Beaux ordres et graphes

Denis Kuperberg

04/05/07

Table des matières

1 Introduction

On s'intéresse ici à la notion de bel ordre, définie dans la première section. Le début du rapport donne des exemples arithmétiques, pour avoir une intuition de ce qu'est un bel ordre : comment trouver un bel ordre sur un produit, ou sur un ensemble de parties ?
On s'intéresse ensuite aux beaux ordres sur les graphes, et plus particulièrement à la relation de mineur. Cette notion a permis des avancées énormes dans la théorie des graphes, en permettant par exemple de caractériser simplement de nombreuses familles de graphes. On verra qu'elle induit également des beaux ordres

On verra enfin comment ces résultats sur les graphes peuvent avoir des implications en algorithmie.

2 Définition et caractérisations

2.1 Définition des beaux ordres

Définition 1 *Soit* $(X, \leq)$ *un ensemble ordonné.* $\leq$ *est un bel ordre sur* X *si* $\forall (x_n) \in X^{\mathbb{N}}, \exists\, i < j : x_i \leq x_j$

Exemple : l'ordre usuel est un bel ordre sur $\mathbb{N}$, mais pas sur $\mathbb{Z}$ ni sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Dans la plupart du cas, il suffit que $\leq$ soit un préordre, on n'utilisera pas la propriété d'antisymétrie dans les preuves.

Définition 2 $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ *est une antichaine si* $\forall\, i, j : x_i$ *non comparable à* x_j

2.2 Autres caractérisations

Théorème 1 *Voici deux autres caractérisations des beaux ordres :*
① *De toute suite on peut extraire une sous-suite croissante*
② *Il n'existe ni antichaine infinie, ni suite strictement décroissante*

Démonstration du ①

La condition est clairement suffisante : si on peut extraire une sous-suite croissante, on a a fortiori deux indices $i < j$ tels que $x_i \leq x_j$

On suppose maintenant que l'on a un bel ordre $\leq$ sur X.
Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$
On peut trouver deux suites croissantes $(i_n), (j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $i_n < j_n$ tels que $x_{i_n} \leq x_{j_n}$: une fois trouvés i_n et j_n, on considère la suite $(x_k)_{k>j_n}$, le fait que $\leq$ soit un bel ordre sur X nous donne l'existence de i_{n+1} et j_{n+1}.

On réitère cette opération sur la suite (j_n) à la place de (x_n), ce qui nous donne une infinités de triplets $x_{i_n} \leq x_{j_n} \leq x_{k_n}$, où les k_n sont extraits de (j_n)
En poursuivant, on construit une suite croissante extraite de (x_n).

Démonstration du ②

Il est évident que si $\forall (x_n) \in X^{\mathbb{N}}, \exists\, i < j : x_i \leq x_j$, alors il n'y a aucune suite strictement décroissante ni antichaine infinie.
On suppose donc qu'il n'y a ni suite strictement décroissante, ni antichaine infinie dans $X^{\mathbb{N}}$.
Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall i < j, x_i \nleq x_j$
Soit

$$E = \{i \in \mathbb{N} / \exists j > i : x_i > x_j\}$$

$\mathbb{N} \setminus E$ est fini, sinon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus E}$ est une antichaine infinie.

Il existe donc $i_0 \in E$ avec $i > \max \mathbb{N} \setminus E$
Soit $E' = \{i \in E / i \geq i_0\}$

Soit $\begin{array}{rccl} f: & E' & \to & E' \\ & i & \mapsto & \min\{j > i, x_i > x_j\} \end{array}$

f est bien définie, on définit la suite $(i_n) \in E'^{\mathbb{N}}$ par $i_{n+1} = f(i_n)$.
(i_n) est strictement décroissante, il y a contradiction.

Une telle suite (x_n) n'existe donc pas, on a un bel ordre sur X.

3 Théorèmes sur les beaux ordres

3.1 Bel ordre sur un produit

Théorème 2 *Soit* $(X, \leq)$ *un ensemble muni d'un bel ordre, alors* $\forall k \in \mathbb{N}$*,l'ordre composante par composante*$\leq_c$ *est un bel ordre sur* X^k*.*

Démonstration

Soit $(x_n) \in (X^k)^{\mathbb{N}}$ avec $x_n = (x_n^1, x_n^2, \cdots, x_n^k)$.

$\leq$ est un bel ordre sur X donc il existe $\sigma_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective croissante telle que $(x^1_{\sigma_1(n)})$ est croissante.

De même, en partant de $(x^2_{\sigma_1(n)})$, il existe $\sigma_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective croissante telle que $(x^2_{\sigma_2(\sigma_1(n))})$ est croissante

On définit ainsi $\sigma = \sigma_k \circ \cdots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ telle que $\forall 1 \leq p \leq k$, $(x^p_{\sigma(n)})$ est croissante (une sous-suite d'une suite croissante est croissante).
Cela revient à dire que $\forall n \in \mathbb{N} x_{\sigma(n)} \leq_c x\sigma(n+1)$

On a donc extrait une sous-suite croissante de (x_n) pour l'ordre $\leq_c$, $\leq_c$ est bien un bel ordre sur X^k.

3.2 Bel ordre sur les parties finies

3.2.1 L'inclusion

Si $\leq$ est un bel ordre sur X, on peut se demander si $\subset$ est un bel ordre sur les parties finies de X.

Un contre-exemple simple nous permet d'affirmer que ce n'est pas le cas : $(\{n\})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments non comparables.

Il faut donc chercher plus loin pour trouver un bel sur les parties finies d'un ensemble bien ordonné.

3.2.2 Lemme de Higman

Théorème 3 *Soit X un ensemble muni d'un bel ordre $\leq$, et $X^{<\omega}$ l'ensemble des parties finies sur X.*
On munit $X^{<\omega}$ de la relation $A \leq_p B$ s'il existe une injection $f : A \to B$ telle que $\forall a \in A,\ f(a) \leq a$. Alors cette relation $\leq_p$ est un bel ordre sur $X^{<\omega}$.

Démonstration

`Définition :`On dira d'une suite (u_n) qu'elle est *mauvaise* si $\forall i < j,\ u_i \not\leq u_j$.

On suppose que $\leq_p$ n'est pas un bel ordre.
Il existe donc des mauvaises suites.

On construit (A_n) mauvaise suite minimale : on prend A_0 de telle manière qu'il n'existe aucune mauvaise suite avec comme premier élément une partie B tel que $|B| < |A_0|$.
En supposant $A_0, \cdots, A_n$ construits, on prend A_{n+1} de manière à ce qu'il n'existe aucune mauvaise suite commençant par $A_0, \cdots, A_n, B$ avec $|B| < |A_{n+1}|$.

$\forall i \in \mathbb{N}, A_i \neq \emptyset$ car $\forall A \in X^{<\omega}, \emptyset \leq_p A$.

On peut donc écrire $A_i = B_i \cup a_i$ avec $|B_i| = |A_i| - 1$.
$\leq$ est un bel ordre sur X donc on peut extraire $(a_{\sigma(n)})$ croissante,σ injective croissante.

Si $(B_{\sigma(n)})$ n'est pas mauvaise, $\exists i < j :\ \ B_{\sigma(i)} \leq_p B_{\sigma(j)}$, or cela implique $A_{\sigma(i)} \leq_p A_{\sigma(j)}$ ce qui est absurde car (A_n) est mauvaise.
$(B_{\sigma(n)})$ est donc mauvaise.

On sait que $\sigma(0) > 0$, car si $\sigma(0) = 0$, l'hypothèse de minimalité de A_0 est contredite par la mauvaise suite $(B_{\sigma(n)})$.

Soit $u = (A_0, A_1, \cdots, A_{\sigma(0)-1}, B_{\sigma(0)}, B_{\sigma(1)}, \cdots)$
On suppose que u n'est pas mauvaise.
Les suites (A_n) et $(B_{\sigma(n)})$ sont mauvaises donc $\exists i < j : A_i \leq_p B_j$, or cela implique $A_i \leq_p A_j$, ce qui est absurde car (A_n) est mauvaise.

La suite u est donc également mauvaise, ce qui contredit la minimalité de $A_{\sigma(0)}$

C'est absurde, il n'existe donc pas de mauvaise suite dans $X^{<\omega}$, $\leq_p$ est donc un bel ordre.

4 Graphes

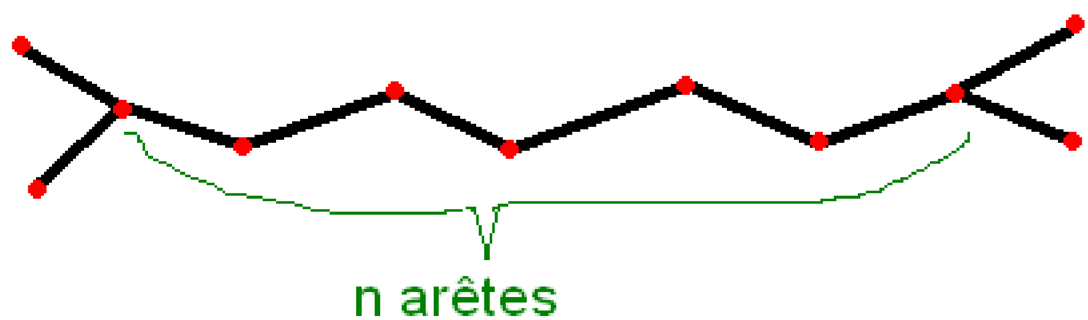
4.1 Sous-graphes connexes

Théorème 4 *La relation de sous-graphe connexe n'est pas un bel ordre sur les graphes finis*

Démonstration : Si on note C_n le cycle à n éléments, la suite $(C_n)_{n\geq 3}$ ne contient pas deux éléments comparables.

Théorème 5 *La relation de sous-graphe connexe n'est pas un bel ordre sur les arbres finis*

Démonstration :
si on nomme A_n l'arbre suivant :



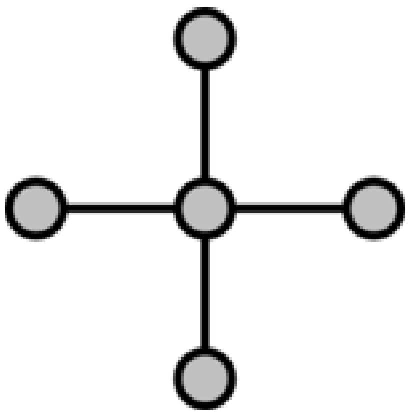
La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une antichaine pour la relation de sous graphe connexe, cette relation n'est donc pas un bel ordre sur les arbres finis.

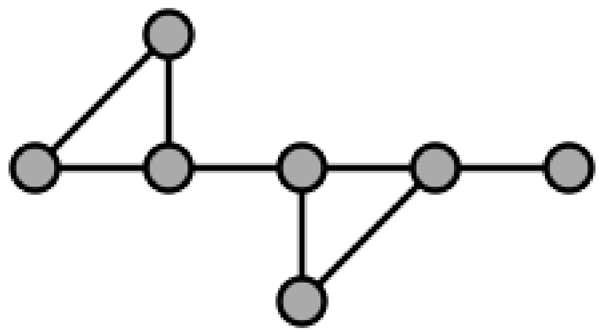
4.2 Mineur et mineur topologique

Définition 3 *On dira qu'un graphe H est un mineur d'un graphe G si H peut être obtenu à partir de G en utilisant ces 3 opérations autant de fois que* *nécessaire :*

- *suppression d'une arête*
- *suppression d'un sommet*
- *fusion de deux sommets voisins*

Exemple :Le premier graphe est un mineur du second.





Définition 4 *Un graphe K est une subdivision d'un graphe G si K peut être obtenu de G en remplaçant chaque arête $[x; y]$ de G par une xy-chaîne P_{xy} de tel sorte que dans H, tous les sommets internes de P_{xy} soient de degré 2.*

Définition 5 *Un graphe H est mineur topologique d'un graphe G s'il existe un sous-graphe K de G qui est isomorphe à une subdivision de H. On notera $H \leq_{top} G$.*

Exemple : H mineur topologique de $G \Rightarrow H$ mineur de G.
En effet, prendre un sous-graphe et contracter une chaine sont des opérations autorisées par la définition des mineurs.

4.3 Théorème de Kruskal

Théorème 6 *La relation de mineur topologique est un bel ordre sur les graphes finis.*

Démonstration : Elle est similaire à la démonstration du lemme de Higman : on suppose que $\leq_{top}$ n'est pas beau, puis on considère une mauvaise suite minimale, et on montre qu'il y a contradiction.

Remarque : Le lemme de Higman est une conséquence du théorème de Kruskal

4.4 Théorème des mineurs de Robertson et Seymour

Théorème 7 *La relation de mineur est un bel ordre sur les graphes finis.*

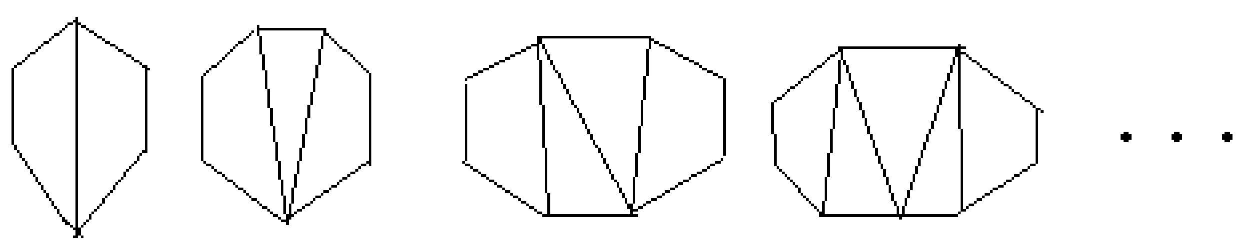
Ce théorème a longtemps été une conjecture, formulée en 1937 par le mathématicien allemand Klaus Wagner.
Il a été prouvé par Neil Robertson and Paul D. Seymour par une série d'articles totalisant plus de 600 pages, et dont la publication s'étale de 1983 a 2004.

4.5 un contre-exemple

Si on affaiblit un peu les hypothèses du théorèmes de Robertson et Seymour, celui-ci devient faux :

Théorème 8 *La relation de mineur topologique n'est pas un bel ordre sur les graphes finis*

Démonstration : La suite de graphes suivante est une antichaine pour $\leq_{top}$



Il est facile de vérifier qu'aucun de ces graphes n'est mineur topologique d'un autre : prendre un sous-graphe détruit la structure de base, et les seules chaines contractables sont les chaines de 3 arêtes extérieures, qui sont présentes dans tous les graphes de la suite et ne peuvent donc pas être contractés.

En revanche, on voit bien que chaque graphe est mineur du suivant, en contractant une arête horizontale, cette chaine n'est donc (heureusement) pas un contre-exemple au théorème de Robertson et Seymour.

4.6 Les mineurs interdits

Théorème 9 *Une classe de graphes $\mathcal{C}$ est close par mineur si et seulement s'il existe une famille finie de graphes $G_1, G_2, \cdots, G_k$ telle que*

$$\mathcal{C} = \{G/\forall i \leq k, G_i \textit{ n'est pas mineur de } G\}$$

.

Démonstration :

`La condition est suffisante` :

Soit $\mathcal{C} = \{G/\forall i \leq k, G_i \text{ n'est pas mineur de } G\}$

Alors si $G \in \mathcal{C}$ et H mineur de G, on ne peut pas avoir G_i mineur de H, car G_i serait alors également un mineur de G. $\mathcal{C}$ est donc bien close par mineur.

`La condition est nécessaire` :

Soit $\mathcal{C}$ close par mineur.

On considère $\overline{\mathcal{C}} = \{G/G \notin \mathcal{C}\}$

Soit $E = \{G \in \overline{\mathcal{C}}/\forall Hin\overline{C} \setminus \{G\}, H \not\leq C\}$ où $\leq$ est la relation de mineur.

D'après le théorème de Robertson et Seymour, $\leq$ est un bel ordre, donc E est fini.

On note $E = \{G_1, G_2, \cdots, G_k\}$, et on montre que les G_i sont exactement les mineurs interdits de $\mathcal{C}$:

Si $G \geq G_i$, alors $G \notin \mathcal{C}$ car $\mathcal{C}$ close par mineur et $G_i \notin \mathcal{C}$.

Si $G \in \overline{\mathcal{C}}$, on construit la séquence A_j de la manière suivante :

- $A_0 = G$
- Si $A_j \in E$, on s'arrête
- Si $A_j \notin E$, on choisit $A_{j+1} \in \overline{\mathcal{C}}$ tel que $A_j > A_{j+1}$ (existe par définition de E)

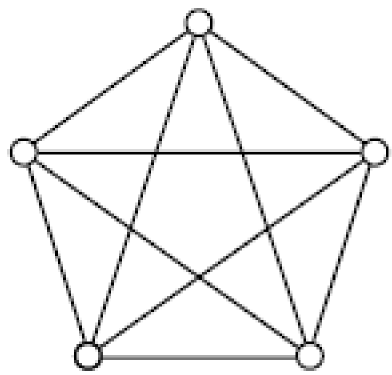
$\leq$ est un bel ordre, donc il n'existe pas de suite strictement décroissante, par conséquent l'algorithme ci-dessus termine.

Il existe donc un élement de E mineur de G.

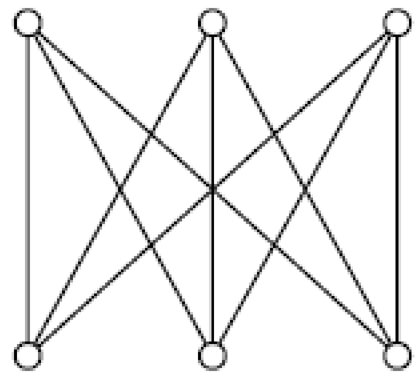
On a donc montré $G \notin \mathcal{C} \Leftrightarrow \exists H \in E : H \leq G$

En conclusion , E caractérise bien $\mathcal{C}$ par ses mineurs interdits.

Exemple : (Théorème de Kuratowski)
La classe des graphes planaires est close par mineur, il suffit de deux mineurs interdits pour la caractériser :



$\mathbf{K}_5$



$\mathbf{K}_{3,3}$

4.7 Conjecture de Seymour

Seymour a conjecturé que tout graphe infini dénombrable est mineur strict de lui-même. Cela signifie que si G est un graphe infini dénombrable, on peut lui appliquer un nombre non nul de fois les opérations autorisées dans la relation de mineur, et obtenir un graphe isomorphe à G.

On va montrer que cette proposition implique le théorème de Robertson et Seymour.

Soit $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de graphes finis. On considère le graphe

$$G = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n$$

Si la conjecture est vraie, on peut appliquer à G des opérations de la définition 3 un nombre non nul de fois, et obtenir un graphe isomorphe à G, cela revient à en appliquer à au moins l'un des graphes de la suite, pour obtenir une suite contenant les même éléments, pas forcément dans le même ordre.
Soit i l'indice d'un graphe qui a été modifié.
Deux cas sont possibles :

- G_i a complètement disparu
  Cela signifie qu'un graphe isomorphe à G_i est présent ailleurs dans la suite, qui n'est donc pas mauvaise, puisqu'elle contient deux éléments identiques.
- G_i est réduit en $H_i < G_i$.
  H_i est présent ailleurs dans la suite, donc ce n'est pas une antichaine.

Dans les deux cas, la suite de graphes n'est pas une antichaine pour $\leq$.
Il reste à montrer qu'elle n'est pas strictement décroissante.
On note $u_G = |V_G| + |E_G|$.
Alors si $G > H$, $u_G > u_H$ d'après la définition des mineurs. Une suite strictement décroissante d'entiers naturels n'existe pas, donc (G_n) ne peut pas être strictement décroissante.

Si la conjecture de Seymour est vraie, $\leq$ est bien un bel ordre sur la classe des graphes finis.

5 Conclusion

L'etude des beaux ordres dans le cas des graphes, plus particulièrement pour la relation de mineur, a récemment beaucoup avancé. Le plus résultat le plus profond est le théorème de Robertson-Seymour, qui comme on l'a vu permet entre autres de caractériser toute classe de graphes close par mineur.

Ces recherches s'appliquent également en informatique, notamment grâce à l'existence d'un algorithme polynomial pour déterminer si un graphe fixé H est mineur d'un graphe G donné en entrée.

Références

[Gal91] Jean H. Gallier. What's so special about kruskal's theorem and the ordinal γ_0 ? a survey of some results in proof theory. *Annals of Pure and Applied Logic*, 53 :199–260, 1991.

[kru60] J. B. kruskal. Well-quasi-ordering, the tree theorem, and vazsonyi's conjecture. *Transactions of the American Mathematical Society*, 95 :210–225, 1960.

[Lov05] Laszlo Lovasz. Graph minor theory. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 43 :75–86, 2005.