Cours ENS Lyon, janvier 2010, Infos Préliminaires

András Sebő*

17 janvier 2010

1 Introduction

J'utiliserai le cours de Pascal Koiran (Alg2) comme prérequis. S'il vous plait, révisez vos notes ! Si vous êtes à jour dans les sujets suivants, on sera capable de couvrir relativement beaucoup de choses en 6h. Voici les sujets précis qu'il faudrait bien réviser :

- arbres couvrants de poids minimum (Alg2 : 2.4)
- Couplages (Alg2 : Chapitre 4, et n'oubliez pas 4.2.2 non plus : on utilisera le Lemme de Schwarz-Zippel)
- Flots (Alg2, Chapitre 5) et l'idée de la dualité de la programmation linéaire (6.1).

On reprendra la plupart des théorèmes dont on se sert, mais on devrait éviter de passer trop de temps à reprouver ce que vous connaissez déjà. Ceux qui n'ont pas suivi le cours Algorithmique 2 ne seront pas nécessairement perdus, mais devront travailler plus à postériori.

Les exercices ci-dessous déclencheront peut-être des efforts de révision ou de mise à niveau – ou simplement à vous entrainer, réfléchir, espérons aussi à vous amuser.

2 Programme du cours

Mardi, nous survolerons quelques *modèles d'optimisation combinatoire* (en nous arrêtant peut-être à certaines idées), et en donnant une structuration préliminaire des problèmes. Ceci nous amènera naturellement aux *matroïdes, l'algorithme glouton, et le polytôpe associé.*

Mercredi matin je voudrais vous montrer *l'algorithme de l'intersection de deux matroïdes et mentionner quelques applications.* J'espère avoir du temps aussi pour discuter les exercices ci-dessous, pour préparer l'algorithme d'Edmonds pour les couplages non-bipartis.

Je voudrais que nous arrivions mercredi après-midi à une bonne compréhension de *l'algorithme de couplage de cardinalité maximum* (Edmonds), du théorème de bonne caractérisation lié (Théorème de Tutte-Berge), en mentionnant quelques applications et généralisations.

S'il y a des questions sur les exercices ci-dessous, vous pouvez les poser après le premier cours, mardi.

*CNRS, Laboratoire G-SCOP équipe Optimisation Combinatoire 46, avenue Félix Viallet, 38031 Grenoble Cedex 1, France, `Andras.Sebo@g-scop.inpg.fr`

3 Exercices d'échauffement

Un couplage est un ensemble d'arêtes sommet-disjointes dans un graphe. Le problème du couplage maximum, ou le couplage parfait de poids minimum, et d'autres variantes font parties des problèmes de base de l'optimisation combinatoire : les théorèmes minimax les concernant sont typiques, les applications sont nombreuses (ordonnancement, problème du postier, T-chemins de Gallai, etc), leur rôle dans la combinatoire polyédrale et dans le développement d'autre méthodes de la combinatoire (fonctions sous-modulaires, méthodes des variables) est fondamentale.

Si G est un graphe, $V(G)$ est l'ensemble de ses sommets et $E(G)$ l'ensemble de ses arêtes ; $\nu(G)$ est la cardinalité des couplages maximum, et $\tau(G)$ du transversal minimum.

Exercise 1 Soit G biparti, et $uv \in E(G)$. Alors soit $\nu(G-u) < \nu(G)$, soit $\nu(G-v) < \nu(G)$. Déduire une preuve simple du théorème de Kőnig $\nu(G) = \tau(G)$ pour tout graphe biparti G.

Exercise 2 Soit G un graphe, et $uv \in E(G)$. Alors soit $\nu(G-u) < \nu(G)$, soit $\nu(G-v) < \nu(G)$, soit pour tout couplage maximum M_u de $G-u$, et M_v de $G-v$: $M_u \cup M_v$ contient un chemin (u,v) qui alterne entre M_u et M_v.

Si G est un graphe et $X \subseteq E(G)$, alors G/X est le graphe qu'on obtient en contractant toutes les arêtes de X. (Ca revient à identifier toutes les composantes du graphe induit par X en un seul sommet.)

Exercise 3 Soit G un graphe, $uv \in E(G)$ et $\nu(G-u) = \nu(G)$, $\nu(G-v) = \nu(G)$. Alors pour le chemin alterné P de l'exercice précédent le nombre minimum de sommet non-couverts par un couplage est le même dans G/P que dans G.

Exercise 4 Déduire par récurrence en utilisant les Exercices 2 and 3 le Théorème de Tutte-Berge : le nombre minimum de sommets non-couverts par un couplage est égal au maximum de $q(X) - |X|$, où $q(X)$ est le nombre de composantes impaires de $G - X$.

Si pour un ensemble $X \subseteq V(G)$ la valeur de $q(X) - |X|$ est maximum, alors on dit que c'est un *ensemble de Tutte*.

Exercise 5 Si $v \in V(G)$ fait partie d'un ensemble de Tutte, alors tous les couplages maximum le couvrent.

Références

[1] L. Lovász, Plummer, Matching Theory

[2] A. Schrijver, Combinatorial Optimization

[3] L. Lovász, Combinatorial Problems and Exercises