

Graphes parfaits

Florian Hatat

18 mai 2007

1 Introduction

La classe des graphes parfaits a été définie par Berge au début des années 1960. Peu à peu plusieurs résultats ont montré que cette classe possédait de nombreuses bonnes propriétés, et qu'elle contenait un grand nombre de classes déjà existantes.

L'histoire de cette classe de graphes est fortement liée aux conjectures forte et faible des graphes parfaits, qui ont été énoncées en 1961, et prouvées respectivement en 2002 et 1972.

Dans ce rapport, nous rappellerons la définition des graphes parfaits, et comment cette classe est reliée à d'autres classes de graphes déjà connues, puis nous donnerons une preuve du théorème des graphes parfaits, qui correspond à la conjecture faible de Berge. Nous discuterons enfin des idées de la preuve de la conjecture forte.

Les deux principales sources utilisées pour la rédaction de ce rapport sont les ouvrages de West [5] et M. Golumbic [3], mais également l'article de P. Seymour [4] pour la dernière partie, car son aspect *recherche* permet de voir les structures importantes liées aux graphes parfaits.

2 La classe des graphes parfaits

2.1 Autour du nombre chromatique

Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un entier k , on dit qu'une application $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ est un k -coloriage valide de G si tous les couples de sommets (x, y) adjacents dans G utilisent deux couleurs différentes ($f(x) \neq f(y)$).

On note $\chi(G)$ le nombre chromatique, c'est-à-dire la plus petite valeur de k telle que G soit coloriable avec k couleurs, et $\omega(G)$ le nombre de clique, qui correspond au plus grand entier p tel que la clique de taille p , notée K_p , est contenue dans G . Dans le cas général, les calculs de $\chi(G)$ et de $\omega(G)$ sont NP-difficiles.

On peut immédiatement donner un premier encadrement, assez grossier, de $\chi(G) : \omega(G) \leq \chi(G) \leq |V|$, où $\omega(G)$. Tout graphe G est trivialement coloriable avec $|V|$ couleurs, et dans le cas d'une clique $\chi(K_p) = p$. Comme G contient $K_{\omega(G)}$, il faut au moins $\omega(G)$ couleurs pour colorier G .

On peut améliorer, grâce au théorème de , la borne supérieure de l'encadrement précédent en utilisant le degré maximal $\Delta(G)$ d'un sommet dans G :

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Cependant l'idée de Berge en 1960 était de s'intéresser plutôt à la borne inférieure en $\omega(G)$, en particulier dans le cas où $\omega(G) = \chi(G)$. Cette égalité est vérifiée par plusieurs classes de graphes bien connues, citons par exemple simplement les forêts, les cliques ou les graphes d'intervalles, mais la classe des graphes tels que $\omega(G) = \chi(G)$ n'est pas encore tout à fait intéressante.

On remarque en effet qu'elle contient *trop* de graphes, car si H est un graphe quelconque possédant moins de n sommets, alors l'union disjointe de H et de la clique K_n est dans cette classe. On pourrait songer à imposer une condition supplémentaire de connexité par exemple, mais

celle-ci semble trop contraignante : aucune condition de connexité n'est imposée sur les graphes d'intervalles, et l'on souhaiterait définir une classe les contenant strictement.

Berge obtient élégamment cette classe, avec une hypothèse d'hérédité. Si $G = (V, E)$ est un graphe, et A un sous-ensemble de V , le sous-graphe de G induit par A est $(A, E \cap (A \times A))$.

2.2 Définition

Définition 1 (Graphe γ -parfait). *On dit qu'un graphe G est γ -parfait si et seulement si tous les sous-graphes induits H , y compris G lui-même, vérifient :*

$$\omega(H) = \chi(H)$$

On parle de « graphe γ -parfait », et non simplement de « graphe parfait », car on peut définir une notion totalement duale, qui apparaît naturellement sur les exemples à la section 2.3.

On note :

$\alpha(G)$ le cardinal maximum d'un stable de G ;

$\theta(G)$ le plus petit nombre de cliques nécessaire pour couvrir G .

α est dual de ω , car pour tout graphe G , $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$, et de même, $\theta(G) = \chi(\overline{G})$.

Définition 2 (Graphe α -parfait). *On dit qu'un graphe G est α -parfait si et seulement si tous les sous-graphes induits H , y compris G lui-même, vérifient :*

$$\alpha(H) = \theta(H)$$

Ainsi, G est γ -parfait¹ si et seulement si \overline{G} est α -parfait.

2.3 Quelques classes parfaites

Les définitions précédentes ne sont pas immédiatement utilisables, car elles imposent de vérifier une égalité sur tous les sous-graphes induits d'un graphe. Si l'on veut prouver qu'une classe \mathcal{F} est contenue dans la classe des graphes parfaits, on préfère vérifier les conditions suffisantes suivantes :

- \mathcal{F} est héréditaire,
- pour tout graphe G de \mathcal{F} , $\omega(G) = \chi(G)$ (ou $\alpha(G) = \theta(G)$).

Cliques et forêts Les classes des cliques et des forêts sont trivialement héréditaires. Pour une clique K_p , $\omega(K_p) = \chi(K_p) = p$, tandis que pour une forêt F , $\omega(F) = \chi(F) = 2$. De plus, les cliques sont également α -parfaites, car $\alpha(K_p) = \theta(K_p) = 1$. En ce qui concerne les forêts, König a prouvé que les complémentaires de graphes bipartis étaient γ -parfaits, donc les forêts sont α -parfaites.

Le calcul de $\chi(G)$ est en général NP-difficile, mais l'heuristique qui attribue à chaque sommet la plus petite couleur libre à chaque instant se révèle utile pour prouver que les graphes d'intervalles et les graphes triangulés sont parfaits.

Graphes d'intervalles La classe est trivialement héréditaire, car lorsque l'on enlève un sommet, on obtient toujours un graphe d'intersection d'intervalles. On applique ensuite le coloriage glouton à un graphe d'intervalles G , où les intervalles sont triés selon leur borne inférieure, en ordre croissant. Lorsque l'algorithme attribue la couleur k à un sommet x , cela signifie que les couleurs 1 à $k - 1$ étaient déjà affectées à des prédécesseurs de x . Comme G est un graphe d'intervalles, tous ces intervalles prédécesseurs contiennent la borne inférieure de x , donc ils forment une clique : G contient une clique de taille k , ce qui prouve l'invariant : $k \leq \omega(G)$. À la fin du coloriage, $\chi(G) = \omega(G)$.

¹En toute logique, on devrait parler de graphes ω -parfaits, la notation γ vient de Berge qui désignait le nombre de clique par cette lettre. Même si l'on préfère désigner ce dernier par ω , conserver la γ -perfection permet de rendre un petit hommage à Berge.

Graphes triangulés La classe est héréditaire : si l est une séquence d'élimination simpliciale de G , alors $l-x$ est une séquence d'élimination simpliciale de $G-x$, car enlever un sommet ne détruit pas les cliques. L'algorithme de coloriage glouton, s'il traite les sommets dans l'ordre donné par une séquence de *construction* simpliciale, vérifie le même invariant que pour les graphes d'intervalles : lorsque l'on veut colorier x , ses seuls voisins déjà coloriés sont des prédécesseurs dans la séquence de construction, et ils forment donc une clique.

Graphes de comparabilité $G = (V, E)$, non orienté, est un graphe de comparabilité si et seulement s'il existe une orientation F de E telle que :

$F \cap F^{-1} = \emptyset$ chaque arête n'est orientée qu'une seule fois dans F ,

$F + F^{-1} = E$ toutes les arêtes sont orientées,

$F^2 \subseteq F$ l'orientation est transitive : $F^2 = \{xz | \exists y, xy \in F, yz \in F\}$.

La classe est ici encore trivialement héréditaire, car si G est transitivement orientable par F , alors pour tout ensemble de sommets A , G_A est transitivement orientable par $F \cap (A \times A)$. Pour colorier G , remarquons d'abord que l'orientation F est acyclique : s'il existait un cycle $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_k$, la transitivité impliquerait l'existence d'une arête x_1x_k , or l'arête opposée x_kx_1 est déjà dans F et on aurait $x_1x_k \in F \cap F^{-1}$, ce qui contredirait l'hypothèse $F \cap F^{-1} = \emptyset$. Un tri topologique permet alors de calculer, pour chaque sommet v :

$$h(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \text{ est un puits} \\ 1 + \max\{h(w), vw \in F\} & \text{sinon} \end{cases}$$

h est un coloriage valide de G , et le nombre k de couleurs utilisées est égal au nombre de sommets du plus long chemin dans F . D'après la propriété de transitivité, il existe une arête entre tout couple de sommets de ce chemin : il existe donc une clique de taille k dans G , et donc $\omega(G) = \chi(G)$.

Les complémentaires des graphes de comparabilité sont également γ -parfaits, mais l'égalité entre $\omega(G) = \chi(G)$ n'a rien de trivial, et est prouvée par le théorème de Dilworth (1950) [1].

En revanche, les graphes de comparabilité permettent de prouver que les graphes d'intervalles sont α -parfaits, car le complémentaire d'un graphe d'intervalles est transitivement orientable ([2]). En identifiant les sommets d'un graphe d'intervalles G à des intervalles $\{I_v\}$, l'arête I_xI_y est dans \overline{E} si et seulement si $I_x \cap I_y = \emptyset$. On oriente alors les arêtes de \overline{E} selon la relation d'ordre partiel « être totalement à gauche de », notée $<$ et définie par :

$$I_x < I_y \iff \max I_x < \max I_y$$

Deux extrémités I_x et I_y d'une arête de \overline{E} sont comparables, et on pose :

$$I_xI_y \in F \iff I_x < I_y$$

Comme elle est induite par une relation d'ordre, l'orientation F est bien transitive, donc \overline{G} est un graphe de comparabilité.

Finalement, ces exemples ont permis de souligner les points suivants :

- les cliques, les forêts, les graphes d'intervalles et les graphes de comparabilité sont γ -parfaits,
- leurs complémentaires le sont également, mais les preuves sont moins immédiates : sur ces classes les notions de γ -perfection et d' α -perfection coïncident,
- les graphes triangulés sont γ -parfaits, mais nous n'avons pas prouvé que leurs complémentaires l'étaient aussi.

3 Théorème des graphes parfaits

3.1 Énoncé et preuve

Sur les classes de graphes étudiées au paragraphe précédent, la classe des graphes parfaits est stable par complémentaire : Berge l'a conjecturé en 1961, et la preuve de ce résultat a été donnée par László Lovász en 1972.

Conjecture 1 (Berge (1961)). G est γ -parfait si et seulement s'il est α -parfait.

Le résultat de Lovász est en fait légèrement plus fort que la conjecture elle-même, nous en donnons une preuve ici.

Théorème 1 (Graphes parfaits, Lovász (1972)). Si G est un graphe, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. G est α -parfait,
2. G est γ -parfait,
3. pour tout $A \subseteq V$, $\omega(G_A)\alpha(G_A) \geq |A|$.

La bonne idée pour arriver à ce résultat est de considérer une construction, qui ressemble un peu à l'inverse de la suppression de sommets pour obtenir un sous-graphe induit. Si G est un graphe, et x l'un de ses sommets, $G \circ x$ est le graphe obtenu en ajoutant un nouveau sommet x' à G , possédant le même voisinage que x .

Définition 3 (Multiplication de sommets). Si G est un graphe à n sommets x_1, \dots, x_n , et h un vecteur d'entiers positifs ou nuls (h_1, \dots, h_n) , le graphe $H = G \circ h$ est le graphe obtenu à partir de G par :

$$H = G \circ x_1 \circ \dots \circ x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n$$

où chaque x_i apparaît h_i fois.

Dans le cas où les composantes du vecteur h valent 0 ou 1, on obtient exactement le sous-graphe induit où l'on a supprimé les sommets x_i où $h_i = 0$. La propriété suivante est facile à prouver, et se généralise à la multiplication par un vecteur :

$$(G \circ x) - y = (G - y) \circ x \quad \text{si } x \text{ et } y \text{ sont distincts}$$

En effet, l'opération $- \circ x$ n'affecte que les voisins de x , l'égalité est triviale si y n'est pas un voisin de x . On note $N_G(x)$ les voisins de x dans G . Lorsque $y \in N_G(x)$:

- x et x' ont pour voisinage $N_G(x)$ dans $G \circ x$, donc leur voisinage est $N_G(x) - y$ dans $(G \circ x) - y$,
- x a pour voisinage $N_G(x) - y$ dans $G - y$, donc x et x' ont encore pour voisinage $N_G(x) - y$ dans $(G - y) \circ x$.

Lemme 1. Si G vérifie l'égalité $\alpha(G) = \theta(G)$, si \mathcal{K} est une couverture minimum de G par des cliques, c'est-à-dire $|\mathcal{K}| = \theta(G)$, et si \mathcal{S} est l'ensemble de tous les indépendants, disjoints ou non, de cardinal maximum $\alpha(G)$, alors :

$$\forall S \in \mathcal{S}, K \in \mathcal{K}, |S \cap K| = 1$$

Par l'absurde, s'il existe K et S tels que $S \cap K = \emptyset$, alors :

- $\alpha(G - K) = \alpha(G)$, car retirer K préserve l'indépendant S ,
- $\theta(G - K) \leq \theta(G) - 1$, car en retirant K est une couverture de G de taille $\theta(G) - 1$.

Comme $\alpha(G) = \theta(G)$, on aurait $\theta(G - K) \leq \alpha(G - K) - 1$, ce qui est absurde car pour tout graphe G , $\alpha(G) \leq \theta(G)$.

Lemme 2 (Berge (1961)). Si H est obtenu à partir de G par multiplication de sommets :

1. Si G est γ -parfait, H l'est aussi,
2. Si G est α -parfait, H l'est aussi.

On prouve ce résultat par récurrence sur le nombre de sommets de G . Il est évident lorsque G n'a qu'un seul sommet.

Si G est un graphe à $n > 1$ sommets, γ - α -parfait, et h un vecteur de taille n , soit $H = G \circ h$. Si l'une des composantes h_i de h est nulle, la propriété élémentaire précédente montre que l'on peut obtenir H à partir de $G - x_i$ par multiplication de sommets. Par hérédité, $G - x_i$ est γ - α -parfait, donc par récurrence, $H = (G - x_i) \circ h'$ l'est aussi.

On suppose par la suite que toutes les composantes de h sont strictement positives. D'après la définition de la multiplication par h , on peut même se contenter de prouver le lemme pour la multiplication par un seul sommet x . On appelle x' la copie de x dans $G \circ x$.

Dans $G \circ x$, x et x' ne sont pas adjacents, donc la multiplication par x n'augmente pas le nombre de clique : $\omega(G) = \omega(G \circ x)$, puisque toute clique contenant x' est isomorphe à une clique de G contenant x . De plus, si l'on possède un coloriage optimal f de G , $G \circ x$ est colorié de façon optimale par f , étendu sur x' par $f(x') = f(x)$. $G \circ x$ est donc γ -parfait dès que G l'est.

Si G est α -parfait, c'est-à-dire $\alpha(G) = \theta(G)$, prouvons maintenant que $\alpha(G \circ x) = \theta(G \circ x)$. On note \mathcal{K} un ensemble minimal de cliques couvrant G , $|\mathcal{K}| = \theta(G) = \alpha(G)$, et K_x la clique de \mathcal{K} couvrant x .

- Soit x est dans un indépendant de G de taille maximale, dans ce cas le plus grand indépendant de $G \circ x$ s'obtient en ajoutant x' :

$$\alpha(G \circ x) = \alpha(G) + 1$$

$\mathcal{K} \cup \{\{x'\}\}$ couvre $G \circ x$, d'où les inégalités :

$$\theta(G \circ x) \leq \theta(G) + 1 = \alpha(G) + 1 = \alpha(G \circ x) \leq \theta(G \circ x)$$

Par conséquent, $G \circ x$ est α -parfait.

- Sinon x n'est dans aucun indépendant maximum, donc l'ajout de x' ne change pas la taille des indépendants maximums : $\alpha(G) = \alpha(G \circ x)$. Chaque clique de \mathcal{K} a exactement un point d'intersection avec un indépendant maximum (lemme 1), donc en particulier K_x . Comme x n'est dans aucun indépendant, $D = K_x - \{x\}$ rencontre tout indépendant maximum de G exactement une fois, donc $\alpha(G_{V-D}) = \alpha(G) - 1$. Puisque G_{V-D} est parfait par hypothèse, $\theta(G_{V-D}) = \alpha(G_{V-D}) = \alpha(G) - 1 = \alpha(G \circ x) - 1$. On peut alors couvrir $G \circ x$ en utilisant une couverture de G_{V-D} avec la clique $D \cup \{x'\}$, qui est de taille $\alpha(G \circ x) = \theta(G \circ x)$.

Lemme 3. *Si G est un graphe α -parfait, alors tout graphe $H = G \circ h$ satisfait la condition 3 ($\omega(G_A)\alpha(G_A) \geq |A|$) dès que G vérifie cette condition.*

La preuve de ce lemme se fait par récurrence sur la taille de G , le cas à un seul sommet étant trivial à vérifier.

Si G a n sommets, par l'absurde, on commence par supposer l'existence d'un plus petit contre-exemple : soit $H = (X, F)$ un graphe obtenu par multiplication de sommets de G , et tel que $\omega(H)\alpha(H) < |X|$, où $|X|$ est minimal. Si $H = G \circ h$, toutes les composantes de h sont strictement positives : sinon $H = (G - x) \circ h'$ et par récurrence, H ne serait pas un contre-exemple. De plus il existe un sommet u qui est multiplié k fois, avec $k \geq 2$, car sinon H serait égal à G , et ne serait pas non plus un contre-exemple.

Par minimalité de H , $H - u$ est un multiple de G à $|X| - 1$ sommets et vérifie donc l'inégalité 3 : $|X| - 1 \leq \omega(H - u)\alpha(H - u) \leq \omega(H)\alpha(H)$. Comme H est un contre-exemple à 3, alors $\omega(H)\alpha(H) \leq |X| - 1$: toutes les inégalités précédentes sont en fait des égalités. Soient :

$$\begin{aligned} p &= \omega(H - u) = \omega(H) \\ q &= \alpha(H - u) = \alpha(H) \end{aligned}$$

D'après l'égalité précédente, $pq = |X| - 1$.

G est α -parfait, donc le lemme de Berge (2) assure que $H - U$ l'est aussi, où U est l'ensemble des copies de u dans H . Il existe une couverture par q cliques $(K_i)_{1 \leq i \leq q}$, que l'on suppose disjointes deux à deux. Ainsi :

$$\sum_{i=1}^q |K_i| = |X - U| = pq - (h - 1)$$

Chaque clique est de taille au plus $p = \omega(H)$: sur les q cliques de la somme précédente, au plus $h - 1$ d'entre elles peuvent donc contenir strictement moins de p éléments. Ceci revient à dire que $q - (h - 1)$ cliques contiennent exactement p sommets : on suppose qu'il s'agit de K_1 à $K_{q-(h-1)}$.

L'ensemble $X' = u \cup \bigcup_{i=1}^{q-(h-1)} K_i$ est de cardinal $p(q - (h - 1)) + 1$.

$$|X'| < pq + 1 = |X|$$

Le sous-graphe H' de H induit par X' vérifie la condition 3, car H' est également induit de G et H est minimal : $\omega(H')\alpha(H') \geq p(q - (h - 1)) + 1$. Comme $p = \omega(H) \geq \omega(H')$, on peut minorer $\alpha(H')$ par l'expression suivante :

$$\alpha(H') \geq |X'|/p = q - (h - 1) + 1/p$$

Il existe dès lors un indépendant S' dans H' de taille $q - h + 2$. Par définition de H' , u est dans cet indépendant, car sinon S' serait composé de $q - h + 2$ sommets pris dans $q - h + 1$ cliques : d'après le théorème des tiroirs, S' contiendrait deux sommets d'une même clique, ce qui serait absurde. Mais alors $S = S' \cup U$ est un indépendant de H , car on ne fait qu'ajouter les $h - 1$ copies restantes de u , de taille $q + 1 > \alpha(H)$, ce qui est absurde.

Le lemme 3 permet désormais de conclure la preuve du théorème des graphes parfaits. Il suffit de prouver que les conditions 1 et 3 sont équivalentes : en effet, la condition 3 est inchangée lorsqu'elle est appliquée à G ou \overline{G} , car $\omega(G)$ est dual de $\alpha(G)$. Ainsi :

- G est α -parfait si et seulement si \overline{G} est γ -parfait,
- G vérifie la condition 3 si et seulement si \overline{G} vérifie la condition 3.

L'équivalence entre 1 et 3 permet donc de conclure que 2 et 3 sont équivalentes.

$1 \Rightarrow 3$ L'inégalité $\chi(G)\alpha(G) \geq |V|$, pour tout graphe $G = (V, E)$ est évidente : une couleur définit un indépendant, donc il y a au plus $\alpha(G)$ sommets d'une couleur donnée. Si G vérifie 1, tout sous-graphe induit G_A vérifie $\chi(G_A) = \omega(G_A)$, donc G vérifie 3.

$3 \Rightarrow 1$ La preuve de cette implication se fait par récurrence sur le nombre de sommets du graphe $G = (V, E)$. Le cas à un seul sommet est trivial. Puis, par récurrence, tout sous-graphe strict induit de G vérifie l'implication $3 \Rightarrow 1$: il suffit de prouver désormais que $\omega(G) = \chi(G)$.

S'il existe un indépendant S qui, lorsqu'on l'enlève de G , fait diminuer le nombre de clique ($\omega(G_{V-S}) < \omega(G)$), on pourrait, par hypothèse de récurrence, colorier G_{V-S} avec au plus $\omega(G) - 1$ couleurs, et donc G serait coloriable avec $\omega(G)$ couleurs, donc $\omega(G) = \chi(G)$.

Sinon, pour tout indépendant S , il existe une clique $K(S)$ de taille $\omega(G)$, qui ne rencontre pas S ($S \cap K(S) = \emptyset$). On note \mathcal{S} l'ensemble des tous les indépendants de G , et on définit h_i pour tout sommet x_i de G par :

$$h_i = |\{K(S) \text{ telles que } S \in \mathcal{S}, x_i \in K(S)\}|$$

Soit $H = G \circ h$, et considérons la matrice d'adjacence entre les x_i et les $K(S_j)$, où l'élément (i, j) vaut 1 si et seulement si $x_i \in K(S_j)$, et 0 sinon. Le nombre n de sommets de H est le nombre de 1 dans cette matrice :

$$\begin{aligned} n &= \sum_{x_i \in V} h_i \\ &= \sum_{S \in \mathcal{S}} |K(S)| = \omega(G)|\mathcal{S}| \end{aligned}$$

En effet, le chiffre 1 apparaît h_i fois à la ligne i , et $|K(S_j)| = \omega(G)$ fois dans la colonne j , la matrice possédant $|\mathcal{S}|$ colonnes.

Or la multiplication de sommets n'augmente pas la taille des cliques déjà présentes : au pire, l'un des h_i est nul, et cette taille peut éventuellement diminuer, donc $\omega(H) \leq \omega(G)$.

Enfin on peut majorer $\alpha(H)$ par $|\mathcal{S}| - 1$ car :

$$\alpha(H) = \max_{T \in \mathcal{S}} \sum_{x_i \in T} h_i = \max_{T \in \mathcal{S}} \sum_{S \in \mathcal{S}} |T \cap K(S)|$$

et $|T \cap K(S)|$ vaut au plus 1, sinon T ne serait pas un indépendant, sauf dans le cas où $T = S$ où cette intersection est de taille vide.

En regroupant les deux majorations de $\omega(H)$ et de $\alpha(H)$, on peut écrire : $\omega(H)\alpha(H) < n$, ce qui contredit le lemme 3.

3.2 Brève histoire de la preuve

L'histoire classe ce théorème dans la classe des résultats qui sont plus faciles à prouver lorsque l'on sait qu'ils sont vrais. Fulkerson est le candidat malheureux dans la course à la preuve de ce théorème : ses travaux l'ont presque conduit jusqu'à la preuve complète, et c'est par une carte postale envoyée par Berge qu'il pris connaissance des travaux de Lovász. L'histoire dit que Fulkerson a obtenu sa propre preuve après quelques heures seulement de travail : il avait en effet prouvé le résultat suivant.

Lemme 4. *Soit $\mathcal{M}(G)$ la classe des graphes obtenus par multiplication de sommets à partir de G . Tout graphe de $\mathcal{M}(G)$ est γ -parfait si et seulement s'il est α -parfait.*

Le résultat est très proche du théorème complet : il suffit de penser au lemme de Berge (2) pour y parvenir. On peut également noter que Lovász et Fulkerson ont suivi indépendamment les mêmes étapes dans la preuve du théorème, car chacun a prouvé le lemme 3.

4 Conjecture forte des graphes parfaits

Le théorème des graphes parfaits était connu sous le nom de conjecture *faible* des graphes parfaits, car si le résultat n'est pas trivial, il ne donne a priori aucun moyen efficace de caractériser algorithmiquement les graphes parfaits. Nous allons voir dans cette partie comment s'est construite la conjecture forte de Berge, puis sa preuve, publiée en 2002.

Sachant que γ -perfection et α -perfection désignent la même classe de graphes, dans la suite nous utiliserons la première en parlant de *graphes parfaits*, car elle est souvent bien plus facile à traiter.

4.1 Graphes p-critiques

D'après la définition des graphes parfaits, on peut imaginer un premier algorithme, totalement inefficace, calculant $\omega(G_A)$ et $\chi(G_A)$ avec des procédures exponentielles, pour tous les graphes induits. Cet algorithme possède au moins le mérite de montrer que la reconnaissance est dans NP...

Une autre manière d'attaquer ce problème est de savoir reconnaître les graphes qui ne sont pas parfaits. Cette classe est également héréditaire, si bien que les graphes intéressants sont en réalité les graphes minimalement imparfaits.

Définition 4 (Graphe p-critique). *Un graphe G est p-critique s'il n'est pas parfait, mais si tout sous-graphe induit G_A est parfait. Ceci s'écrit encore :*

$$\begin{aligned} \omega(G) &< \chi(G) \\ \forall A \subsetneq V, \omega(G_A) &= \chi(G_A) \end{aligned}$$

Des propriétés assez fines ont été prouvées sur ces graphes, avant la preuve de la conjecture de Berge, notamment le résultat suivant :

Théorème 2. *Si G est p-critique à n sommets, alors $n = \alpha(G)\omega(G) + 1$, et pour tout sommet x de G :*

$$\begin{aligned} \alpha(G) &= \theta(G - x) \\ \omega(G) &= \chi(G - x) \end{aligned}$$

La preuve est immédiate avec le théorème des graphes parfaits, car d'une part G n'est pas parfait dont $n > \alpha(G)\omega(G)$, et d'autre part $G - x$ l'est, donc $n - 1 \leq \alpha(G - x)\omega(G - x)$. Autrement dit :

$$n - 1 \leq \alpha(G - x)\omega(G - x) \leq \alpha(G)\omega(G) < n$$

On a donc égalité entre les trois expressions de gauche, ce qui permet de conclure que :

$$\begin{aligned} \alpha(G) &= \alpha(G - x) = \theta(G - x) \\ \omega(G) &= \omega(G - x) = \chi(G - x) \end{aligned}$$

Exemples de graphes p-critiques Les *trous*, c'est-à-dire les cycles de longueur $2k + 1$, avec $k \geq 2$, ne sont pas parfaits. En effet, comme ils sont de longueur impaire, il faut 3 couleurs pour les colorier, alors que la plus grande clique qu'ils contiennent est K_2 , de taille 2. En revanche, tout sous-graphe induit est une réunion de chemins, qui, comme tout forêt, est parfaite. Le théorème des graphes parfaits montre que les *anti-trous*, qui sont les complémentaires des trous, sont également p-critiques.

4.2 Conjecture de Berge

La conjecture forte de Berge affirme que les seuls graphes p-critiques sont exactement les trous et les anti-trous. La preuve de ce résultat, environ 150 pages, date de 2002².

Définition 5 (Graphe de Berge). *On dit que G est un graphe de Berge si et seulement si aucun de ses sous-graphes induits n'est un trou ni un anti-trou.*

Une première inclusion est facile : les graphes parfaits sont une sous-classe des graphes de Berge.

Théorème 3 (Théorème fort des graphes parfaits, Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas (2002)). *Tout graphe parfait est un graphe de Berge.*

L'article [4] résume les idées principales qui ont conduit à la preuve du théorème, et quelques autres n'ayant pas abouti. La structure de la preuve repose sur une décomposition des graphes de Berge : tout graphe de Berge est soit d'un certain type, soit décomposable d'une certaine façon. Si chaque classe de base, et chaque décomposition préserve le caractère parfait, alors la conjecture est prouvée.

Le résultat final diffère légèrement de cette approche, car il répertorie quatre classes de base, trois procédés de décomposition, et un dernier cas, qui est une propriété de partition des sommets qui garantit que le graphe n'est pas un contre-exemple minimal à la conjecture.

Lemme 5 (Décomposition des graphes de Berge). *Si G est un graphe de Berge, soit G appartient à l'une des classes de base suivantes :*

- G ou son complémentaire est biparti,
- G est le line graph³ d'un graphe biparti, ou son complémentaire l'est,
- G est un graphe doublement séparé,

soit G admet une des décompositions suivantes :

- une 2-jointure,
- le complémentaire d'une 2-jointure,
- une M -jointure,
- une partition oblique équilibrée (balanced skew).

²L'équipe qui s'est attaquée à cette conjecture en a obtenu la preuve complète juste avant la mort de Claude Berge, le 30 juin 2002.

³Ces termes ont probablement une bonne traduction, mais j'ai préféré garder ici les termes d'origines afin de permettre au lecteur averti de reconnaître immédiatement des concepts familiers.

Grphe doublement séparé Un graphe séparé est un graphe qui peut se partitionner en une clique B et un indépendant A . Un graphe doublement séparé G se construit à partir d'un graphe séparé H en doublant les sommets de H : pour tout $x \in V(H)$, on crée dans G deux sommets x_1 et x_2 . Si $a \in A$, on relie a_1 et a_2 par une arête : ceci donne un couplage dans G . On procède de même mais avec le complémentaire de B : tous les $b_i b'_j$ sont adjacents dans G , pour $b, b' \in B$, $i \in \{1, 2\}$ et $b \neq b'$. Enfin, si deux sommets $a \in A$ et $b \in B$ sont adjacents dans H , on crée dans G les arêtes $a_1 b_1$ et $a_2 b_2$; s'il ne sont en revanche pas reliés dans H , on crée dans G les arêtes $a_1 b_2$ et $a_2 b_1$.

2-jointure Soit $G = (V, E)$ est un graphe, A et B deux ensembles qui partitionnent V , A_1, A_2 une partition de A , et B_1, B_2 une partition de B . On dit que G admet une 2-jointure si et seulement si tout sommet de A_i est adjacent à tout sommet de B_i , et qu'il n'existe aucune autre arête dans G . Autrement dit, G est l'union disjointe de deux cliques biparties. Le concept de 2-jointure est dû à Chvátal.

Partition oblique équilibrée Une partition oblique d'un graphe $G = (V, E)$ est une partition des sommets de G en deux ensembles A et B tels que G_A n'est pas connexe, et G_B n'est pas connexe non plus. Par définition, G admet une telle partition si et seulement si son complémentaire en admet une. La partition est *équilibrée* si tout chemin dont les extrémités sont dans B et l'intérieur dans A est de longueur paire, et si tout anti-chemin dont les extrémités sont dans A et l'intérieur est dans B est également de longueur paire.

M-jointure Ou pourquoi on ne parle pas en fait des M-jointures : les M-jointures étaient utilisées dans la preuve d'origine, mais M. Chudnovsky a prouvé dans sa thèse qu'elles n'étaient pas nécessaires.

4.3 Preuve sur des classes particulières

Un résultat plus à notre portée est de prouver la conjecture forte de Berge sur des classes particulières de graphes.

Graphes triangulés Une des caractérisations des graphes triangulés est justement par l'absence de cycles de longueur au moins 4 sans corde, donc en particulier un graphe triangulé ne possède pas de trou. On peut remarquer ensuite que la classe des graphes triangulés est héréditaire, et il suffit donc de prouver que les anti-trous ne sont pas triangulés. Si $\overline{C_k}$ est un anti-cycle, avec $k \geq 5$, et x l'un de ses sommets, alors x est relié à tous les sommets du graphe sauf ses voisins sur le cycle C_k . En particulier, x est relié à y et à un voisin z de y : mais z et y ne sont pas reliés, donc x ne peut pas être simplicial. Ainsi, dès qu'un graphe contient un anti-cycle de longueur au moins 5, donc en particulier les anti-trous, il n'est pas triangulé.

Graphes de comparabilité Comme la classe des graphes de comparabilité est héréditaire, il suffit de prouver que les trous et les anti-trous ne sont pas transitivement orientables pour montrer que les graphes de comparabilité vérifient la conjecture de Berge. Soient x, y, z trois sommets adjacents, dans cet ordre, sur un cycle C_k , $k \geq 4$. On peut choisir arbitrairement la première orientation, par exemple $x \rightarrow y$. Il est alors nécessaire d'orienter $z \rightarrow y$, car sinon la transitivité imposerait l'existence d'une arête $x \rightarrow z$, ce qui serait impossible. On peut voir cette orientation comme un 2-coloriage du cycle, en répartissant les sommets entre un ensemble de puits et de sources : si la longueur du cycle est impaire, il est impossible de le colorier avec 2 couleurs, ce qui se traduit par le fait qu'il existera trois sommets x, y, z , où $x \rightarrow y$ et $y \rightarrow z$, mais il n'existe pas d'arête entre x et z .

Enfin, les anti-trous ne sont pas des graphes de comparabilité. Pour cela on distingue $\overline{C_5}$ des autres anti-trous. En effet, $C_5 = \overline{C_5}$, dont on a déjà prouvé qu'il n'était pas un graphe de comparabilité. L'orientation des anti-trous revient encore ici à partitionner l'ensemble de sommets entre

des puits et des sources : si xy est une arête de l'anti-trou, orientée par exemple dans le sens $x \rightarrow y$, x est relié à un voisin z de y . Pour assurer la transitivité de l'orientation, il est nécessaire d'orienter $x \rightarrow z$ car l'arête yz n'est pas dans l'anti-trou. De proche en proche, on prouve alors que x est une source.

Comme l'anti-trou est de taille au moins 7, il contient un triangle x, y, z : si l'on oriente $x \rightarrow y$, alors on doit orienter $z \rightarrow y$. Mais x et z devraient alors être des sources, et l'arête xz n'est donc pas orientable.

4.4 Questions algorithmiques autour des graphes parfaits

Grâce au lemme 5, la preuve de la conjecture de Berge semble pouvoir mener à un algorithme polynômial de reconnaissance : il n'en est en fait rien, principalement parce que la décomposition en partition oblique n'est pas facile à reconnaître. Paul Seymour montre dans [4] qu'en fait l'algorithme de reconnaissance polynômial, obtenu par Chudnovsky, Cornuejols, Liu, Seymour et Vuskovic en 2002, n'utilise pas le lemme de décomposition.

Une autre caractérisation des graphes parfaits existait déjà avant cette preuve, elle est mentionnée dans [3] et nous en donnons ici les idées principales.

Si \mathbf{A} est une matrice de taille $m \times n$, on considère deux polyèdres :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{A}) &= \{\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \leq \mathbf{1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \\ P_I(\mathbf{A}) &= \text{enveloppe convexe}(P(\mathbf{A}) \cap \mathbb{N}^n) \end{aligned}$$

Définition 6 (Matrice de clique). *Si G est un graphe, et \mathcal{K} est l'ensemble des cliques maximales de G , la matrice de clique est la matrice où chaque ligne correspond à un sommet de G et chaque colonne à une clique de \mathcal{K} . L'élément (x, K) de cette matrice vaut 1 si et seulement si $x \in K$, 0 sinon.*

La matrice de clique est unique, à une permutation des lignes et des colonnes près.

Théorème 4 (Chvátal (2002)). *Si \mathbf{A} est la matrice de clique d'un graphe G , alors G est parfait si et seulement si $P_I(\mathbf{A}) = P(\mathbf{A})$.*

5 Conclusion

Nous avons vu que la classe des graphes parfaits était une classe de graphes importantes, en particulier parce qu'elle contient de nombreuses autres classes usuelles, dont les graphes d'intervalles, les graphes de comparabilité ou les graphes triangulés.

On peut penser que la preuve des deux conjectures posées par Berge au début des années 1960 clôt la discussion au sujet des graphes parfaits, car cette classe est désormais très bien connue. P. Seymour mentionne dans [4] un premier axe de recherche, qui consisterait à améliorer la preuve du théorème fort des graphes parfaits.

Un autre axe, qui semble a priori plus intéressant, serait d'obtenir un algorithme de construction explicite des graphes de Berge. Dans le même axe, on sait qu'il existe un algorithme de coloriage polynômial, à base de polyèdres et de programmation linéaire : mais existe-t-il un algorithme combinatoire, plus proche de la structure des graphes parfaits ?

Références

- [1] R. P. Dilworth. A decomposition theorem for partially ordered sets. *Annals of Mathematics 2nd Series*, 51(1) :161–166, 1950.
- [2] Alain Ghoulà-Houri. Caractérisation des graphes non orientés dont on peut orienter les arêtes de manière à obtenir le graphe d'une relation d'ordre. *Compte-rendu de l'Académie des Sciences, Paris*, 254 :1370–1371, 1962.

- [3] Martin Charles Golumbic. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press, 1980.
- [4] P. Seymour. How the proof of the strong perfect graph conjecture was found. *Gazette des Mathématiciens*, 2006.
- [5] D. West. *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, 2001.