Rapport: Liens entre théorèmes min-max

Jérôme Contant

May 23, 2007

Contents

1 Introduction

Une relation *min-max* est un théorème établissant une églité entre la solution d'un problème de minimisation et celle d un problème de maximisation.

Ces théorèmes sont très importants en théorie des graphes car, généralement, une des deux valeurs est plutôt facile à calculer alors que l'autre est beaucoup plus compliquée.

Nous allons, dans ce rapport, montrer que certains théorèmes min-max sont reliés entre eux, c'est à dire qu'un théorème peut se déduire d'un autre à partir de petites transformations de graphes et sans avoir à refaire la preuve en entier.

L'interêt de ce rapport n'étant pas de démontrer les théorèmes min-max présentés, les démonstrations de ces théorèmes ne seront pas rédigées dans ce rapport. [1] [2]

2 Liens entre les théorèmes de Menger

Pour commencer, nous allons voir une transformation, très courante en théorie des graphes, qui est le passage au graphe dual. Elle sert dans de nombreuses démonstrations qui ont pour but de montrer une propriété sur les arêtes d'un graphe, lorsque l'on a une propriété similaire sur les sommets. Cette transformation sera ici appliquée à différents théorèmes de Menger.

Définition 1. Le graphe dual d'un graphe G, noté $L(G)$, est le graphe dont les sommets sont les arêtes de G, avec $ef \in E(L(G))$ quand $e = uv$ et $f = vw$ dans G.

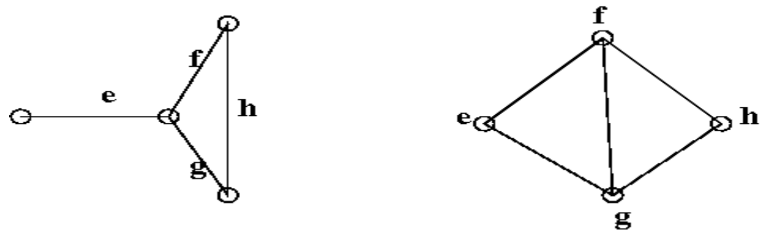

Figure 1: un graphe G et son dual

Menger a démontré plusieurs théorèmes min-max reliants le nombre de chemins entre deux sommets et le cardinal d'un séparateur entre ces deux sommets.

Voici deux des principaux théorèmes de Menger:

Théorème 1. *(version sommets-disjoints) Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté ou non.*
Si x et y sont des sommets de G tels que $xy \notin E(G)$, alors le nombre maximum de chaînes deux à deux sommets-dijoints (hors les extrémités) est égale au cardinal d'un minimum d'un x, y séparateur (au niveau des sommets).

Théorème 2. *(version arêtes-disjointes) Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté ou non.*
Si x et y sont des sommets de G tels que $xy \notin E(G)$, alors le nombre maximum de chaînes deux à deux arêtes-disjointes est égal au cardinal d'un minimum d'un x, y séparateur (au niveau des arêtes).

Pour passer d'un théorème à l'autre, il suffit de passer au graphe dual.

Remarque. Ce lien entre les deux théorèmes de Menger n'a pas un grand interêt dans le sens où l'une des deux démonstrations se fait directement à partir de l'autre.

Nous verrons dans les deux parties suivantes des liens plus forts, puisque dans la suite chacun des théorèmes possèdera sa propre preuve, et que les transformations de graphes que nous présenterons permettent de faire un lien entre les deux.

3 Liens entre le théorème de Menger et de Ford-Fulkerson

Dans cette partie, on va utiliser un des théorèmes de Menger vus dans la partie précédente (celui avec arêtes disjointes), et on va le relier à l'aide d'une transformation de graphes, au théorème de Ford-Fulkerson, sur le flot dans un réseau.

Pour la suite du rapport, on va poser:
$\alpha(x, y)$ = le nombre maximum de chaînes deux à deux sommets-disjointes reliants x à y et $\beta(x, y)$ = cardinal d'un minimum d'un x, y séparateur (au sens des arêtes).

3.1 Théorème de Ford-Fulkerson

Définition 2. Un réseau est un graphe orienté avec des capacités positives sur les arcs, avec un source s et un puit t.
Un flot assigne une valeur $f(e)$ à une arête e. Le flot est dit faisable s'il satisfait les contraintes $0 \leq f(e) \leq c(e)$ et que le flot entrant par un sommet v soit le même que le flot sortant par ce somment. La valeur d'un flot est égale au flot entrant dans le puit moins le flot sortant du puit.

Définition 3. Dans un réseau D, une coupe "source/puit" $[S, T]$ est l'ensemble des arêtes partant de S et arrivant en T, où S et T forment une partition de l'ensemble des noeuds. La capacité de cette coupe correspond à la capacité des arêtes de cet ensemble.

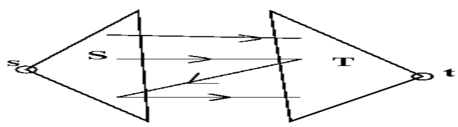

Figure 2: une coupe "source/puit $[S, T]$"

Théorème 3. *Dans un graphe orienté avec capacités sur les arcs, le flot maximum qui peut passer entre deux sommets est egal à la capacité minimum d'une coupe séparant ces deux sommets.*

Le théorème de Ford-Fulkerson est valable pour des capacités qui peuvent être rationnelles. Néanmoins, de nombreuses applications de ce théorème n'utilisent que des capacités entières pour les arcs du réseau.

Le corollaire suivant permet d'affirmer que lorsque les capacités du réseau sont entières, on peut trouver un flot qui ne prenne que des valeurs entières.

Corollaire 1. *Si toutes les capacités d'un réseau sont des entiers, alors il existe un flot maximum qui prenne des valeurs entières sur chaque arête.*

Les démonstrations de ce théorème et du corollaire se trouvent dans [1].

3.2 Comment passer de l'un à l'autre?

3.2.1 Menger à partir de Ford-Fulkerson

Quand x et y sont des sommets d'un graphe orienté D, on peut voir D comme un réseau de source x, de puit y et de capacité 1 sur toutes les arêtes. Mettre une capacité de 1 sur toutes les arêtes va permettre une correspondance entre le flot du réseau et le nombre de x, y chaînes arêtes-disjointes dans D. Ceci vient du corollaire vu précedemment.

Donc un flot de valeur k correspond à un ensemble de k chemins.

On a alors, par définition, chaque coupe "source/puit" $[S, T]$ est un ensemble d'arêtes tel que si on le supprime un de ces ensembles, y devient inaccessible à partir de x.

Par construction, on a la taille de cet ensemble est égale à sa capacité. (capacité de 1 sur chaque arête)
Donc min $cap(S, T) \leq \beta(x, y)$.

Or a alors, à 1 aide du théorème de Ford-Fulkerson, (max val (f) = min cap(S, T)):

$\beta(x, y) \leq \alpha(x - y)$.
L'autre egalité étant tout le temps vraie, on a le théorème de Menger.

3.2.2 Ford-Fulkerson à partir de Menger

Pour montrer le théorème de Ford-Fulkerson à partir du théorème de Menger, on considère un réseau arbitraire et on le transforme en un graphe orienté, sur lequel on appliquera le théorème de Menger.

On fait en sorte que toutes les capacités du réseaux soient des entiers en multipliant chaque capacité par le plus petit dénominateur commun.

Etant donné un réseau N avec des capacités entières, on forme un graphe orienté D telle que chaque arête de capacité j de N soit transformée en j arêtes pour D, ayant les mêmes extrémités.

- On a $\alpha(s, t) \leq$ max val f. Cela vient directement de la construction de D à partir de N et du fait que a chaque fois que l'on a un chemin dans D (arête disjointe avec les atres chemins), on peut augmenter la valeur du flot de N d une unité.

- On montre alors que min cap $(S, T) \leq \beta(s, t)$.

  Soit F un ensemble de $\beta(s, t)$ arêtes déconnectants t de s dans D.

  Si $e \in F$ alors par minimalité de F, on a $D - (F - e)$ a un chemin de s à t qui passe par e.

  Si une copie $e^{'}$ de e n appartient pas à F, alors ce chemin peut être reroutré par $e^{'}$ pour obtenir un chemin de s à t. Ce qui est impossible par définition de F.

  Donc, F contient soit toutes les copies, soit aucune copie des arêtes multiples de D.

Donc, $\beta(s,t)$ est la somme des capacités de l'ensemble des arêtes qui déconnecte s de t dans N

Donc, en considérant $S =$ l'ensemble des sommets atteignables depuis s dans $D - F$, on a:

$cap(S,T) = \beta(s,t)$

et donc min $cap(S,T) \leq \beta(s,t)$.

Ce qui suffit à démontrer l'equivalence des théorèmes

4 Liens entre les théorèmes de Konig-Egervary et de Dilworth

Dans cette dernière partie, nous allons essayer d'établir un lien entre deux théorème qui, à première vue, sont de natures différentes: en effet, le théorème de Konig-Egervary nous donne un résultat sur les graphes bipartis, alors que le théorème de Dilworth porte sur les éléments d'un ordre partiel.

Commencons par donner les énoncés de ces théorèmes.

4.1 Théorème de Konig-Egervary-[1931]

Définition 4. Un couplage d'un graphe G un ensemble d'arêtes qui n'ont aucun point en commun.

Théorème 4. *Si G un graphe non orienté et biparti, alors le cardinal maximum d'un couplage est égale au cardinal minimum d'un ensemble de sommets couvrants les arêtes.*

4.2 Théorème de Dilworth

Définition 5. Un ordre partiel est une relation réflexive, transitive, antisymétrique où tous les éléments ne sont pas forcement comparables.
Une chaîne est une partie ou les éléments sont tous comparables.
Une antichaîne est une partie où les éléments sont tous incomparables.

Ces définitions présentées, nous pouvons passer à l'énoncé du théorème, dont on peut trouver la démonstration dans [2].

Théorème 5. *Dans un ordre partiel, la cardinal maximum d'une antichîne est égal au nombre minimum de chaînes couvrants tous les éléments de l'ordre.*

Le théorème de Dilworth peut se voir comme un théorème sur les graphes en associant à $P = (X, \leq)$, un ordre partiel, le graphe orienté $D = (X, A)$ tel que $xy \in A$ si et seulement si $x \leq y$. Le graphe D ainsi crée est transitif dans le sens où si $xy \in A$ et $yz \in A$ alors $xz \in A$.

De plus, on peut remarquer que un chemin de D correspond à une chaîne de P et qu'un ensemble indépendant de D correspond à une antichaîne de P.

4.3 Comment passer de l'un à l'autre?

4.3.1 de Konig à partir de Dilworth

Pour démontrer le théorème de Konig, on part d'un graphe G biparti.

On lui associe alors le graphe D, qui correspond à une orientation transitive de G.

Figure 3: orientation transitive d'un graphe.

On a alors,

- D'après la remarque faite précédemment une antichaîne de D correspond à un ensemble indépendant de G.

  Or, dans un graphe $A = (V(A), E(A))$, on sait que si S est un indépendant alors $V(A) - S$ est un ensemble de sommets couvrants les arêtes de A.

  Donc, par passage au maximum, on a

  card. max antichaîne = card max indépendant = $|V(G)|-$ card min d'ensemble de sommets couvrants les arêtes.

- De plus, On a le fait que un ensemble de chaînes couvrants les sommets de D correspond à un ensemble d'aêtes de G auquel il faut rajouter des sommets isolés. Donc un ensemble de chaînes couvrants les sommets de D correspond à un couplage de G et des sommtes isolés de G.

  S on suppose que le couplage utilisé est de cardinal c, on a

  card ensemble de chaînes couvrants les sommets $= c + V(G) - 2c$.

  D'où en passant au maximum: car. min d'un ensemble de chaînes couvrants les sommets $= |V(G)| -$ card max d'un couplage.

- On a alors en appliquant le théorème de Dilworth :

  card. max antichaîne = car. min d'un ensemble de chaînes couvrants les sommets.

  Donc le théorème de Konig est vérifié.

4.3.2 Dilworth à partir de Konig

Pour avoir le théorème de Dilworth à partir de celui de Konig, on a besoin d'introduire la notion de "split graphe"

Définition 6. Le "split" graphe d'un graphe orienté $D = (V(D), E(D))$ est un graphe biparti G, dont les parties V_+ et V_- sont des copies de $V(D)$. Pour chaque noeud $x \in V(D)$, il y a un noeud $x_+ \in V_+$ et un noeud $x_- \in V_-$. Pour chaque arête uv dans D, il y a une arête u_+v_- dans G.

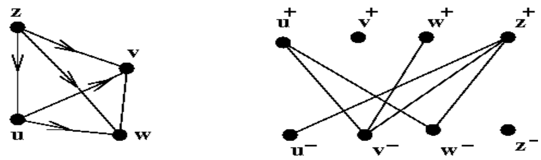

Figure 4: Le split graphe d'un graphe orienté.

On considére un graphe transitif D.
On pose G le "split" graphe de D.
On a alors:

- A partir d'un couplage de G, on construit des chaînes avec les éléments de l'ordre.

  On sait que le nombre de sommets de que l'on a atteint = card couplage + nombre de chaines construites (par construction).

  Or, le nombre de chaînes totales =nombre de chaines construites + les sommets isolés. le nombre de chaînes totales = nombre de chaines construites + $V(D)-$ le nombre de sommets de que l'on a atteint.

  D'où, en passant au maximum,

  card. max. couplage = $V(D)-$ car. min d'un ensemble de chaînes couvrants les sommets.

- Par construction, $|V(G)| = 2|V(D)|$, donc en utilisant une remarque vue dans le paragraphe précédent, on a card min d'ensemble de sommets couvrants les arêtes = $2|V(D)|-$ card max indépendant

  Or card max indépendant = $|V(D)|$ + card. max antichaîne. En effet un indépendant est forcement de taille supérieure stricte à $|V(D)|$, en prenant tous les éléments x_+ tel que $x \in |V(D)|$ et un élément de V_-.

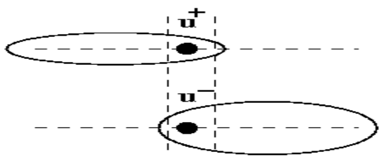

Figure 5: éléments d'un indṕendant.

  On a donc une intersection non nulle entre des éléments de V_- et V_+. Or par construction, ces éléments correspondent à des éléments d'une antichaîne.

- Donc en supposant le théorème de Konig vérifié, on a le théorème de Dilworth.

5 Commentaires

Ce sujet a été difficile à traiter dans le sens où les liens entre les différents théorèmes n'etaient pas précisés. Il m'a donc fallu chercher dans la bibliographie des graphes lesquels pouvaient exister.

Il doit surement exister d'autres liens entre des théorèmes min-max connus à ce jour, mais par manque de temps je n'ai pu les explorer.

De plus, les transformations de graphes présentées dans ce rapport ne sont pas totalement triviales (sauf le passage au graphe dual).

Néanmoins, ce sujet m'a permis de comprendre à quel point des sujets qui peuvent paraître différents (Ordre et graphe biparti) sont reliés très facilement à l'aide de transformations de graphes.

References

[1] Douglas B.West.Introduction To Graph Theory.

[2] Jorgen Bang-Jense, Gregory Gutin. Digraphs, Theory, Algorithms And Applications.