Coloration de graphes

Louis Esperet

CNRS, Laboratoire G-SCOP, Grenoble

DI - ENS Lyon

18 Janvier 2010

Introduction

Francis Guthrie (1852)

Peut-on colorier toutes les cartes géographiques avec quatre couleurs, de telle sorte que toute paire de pays voisins aient des couleurs distinctes ?

Introduction

Francis Guthrie (1852)

Peut-on colorier toutes les cartes géographiques avec quatre couleurs, de telle sorte que toute paire de pays voisins aient des couleurs distinctes ?

1879 : preuve de Kempe

Introduction

Francis Guthrie (1852)

Peut-on colorier toutes les cartes géographiques avec quatre couleurs, de telle sorte que toute paire de pays voisins aient des couleurs distinctes ?

1879 : preuve de Kempe
1890 : la preuve de Kempe est fausse (Heawood)

Introduction

Francis Guthrie (1852)

Peut-on colorier toutes les cartes géographiques avec quatre couleurs, de telle sorte que toute paire de pays voisins aient des couleurs distinctes ?

1879 : preuve de Kempe
1890 : la preuve de Kempe est fausse (Heawood)
1977 : preuve assistée par ordinateur, par Appel et Haken

Introduction

Francis Guthrie (1852)

Peut-on colorier toutes les cartes géographiques avec quatre couleurs, de telle sorte que toute paire de pays voisins aient des couleurs distinctes ?

1879 : preuve de Kempe
1890 : la preuve de Kempe est fausse (Heawood)
1977 : preuve assistée par ordinateur, par Appel et Haken
1997 : Robertson, Sanders, Seymour et Thomas simplifient la preuve

Introduction

Francis Guthrie (1852)

Peut-on colorier toutes les cartes géographiques avec quatre couleurs, de telle sorte que toute paire de pays voisins aient des couleurs distinctes ?

1879 : preuve de Kempe
1890 : la preuve de Kempe est fausse (Heawood)
1977 : preuve assistée par ordinateur, par Appel et Haken
1997 : Robertson, Sanders, Seymour et Thomas simplifient la preuve
2005 : Gonthier valide la preuve avec Coq

Définitions

Définition

Un graphe est planaire s'il peut être dessiné sans croisement d'arêtes.

Définitions

Définition

Un graphe est planaire s'il peut être dessiné sans croisement d'arêtes.

Définition

Une *k-coloration* d'un graphe $G = (V, E)$ est une fonction $c : V \Rightarrow \{1, \ldots, k\}$ telle que pour toute arête $uv \in E$, $c(u) \neq c(v)$.

Définitions

Définition

Un graphe est planaire s'il peut être dessiné sans croisement d'arêtes.

Définition

Une k-coloration d'un graphe $G = (V, E)$ est une fonction $c : V \Rightarrow \{1, \ldots, k\}$ telle que pour toute arête $uv \in E$, $c(u) \neq c(v)$.
Le nombre chromatique de G, noté $\chi(G)$, est le plus petit k tel que G admette une k-coloration.

Définitions

Définition

Un graphe est planaire s'il peut être dessiné sans croisement d'arêtes.

Définition

Une k-coloration d'un graphe $G = (V, E)$ est une fonction $c : V \Rightarrow \{1, \ldots, k\}$ telle que pour toute arête $uv \in E$, $c(u) \neq c(v)$.
Le nombre chromatique de G, noté $\chi(G)$, est le plus petit k tel que G admette une k-coloration.

Théorème des 4 couleurs

Pour tout graphe planaire G, $\chi(G) \leq 4$.

Coloration par listes

Définition

Dans un graphe $G = (V, E)$, une k-assignation de listes est une fonction L qui à chaque sommet $v \in V$ associe une liste $L(v)$ de k entiers.

Coloration par listes

Définition

Dans un graphe $G = (V, E)$, une k-assignation de listes est une fonction L qui à chaque sommet $v \in V$ associe une liste $L(v)$ de k entiers.

Définition

Un graphe G est k-liste coloriable si pour toute assignation de listes L, G admet une coloration c telle que pour toute arête $uv \in E$, $c(u) \neq c(v)$ et pour tout sommet $u \in V$, $c(u) \in L(u)$.

Coloration par listes

Définition

Dans un graphe $G = (V, E)$, une k-assignation de listes est une fonction L qui à chaque sommet $v \in V$ associe une liste $L(v)$ de k entiers.

Définition

Un graphe G est k-liste coloriable si pour toute assignation de listes L, G admet une coloration c telle que pour toute arête $uv \in E$, $c(u) \neq c(v)$ et pour tout sommet $u \in V$, $c(u) \in L(u)$.
Le plus petit k tel que G soit k-liste coloriable est le nombre chromatique par listes de G, noté $ch(G)$.

Coloration vs. Coloration par listes

Remarque

- Pour tout graphe G, $\chi(G) \leq ch(G)$.
- ch n'est pas borné par une fonction de χ

Coloration vs. Coloration par listes

Remarque

- Pour tout graphe G, $\chi(G) \leq ch(G)$.
- ch n'est pas borné par une fonction de χ

Exercice

Montrer que les cycles pairs sont 2-liste coloriables.

Coloration vs. Coloration par listes

Remarque

- Pour tout graphe G, $\chi(G) \leq ch(G)$.
- ch n'est pas borné par une fonction de χ

Exercice

Montrer que les cycles pairs sont 2-liste coloriables.

Un graphe G est *k-dégénéré* si tout sous-graphe de G contient un sommet de degré au plus k.

Coloration vs. Coloration par listes

Remarque

- Pour tout graphe G, $\chi(G) \leq ch(G)$.
- ch n'est pas borné par une fonction de χ

Exercice

Montrer que les cycles pairs sont 2-liste coloriables.

Un graphe G est *k-dégénéré* si tout sous-graphe de G contient un sommet de degré au plus k.

Proposition

Si G est k-dégénéré, $ch(G) \leq k + 1$.

Graphes planaires

Formule d'Euler

Tout graphe planaire connexe à n sommets, m arêtes, et f faces vérifie :

$$n - m + f = 2.$$

Graphes planaires

Formule d'Euler

Tout graphe planaire connexe à n sommets, m arêtes, et f faces vérifie :

$$n - m + f = 2.$$

Exercice

1. Montrer que $m \leq 3n - 6$.
2. En déduire que si G est planaire, $ch(G) \leq 6$.

Graphes planaires

Théorème (Thomassen 1995)

Si G est planaire, $ch(G) \leq 5$.

Graphes planaires

Théorème (Thomassen 1995)

Si G est planaire, $ch(G) \leq 5$.

Théorème plus fort

Soit G un graphe planaire, et L une assignation de listes de taille

- 1 pour deux sommets adjacents de la face externe
- 3 pour les autres sommets de la face externe
- 5 pour les autres sommets

Alors G est coloriable de telle sorte que chaque sommet ait une couleur de sa liste.

Graphes planaires

Théorème (Thomassen 1995)

Si G est planaire, $ch(G) \leq 5$.

Théorème plus fort

Soit G un graphe planaire, et L une assignation de listes de taille

- 1 pour deux sommets adjacents de la face externe
- 3 pour les autres sommets de la face externe
- 5 pour les autres sommets

Alors G est coloriable de telle sorte que chaque sommet ait une couleur de sa liste.

Théorème (Voigt 1994)

Il existe des graphes planaires qui ne sont pas 4-liste coloriables.

Graphes sur les surfaces

Définition

Le genre d'un graphe G est le plus petit entier k tel que G soit dessinable (sans croisement d'arêtes) sur une surface orientable de genre k.

Graphes sur les surfaces

Définition

Le genre d'un graphe G est le plus petit entier k tel que G soit dessinable (sans croisement d'arêtes) sur une surface orientable de genre k.

Formule d'Euler

Tout graphe de genre g connexe à n sommets, m arêtes, et f faces vérifie :

$$n - m + f = 2 - 2g.$$

Graphes sur les surfaces

Définition

Le genre d'un graphe G est le plus petit entier k tel que G soit dessinable (sans croisement d'arêtes) sur une surface orientable de genre k.

Formule d'Euler

Tout graphe de genre g connexe à n sommets, m arêtes, et f faces vérifie :

$$n - m + f = 2 - 2g.$$

Exercice

Pour tout graphe G de genre $g \geq 1$, $ch(G) \leq \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48g}}{2} \right\rfloor$.

Graphes sur les surfaces

Définition

Le genre d'un graphe G est le plus petit entier k tel que G soit dessinable (sans croisement d'arêtes) sur une surface orientable de genre k.

Formule d'Euler

Tout graphe de genre g connexe à n sommets, m arêtes, et f faces vérifie :

$$n - m + f = 2 - 2g.$$

Exercice

Pour tout graphe G de genre $g \geq 1$, $ch(G) \leq \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48g}}{2} \right\rfloor$.

Conséquence

Tout graphe de genre g est $\left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48g}}{2} \right\rfloor$-coloriable.

Déchargement

Un algorithme quadratique très simple pour 4-colorier les graphes planaires 3-coloriables (Kawarabayashi et Ozeki 2009).

Déchargement

Un algorithme quadratique très simple pour 4-colorier les graphes planaires 3-coloriables (Kawarabayashi et Ozeki 2009).

Lemme

Tout graphe planaire contient un sommet de degré au plus 4, ou un sommet de degré 5 incident à 4 faces de degré 3 et une face de degré 3, 4 ou 5.

Déchargement

Un algorithme quadratique très simple pour 4-colorier les graphes planaires 3-coloriables (Kawarabayashi et Ozeki 2009).

Lemme

Tout graphe planaire contient un sommet de degré au plus 4, ou un sommet de degré 5 incident à 4 faces de degré 3 et une face de degré 3, 4 ou 5.

Algorithme

Déchargement

Un algorithme quadratique très simple pour 4-colorier les graphes planaires 3-coloriables (Kawarabayashi et Ozeki 2009).

Lemme

Tout graphe planaire contient un sommet de degré au plus 4, ou un sommet de degré 5 incident à 4 faces de degré 3 et une face de degré 3, 4 ou 5.

Algorithme

1. Si le graphe a un sommet de degré au plus 4 : Chaînes de Kempe

Déchargement

Un algorithme quadratique très simple pour 4-colorier les graphes planaires 3-coloriables (Kawarabayashi et Ozeki 2009).

Lemme

Tout graphe planaire contient un sommet de degré au plus 4, ou un sommet de degré 5 incident à 4 faces de degré 3 et une face de degré 3, 4 ou 5.

Algorithme

1. Si le graphe a un sommet de degré au plus 4 : Chaînes de Kempe
2. Sinon, on identifie les deux sommets de la même couleur