Coloration des graphes sans triangles

Louis Esperet

CNRS, Laboratoire G-SCOP, Grenoble

DI - ENS Lyon

19 Janvier 2010

Problème

Question

Le nombre chromatique des graphes est-il borné par une fonction de la taille de leur plus grande clique ?

Problème

Question

Le nombre chromatique des graphes est-il borné par une fonction de la taille de leur plus grande clique ?

1949 : graphes sans triangles avec χ non borné (Zykov)

Problème

Question

Le nombre chromatique des graphes est-il borné par une fonction de la taille de leur plus grande clique ?

1949 : graphes sans triangles avec χ non borné (Zykov)
1955 : graphes sans triangles avec χ non borné (Mycielski)

Problème

Question

Le nombre chromatique des graphes est-il borné par une fonction de la taille de leur plus grande clique ?

1949 : graphes sans triangles avec χ non borné (Zykov)
1955 : graphes sans triangles avec χ non borné (Mycielski)
1954 : graphes sans $^{\leq}$5-cycles avec χ non borné (Blanche Descartes)

Problème

Question

Le nombre chromatique des graphes est-il borné par une fonction de la taille de leur plus grande clique ?

1949 : graphes sans triangles avec χ non borné (Zykov)
1955 : graphes sans triangles avec χ non borné (Mycielski)
1954 : graphes sans $^{\leq}$5-cycles avec χ non borné (Blanche Descartes)
1959 : graphes sans $^{\leq}\ell$-cycles avec χ non borné (Erdős)

Problème

Question

Le nombre chromatique des graphes est-il borné par une fonction de la taille de leur plus grande clique ?

1949 : graphes sans triangles avec χ non borné (Zykov)
1955 : graphes sans triangles avec χ non borné (Mycielski)
1954 : graphes sans $^{\leq}$5-cycles avec χ non borné (Blanche Descartes)
1959 : graphes sans $^{\leq}\ell$-cycles avec χ non borné (Erdős)
1968 : preuve constructive (Lovász)

Méthode du premier moment

Principe du premier moment

Si $\mathbf{E}(X) \leq t$, $\mathbf{Pr}(X \leq t) > 0$.

Méthode du premier moment

Principe du premier moment

Si $\mathbf{E}(X) \leq t$, $\mathbf{Pr}(X \leq t) > 0$.

Inégalité de Markov

Pour tout variable aléatoire X positive, $\mathbf{Pr}(X \geq t) \leq \mathbf{E}(X)/t$.

Méthode du premier moment

Principe du premier moment

Si $\mathbf{E}(X) \leq t$, $\mathbf{Pr}(X \leq t) > 0$.

Inégalité de Markov

Pour tout variable aléatoire X positive, $\mathbf{Pr}(X \geq t) \leq \mathbf{E}(X)/t$.

Conséquence

Pour tout variable aléatoire X entière positive, $\mathbf{Pr}(X > 0) \leq \mathbf{E}(X)$.

Graphes sans triangles

Théorème (Erdős '59)

Pour tout $k \geq 1$, il existe des graphes sans triangles, qui ne sont pas k-colorables.

Graphes sans triangles

Théorème (Erdős '59)

Pour tout $k \geq 1$, il existe des graphes sans triangles, qui ne sont pas k-colorables.

Preuve :

$G_{n,p}$, avec $p = n^{-2/3}$

Graphes sans triangles

Théorème (Erdős '59)

Pour tout $k \geq 1$, il existe des graphes sans triangles, qui ne sont pas k-colorables.

Preuve :

$G_{n,p}$, avec $p = n^{-2/3}$

I = le nombre de stables de taille $\lceil \frac{n}{2k} \rceil$

Graphes sans triangles

Théorème (Erdős '59)

Pour tout $k \geq 1$, il existe des graphes sans triangles, qui ne sont pas k-colorables.

Preuve :

$G_{n,p}$, avec $p = n^{-2/3}$

$I =$ le nombre de stables de taille $\lceil \frac{n}{2k} \rceil$
Pour n assez grand, $\mathbf{E}(I) < \frac{1}{2}$.

Graphes sans triangles

Théorème (Erdős '59)

Pour tout $k \geq 1$, il existe des graphes sans triangles, qui ne sont pas k-colorables.

Preuve :
$G_{n,p}$, avec $p = n^{-2/3}$

I = le nombre de stables de taille $\lceil \frac{n}{2k} \rceil$
Pour n assez grand, $\mathbf{E}(I) < \frac{1}{2}$.

T = le nombre de triangles

Graphes sans triangles

Théorème (Erdős '59)

Pour tout $k \geq 1$, il existe des graphes sans triangles, qui ne sont pas k-colorables.

Preuve :
$G_{n,p}$, avec $p = n^{-2/3}$

I = le nombre de stables de taille $\lceil \frac{n}{2k} \rceil$
Pour n assez grand, $\mathbf{E}(I) < \frac{1}{2}$.

T = le nombre de triangles
Pour n assez grand, $\mathbf{Pr}(T \geq \frac{n}{2}) < \frac{1}{3}$.

Graphes sans triangles

Théorème (Erdős '59)

Pour tout $k \geq 1$, il existe des graphes sans triangles, qui ne sont pas k-colorables.

Preuve :
$G_{n,p}$, avec $p = n^{-2/3}$

I = le nombre de stables de taille $\lceil \frac{n}{2k} \rceil$
Pour n assez grand, $\mathbf{E}(I) < \frac{1}{2}$.

T = le nombre de triangles
Pour n assez grand, $\mathbf{Pr}(T \geq \frac{n}{2}) < \frac{1}{3}$.

On crée un graphe G', d'ordre $n' \geq \frac{n}{2}$. G' n'a pas de triangles et pas de stables de taille $\lceil \frac{n}{2k} \rceil \leq \lceil \frac{n'}{k} \rceil$.

Graphes sans triangles

Théorème (Erdős '59)

Pour tout $k \geq 1$, il existe des graphes sans triangles, qui ne sont pas k-colorables.

Preuve :

$G_{n,p}$, avec $p = n^{-2/3}$

I = le nombre de stables de taille $\lceil \frac{n}{2k} \rceil$
Pour n assez grand, $\mathbf{E}(I) < \frac{1}{2}$.

T = le nombre de triangles
Pour n assez grand, $\mathbf{Pr}(T \geq \frac{n}{2}) < \frac{1}{3}$.

On crée un graphe G', d'ordre $n' \geq \frac{n}{2}$. G' n'a pas de triangles et pas de stables de taille $\lceil \frac{n}{2k} \rceil \leq \lceil \frac{n'}{k} \rceil$. Donc $\chi(G') > k$.

Graphes denses sans triangles

Théorème (Andrásfai 1964)

Les graphes sans triangles et de degré minimum $> 2n/5$ sont bipartis.

Graphes denses sans triangles

Théorème (Andrásfai 1964)

Les graphes sans triangles et de degré minimum $> 2n/5$ sont bipartis.

Question (Erdős et Simonovits 1972)

Les graphes sans triangles et de degré minimum $> n/3$ sont-ils 3-coloriables ?

Graphes denses sans triangles

Théorème (Andrásfai 1964)

Les graphes sans triangles et de degré minimum $> 2n/5$ sont bipartis.

Question (Erdős et Simonovits 1972)

Les graphes sans triangles et de degré minimum $> n/3$ sont-ils 3-coloriables ?

Réponse (Häggkvist 1981)

Construire un graphe G sans triangles, 10-régulier, à 29 sommets, et tel que $\chi(G) = 4$.

Graphes denses sans triangles

Théorème (Andrásfai 1964)

Les graphes sans triangles et de degré minimum $> 2n/5$ sont bipartis.

Question (Erdős et Simonovits 1972)

Les graphes sans triangles et de degré minimum $> n/3$ sont-ils 3-coloriables ?

Réponse (Häggkvist 1981)

Construire un graphe G sans triangles, 10-régulier, à 29 sommets, et tel que $\chi(G) = 4$.

Théorème (Brandt et Thomassé 2009)

Les graphes sans triangles et de degré minimum $> n/3$ sont 4-coloriables.