Cours ENS Lyon, janvier 2010,
Pont entre les deux cours

András Sebő *

19 janvier 2010

Remarques et exercices entre les deux cours (compléments au 1er - préliminaires au 2ème). Je mets un **!** a côté de ceux qu'on utilisera demain – pour le reste vous pouvez **!** attendre la semaine prochaine. Donc ne désesperez pas, pour demain il y a peu ….

1 Opérations sur les matroïdes

On appelle *mineur* du matroide $M = (S, \mathcal{F})$ les matroïdes qu'on obtient de M par une succession de *suppressions* ou *contractions* d'elements , c'est à dire : **!**
$M \setminus e := M - e := (S \setminus e, \mathcal{F} \setminus e)$, $\qquad M/e := (S \setminus e, \mathcal{F}/e)$,
où $\mathcal{F} \setminus e = \{F \in \mathcal{F} : F \subseteq S \setminus e\}$, $\qquad \mathcal{F}/\{e\} = \{F \in \mathcal{F} : F \subseteq S \setminus e, F \cup \{e\} \in \mathcal{F}\}$.

Le *dual* $M^* = (S, \mathcal{B}^*)$ de $M = (S, \mathcal{B})$ (matroïdes définis par leur bases !) est défini **!** par $\mathcal{B}^* := \{S \setminus B : B \in \mathcal{B}\}$.

La *somme* de deux matroïdes $M = (S, \mathcal{F}_1)$, $M = (S, \mathcal{F}_2)$: $M = (S, \mathcal{F})$, ou $\mathcal{F} :=$ **!** $\{F = F_1 \cup F_2 : F_1 \in \mathcal{F}_1, F_2 \in \mathcal{F}_2\}$.

Exercise 1 Montrez que le résultat de toutes ces opérations est un matroïde.

Exercise 2 Montrer que $(M \setminus e)/f = (M \setminus f)/e$, par conséquent le résultat d'une suite de contractions et suppressions ne dépend pas de l'ordre dans lequel ces opérations sont exécutés.

Exercise 3 Montrer que $(M \setminus e)/f = (M \setminus f)/e$, par conséquent le résultat d'une suite de contractions et suppressions ne dépend pas de l'ordre dans lequel ces opérations sont exécutés.

Exercise 4 Montrer que $(M \setminus e)^* = M^*/e$. **!**

Exercise 5 Montrer la fonction de rang du dual d'un matroïde est définie par $r^*(X) = |X| - (r(S) - r(S \setminus X))$.

Exercise 6 Montrer que dans le cas particulier des matroïdes graphiques, les opérations se spécialisent à l'opération correspondante suggéré par la terminologie. En particulier, si G est un graphe planaire, $M^*(G) = M(G^*)*$, de plus les circuits de G sont les coupes de G^*.

Convainquez vous juste informellement sur un dessin que ces propriétés sont vraies. **!**

Exercise 7 Prouver la formule d'Euler concernant les graphes planaires connexes en utilisant l'exercice précédent.

2 Exemples

Vérifier que nos 5 exemples forment vraiment un matroïde. (Utiliser les chaînes augmentantes et pour les gammoïdes : les flots.) Pour vous entrainer, regardez ce que deviennent les différentes notions dans ces exemples. Est-ce qu'ils sont fermé par les opérations (de mineur, ou de dual ou de somme) ?

3 Axiomes

Exercise 1 Montrer que $\mathcal{B}$ est l'ensemble des bases d'un matroides, si et seulement si pour tout $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et $x \in B_2 \setminus B_1$ there exists $y \in B_2 \setminus B_1$ so that $(B_1 \setminus x) \cup y \in \mathcal{B}$.

Exercise 2 Montrer que $r : \mathcal{S} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ est la fonction de rang d'un matroïde si et seulement si r est monoton et sous-modulaire

Exercise 3 Montrer que $r : \mathcal{S} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ est la fonction de rang d'un matroïde si et seulement si $r(\emptyset) = 0$, en ajoutant un élément r augmente au plus de 1 et $r(U \cup x) = r(U \cup y) = r(U)$ implies $r(U \cup \{x, y\}) = r(U)$.

Pour demain montrez juste que la fonction de rang d'un matroïde satisfait ca. **!**

4 Théorèmes minmax et programmes linéaires

Seulement pour ceux qui connaissent un peu la programmation linéaire :

Exercise 1 Soit $M = (S, \mathcal{F})$ un matroïde. A l'exemple de " l'inégalité facile du théorème de dualité de la programmation linéaire" montrer que pour toute fonction de poids $c : S \longrightarrow \mathbb{R}_+$, le poids de l'indépendant de poids maximum est inférieur où égal à $\sum_{U \in \mathcal{U}} r(U)$, où $\mathcal{U}$ couvre chaque élément $e \in S$ exactement $c(e)$ fois. **!**

Les deux prochains paragraphes sont pour demain, ne les lisez pas aujourd'hui :

Prouver le théorème d'Edmonds sur la description linéaire de l'envelope convex des indépendants, en utilisant le théorème maxmin qu'on a montré avec l'algorithme glouton. (Aide : Utiliser le lemme de Farkas ou plus simplement dit : l'existance d'un hyperplan séparateur entre un polyèdre et un point qu'il ne contient pas.)

Peut-on "inverser" le théorème de dualité en général en déduisant des théorèmes maxmin (ou minmax) une description polyédrale ? Essayez d'énoncer un théorème général qui établi une telle relation.

*CNRS, Laboratoire G-SCOP équipe Optimisation Combinatoire 46, avenue Félix Viallet, 38031 Grenoble Cedex 1, France, `Andras.Sebo@g-scop.inpg.fr`