill, New-York, 1968. Turbulence,
 O. J. HINZE, édition McGraw-Hill, New-York, 1959.
- [87] «Scale by scale budget and similarity laws for shear turbulence», C.M. CASCIOLA, P. GUALTIERI, R. BENZI, R. PIVA, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 476, 2003, p. 105-114.
- [88] Large-eddy simulation for incompressible flows: An introduction, P. SAGAUT, édition Springer-Verlag, Heidelberg, 2001.