Coloration fractionnaire

Louis Esperet

CNRS, Laboratoire G-SCOP, Grenoble

DI - ENS Lyon

22 Janvier 2010

Coloration fractionnaire

Le nombre chromatique fractionnaire de $G = (V, E)$, $\chi_f(G)$ est la solution du programme linéaire :

$$\min \sum_{S \text{ stable}} w_S, \text{ avec } \forall v \in V, \sum_{v \in S} w_S \geq 1, \text{ et } w_S \in [0, 1]$$

Coloration fractionnaire

Le nombre chromatique fractionnaire de $G = (V, E)$, $\chi_f(G)$ est la solution du programme linéaire :

$$\min \sum_{S \text{ stable}} w_S, \text{ avec } \forall v \in V, \sum_{v \in S} w_S \geq 1, \text{ et } w_S \in [0, 1]$$

Remarques

- $\omega(G) \leq \chi_f(G) \leq \chi(G)$

Coloration fractionnaire

Le nombre chromatique fractionnaire de $G = (V, E)$, $\chi_f(G)$ est la solution du programme linéaire :

$$\min \sum_{S \text{ stable}} w_S, \text{ avec } \forall v \in V, \sum_{v \in S} w_S \geq 1, \text{ et } w_S \in [0, 1]$$

Remarques

- $\omega(G) \leq \chi_f(G) \leq \chi(G)$
- $\chi_f(G) \geq n/\alpha(G)$

Coloration fractionnaire

Le nombre chromatique fractionnaire de $G = (V, E)$, $\chi_f(G)$ est la solution du programme linéaire :

$$\min \sum_{S \text{ stable}} w_S, \text{ avec } \forall v \in V, \sum_{v \in S} w_S \geq 1, \text{ et } w_S \in [0, 1]$$

Remarques

- $\omega(G) \leq \chi_f(G) \leq \chi(G)$
- $\chi_f(G) \geq n/\alpha(G)$

Exercice

Déterminer $\chi_f(C_5)$.

Polytope des stables

Définition

Le polytope des stables de G, noté $STAB(G)$, est l'enveloppe convexe des vecteurs caractéristiques des stables de G.

Polytope des stables

Définition

Le polytope des stables de G, noté $STAB(G)$, est l'enveloppe convexe des vecteurs caractéristiques des stables de G.

Théorème

$\chi_f(G) = \min\{k \in \mathbb{R}^+, \, (\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}) \in STAB(G)\}$

Polytope des stables

Définition

Le polytope des stables de G, noté $STAB(G)$, est l'enveloppe convexe des vecteurs caractéristiques des stables de G.

Théorème

$\chi_f(G) = \min\{k \in \mathbb{R}^+,\ (\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}) \in STAB(G)\}$

Définition

Le polytope des stables fractionnaire de $G = (V, E)$ est l'ensemble $QSTAB(G) = \{w \in [0,1]^n, \forall uv \in E, w_u + w_v \leq 1\}$.

Polytope des stables

Définition

Le polytope des stables de G, noté $STAB(G)$, est l'enveloppe convexe des vecteurs caractéristiques des stables de G.

Théorème

$\chi_f(G) = \min\{k \in \mathbb{R}^+,\ (\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}) \in STAB(G)\}$

Définition

Le polytope des stables fractionnaire de $G = (V, E)$ est l'ensemble $QSTAB(G) = \{w \in [0,1]^n, \forall uv \in E, w_u + w_v \leq 1\}$.

Théorème

Pour tout graphe G, $STAB(G) \subseteq QSTAB(G)$. Il y a égalité si et seulement si G est parfait.

Coloration fractionnaire (2)

Définition

Une $(a : b)$-coloration de G est une coloration c des sommets de G avec des sous-ensembles de $\{1, \ldots, a\}$ à b éléments telle que pour toute arête uv, $c(u) \cap c(v) = \varnothing$.

Coloration fractionnaire (2)

Définition

Une $(a:b)$-coloration de G est une coloration c des sommets de G avec des sous-ensembles de $\{1,\ldots,a\}$ à b éléments telle que pour toute arête uv, $c(u) \cap c(v) = \varnothing$.

Théorème

$\chi_f(G) = \min\left\{\frac{a}{b},\ G \text{ a une } (a:b)\text{-coloration}\right\}$

Coloration fractionnaire (2)

Définition

Une $(a : b)$-coloration de G est une coloration c des sommets de G avec des sous-ensembles de $\{1, \dots, a\}$ à b éléments telle que pour toute arête uv, $c(u) \cap c(v) = \varnothing$.

Théorème

$\chi_f(G) = \min\left\{\frac{a}{b},\ G \text{ a une } (a : b)\text{-coloration}\right\}$

Exercice

Déterminer $\chi_f(C_{2n+1})$.

Graphes de Kneser

$GK(a,b)$: le graphe dont les sommets sont les sous-ensembles de $\{1,\ldots,a\}$ à b éléments et dans lequel deux sommets sont adjacents si les ensembles correspondants sont disjoints.

Graphes de Kneser

$GK(a, b)$: le graphe dont les sommets sont les sous-ensembles de $\{1, \ldots, a\}$ à b éléments et dans lequel deux sommets sont adjacents si les ensembles correspondants sont disjoints.

Exercice

Faites un joli dessin de $GK(5, 2)$.

Graphes de Kneser

$GK(a, b)$: le graphe dont les sommets sont les sous-ensembles de $\{1, \ldots, a\}$ à b éléments et dans lequel deux sommets sont adjacents si les ensembles correspondants sont disjoints.

Exercice

Faites un joli dessin de $GK(5, 2)$.

Théorème

$\chi_f(GK(a, b)) = \frac{a}{b}$.

Graphes de Kneser

$GK(a, b)$: le graphe dont les sommets sont les sous-ensembles de $\{1, \ldots, a\}$ à b éléments et dans lequel deux sommets sont adjacents si les ensembles correspondants sont disjoints.

Exercice

Faites un joli dessin de $GK(5, 2)$.

Théorème

$\chi_f(GK(a, b)) = \frac{a}{b}$.

Théorème (Lovász)

$\chi(GK(a, b)) = a - 2b + 2$.

Une touche de topologie algébrique

S^d : l'ensemble des vecteurs de norme 1 dans $\mathbb{R}^{d+1}$

Une touche de topologie algébrique

S^d : l'ensemble des vecteurs de norme 1 dans $\mathbb{R}^{d+1}$

Théorème de Borsuk-Ulam

Pour toute fonction continue $f : S^d \to \mathbb{R}^d$, il existe $x \in S^d$ tel que $f(x) = f(-x)$.

Une touche de topologie algébrique

S^d : l'ensemble des vecteurs de norme 1 dans $\mathbb{R}^{d+1}$

Théorème de Borsuk-Ulam

Pour toute fonction continue $f : S^d \to \mathbb{R}^d$, il existe $x \in S^d$ tel que $f(x) = f(-x)$.

Théorème de Lyusternik-Shnirel'man généralisé

Pour toute couverture de S^d par des ensembles $A_1, \ldots A_{d+1}$ qui sont ouverts ou fermés, un des A_i contient deux points antipodaux de S^d.

Graphes de décalage

$DS(n)$: le graphe dont les sommets sont les triplets ordonnés de $\{1, \ldots, n\}$, et dont les arêtes sont de la forme $(a < b < c) - (b < c < d)$.

Graphes de décalage

$DS(n)$: le graphe dont les sommets sont les triplets ordonnés de $\{1, \ldots, n\}$, et dont les arêtes sont de la forme $(a < b < c) - (b < c < d)$.

Théorème

$\chi(DS(n)) = \log\log n + (1/2 + o(1)) \log\log\log n$.

Graphes de décalage

$DS(n)$: le graphe dont les sommets sont les triplets ordonnés de $\{1, \dots, n\}$, et dont les arêtes sont de la forme $(a < b < c) - (b < c < d)$.

Théorème

$\chi(DS(n)) = \log\log n + (1/2 + o(1)) \log\log\log n$.

Théorème

$\chi(DS(n))$ est le plus petit k tel qu'il existe au moins n fonctions booléennes monotones $\{0,1\}^k \to \{0,1\}$.

Graphes de décalage

$DS(n)$: le graphe dont les sommets sont les triplets ordonnés de $\{1, \ldots, n\}$, et dont les arêtes sont de la forme $(a < b < c) - (b < c < d)$.

Théorème

$\chi(DS(n)) = \log\log n + (1/2 + o(1)) \log\log\log n$.

Théorème

$\chi(DS(n))$ est le plus petit k tel qu'il existe au moins n fonctions booléennes monotones $\{0,1\}^k \to \{0,1\}$.

Théorème

$\chi(DS(n))$ est le plus petit k tel qu'il existe au moins n antichaînes dans l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, k\}$ ordonné par inclusion.