Graphes et algèbres (max,+) ou (min,+).

Martin Delacourt

20 mai 2007

Résumé

On s'intéresse ici aux liens entre les graphes et les algèbres (max,+) ou (min,+). On verra comment ces algèbres permettent de formaliser certains problèmes de graphes, comme la recherche des plus courts chemins. On verra aussi réciproquement comment on peut utiliser les graphes pour étudier ces algèbres. Après une présentation des outils que l'on utilisera, on verra quels problèmes de graphes peuvent être résolus avec ces outils, et on étudiera notament les réseaux de Petri temporisés. Ensuite, on fera le raisonnement inverse et verra quels problèmes algèbriques peuvent être efficacement résolus à l'aide de graphes. Tous les résultats énoncés dans ce rapport l sont soit dans l'algèbre (min,+), soit dans l'algèbre (max,+). La transposition de l'un à l'autre est aisée, c'est pourquoi l'alternance est utilisée. Selon les résultats, l'énoncé dans l'une ou l'autre des algèbres a effectivement plus de sens ou d'applications.

1 Définitions.

1.1 Algèbres.

Une algèbre est une structure comportant trois lois, deux lois internes et une loi externe. Les deux lois internes définissent un semi-corps, c'est par exemple le cas de $\mathbb{R}$ avec les opérations habituelles $+$ et $\times$. Pour avoir un semi-corps il faut vérifier certaines règles d'ssociativité, de commutativité, d'existence d'élément neutre ou de distributivité :

- $+$ est asociative, commutative et a un élément neutre 0
- $\times$ définit un groupe sur le semi-corps privé de 0, elle est didtributive par rapport à $+$ et son élément neutre 1 vérifie : $0 \times 1 = 1 \times 0 = 0$

On a alors des propriétés simples, comme le fait que 0 soit absorbant pour $\times$.

On peut maintenant définir les algèbres (min,+) et (max,+), les opérations qui les fondent sont :

- $\oplus = min$ et $\otimes = +$ sur l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
- $\oplus = max$ et $\otimes = +$.sur l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

On vérifie aisément les propriétés nécessaires. Les éléments neutres sont respectivement $+\infty$,0 et $-\infty$,0. On les notera dans le cas général ϵ et e.

Les deux algèbres sont liées entre elles par l'isomorphisme qui transforme un nombre en son opposé. C'est en effet le même isomorphisme qui permet de passer de l'un à l'autre et réciproquement.

On peut aussi définir des matrices sur ces ensembles et les opérations sur les matrices seront calquées sur les opérations dans l'algèbre habituelle, en transposant les opérations.

1.2 Graphes.

On utilise des graphes orientés en règle générale, un graphe G est donc défini comme un couple (V, E) où V est un ensemble de sommets et E un ensemble d'arêtes entre ces sommets. Le graphe peut être pondéré par une fonction $\omega : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ si l'on est dans l'algèbre (min,+).

On peut définir la matrice d'adjacence d'un graphe comme la matrice $A = (a_{i,j})_{i,j}$, où $a_{i,j}$ est le poids de l'arête (i,j), et si le graphe n'est pas pondéré, 1 si l'arête existe, 0 sinon. Dans l'autre sens, en partant d'une matrice carrée A, on définit le graphe de précédence associé à A : $\mathcal{G}(A)$. Si A est de taille $n \times n$, le graphe aura n noeuds et, pour tous i et j, un arc (i, j) si $A_{j,i} \neq \epsilon$. Le graphe peut être pondéré en donnant à l'arc le poids de $A_{j,i}$.

2 Les algèbres (max,+) et (min,+) dans l'étude des graphes.

2.1 Plus court chemin dans un graphe.

Le premier problème auquel on va s'intéreser est celui du plus court chemin dans les graphes. De la même manière, on pourrait obtenir le plus long chemin. On prend donc un graphe $G = (V, E)$ quelconque. On suppose $|V| = n$. On lui associe sa matrice d'adjacence A de taille $n * n$. On a donc le résultat suivant :

Théorème 2.1. *$\forall k$ la matrice A^d calculée dans l'algèbre (min,+) a pour composantes les $A^k(i,j)$ qui sont les poids des plus courts chemins de i à j empruntant exactement d. Et $+\infty$ si il n'y a pas de chemin de longueur d entre i et j.*

Démonstration. A est bien la matrice des plus courts chemins de longueur 1. Par récurrence, on montre le résultat.
Soit $d > 0$, on suppose prouvé le résultat pour $d - 1$. Soient i et j deux sommets quelconques du graphe. Tout chemin de longueur d entre i et j est composé d'un chemin de longueur $d-1$ entre i et $k \in V$ et de l'arête k, j.On cherche le plus court tel chemin, donc : $min_{k \in V}(A^{d-1}(i,k) + A(k,j)$. C'est à dire $A^d(i,j) = \bigoplus_{k \in V} \big(A^{d-1}(i,k) \bigotimes A(k,j)\big)$. C'est donc exactement $A^{d-1} \times A$ calculée dans l'algèbre (min,+), i.e. A^d. □

Dans le cas où les poids sont tous positifs, il ne peut y avoir de cycle de longueur strictement négative, et donc il suffit de prendre le chemin le plus court sans cycle. $\bigoplus_{d \leq n} A^d$ est la matrice des plus courts chemins entre tous les points du graphe.

2.2 Réseaux de Petri.

Les réseaux de Petri sont des outils pemettant de modèliser des systèmes discrets. Un réseau de Petri est un graphe biparti $\big((P,T),E\big)$, dans lequel les éléments de P sont les `places` et les éléments de T les `transitions`. Toute arète du graphe relie une place et une transition, les arètes étant toutes orientées, ce qui permet de différencier les places précédant une transition (places `amont`) et les places succédant une transition (places `aval`). On définit de plus un `marquage` du réseau comme la donnée du nombre de jetons présents sur chaque place. L'évolution de ce système se fait de la manière suivante : lorsque toutes les places amont d'une transition contiennent au moins un jeton, la transition est activée, on retire un jeton à chacune des places amont et on ajoute un jeton à chaque place aval.

Ces réseaux posent un problème pour l'analyse dans le cas général, ils ne sont pas forcément déterministes, en effet, même en appliquant la loi : dès qu'une transition peut être activée, elle l'est, il reste des cas de conflit, par exemple dans les réseaux de la figure 2.

On simplifie le problème en éliminant ces réseaux pour se ramener à des `graphes d'évènements` : chaque place n'a qu'une unique arète incidente et une unique arète sortante. Ainsi, il ne peut plus y voir de conflits. On peut

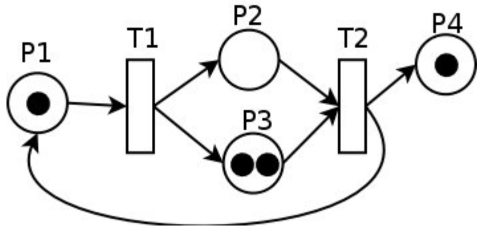

FIG. 1 – Réseau de Petri.

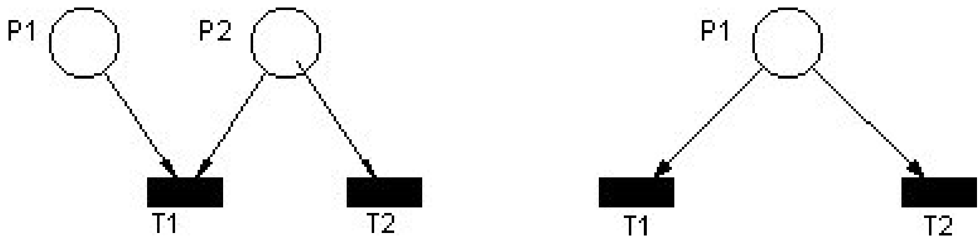

FIG. 2 – Réseaux de Petri générant des conflits.

dès lors voir le lien avec l'algèbre (min,+), en effet, une transition peut être activée autant de fois que le minimum des nombres de jetons des places amont. Et le nombre de jeton d'une place est la somme du nombre initial et du nombre d'activation de la transition précédente, auquel on retranche le nombre d'activation de la transition suivante. Toutefois pour affiner le modèle, on va pondérer le réseau. Cette pondération s'interprétera en terme de durée des opérations que le système doit faire.

2.3 Réseaux de Petri temporisés.

On peut affecter des durées aux places et aux transitions, pour simplifier, on n'en attibuera qu'aux places. On ne perd en fait pas de généralité puisqu'il suffit de remplacer une transition par deux transitions encadrant une place de même durée, le système est alors le même. On s'intéresse à calculer le nombre d'activations d'une transition à un instant t. Le temps est évidemment discret, et le nombre de jetons dépend du nombre initial, et des nombres d'activations des transitions précédentes. En effet, il est égal au minimum des nombres de jetons disponibles (ou utilisés) dans les places amont.
Soit t_i une transition, avec pour place amont $p_{i,1}, \ldots, p_{i,k}$. $t_i(k)$ est le nombre d'activations de la transition au temps k. On note $t_{i,j}$ la transition précédent

$p_{i,j}$. Alors, si $d_{i,j}$ est la durée associée à la place et $s_{i,j}$ le nombre initial, le nombre de jetons utilisables ou qui ont été utilisés dans $p_{i,j}$ est $s_{i,j} + t_{i,j}(k - d_{i,j})$. Donc, on obtient une modélisation en : $T(k) = \bigotimes_i A(i)X(k-i)$.

Les matrices $A(i)$ sont carrées et ont pour taille le nombre de transitions du réseau : n. On peut obtenir une èquation plus simple en dimension $n \times K$. K est la plus grande durée d'une place. On prend comme variable $Y(t) = \begin{pmatrix} X(k-1) \\ X(k-2) \\ \vdots \\ X(k-K) \end{pmatrix}$.

Et on pose $A = \begin{pmatrix} A(1) & A(2) & \dots & \dots \\ A(1) & A(2) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$.

On a donc pour finir $Y(t) = AY(t-1)$. On est de nouveau ramené à un problème de calcul de puissances de matrice.

3 Les graphes pour l'étude des algèbres.

3.1 Matrices irréductibles.

Définition 3.1. *Une matrice ayant une structure triangulaire haute par blocs est une matrice définie par blocs (au moins deux) telle que tous les blocs inférieurs à la diagonale soient des blocs nuls (ϵ).*

Définition 3.2. *Une matrice A est dite irréductible si et seulement si il n'existe pas de permutation P telle que $B = P'AP$ ait une structure triangulaire haute par blocs.*

Dans cette définition, P' est la transposée de P, et l'opération consiste en un renumérotage des noeuds du graphe. On cherche donc à savoir si en renumérotant les noeuds, on peut obtenir la structure voulue ou non. Et on a ce résultat :

Lemme 3.1. *Une matrice est irréductible si et seulement si son graphe de précédence est fortement connexe.*

Démonstration. Supposons que la matrice A se mette dans une structure triangulaire haute par blocs en renumérotant les sommets. On considère le dernier bloc de taille k. Il n'y a donc pas d'arète entre un noeud d'indice entre 1 et n-k et un noeud d'indice entre n-k+1 et n. Donc le graphe n'est pas fortement connexe.

Dans l'autre sens, supposons que le graphe ne soit pas fortement connexe, on détermine alors les composantes fortement connexes du graphe. On peut mettre un ordre sur ces composantes (avec la relation d'accessibilité). On numérote alors les noeuds en prenant les composantes connexes par ordre croissant. On obtient alors une matrice ayant une structure triangulaire haute par blocs. □

3.2 Valeurs Propres.

On se place maintenant dans l'algèbre (max,+), les opérations sur les matrices seront donc les composées des opérations max et +, bien que la notation ne permette pas de les différencier des opérations habituelles. Les notions de valeur propre et vecteur propre sont indépendantes de l'algèbre considérée, donc on retrouve les définitions habituelles. Une matrice A admet pour valeur propre λ si il existe une vecteur x tel que $Ax = \lambda x$. x est alors un vecteur propre associé à cette matrice.

Définition 3.3. *Le poids moyen maximum d'un circuit est le maximum sur l'ensemble des circuits d'un graphe du quotient du poids du circuit (somme des poids des arètes) et de la longueur du circuit.*

Théorème 3.1. *Si une matrice est irréductible, elle possède une unique valeur propre égale au poids moyen maximum d'un circuit :* $\lambda = max_{\mathcal{C}} \dfrac{|\mathcal{C}|_w}{|\mathcal{C}|_l}$.

Preuve de l'existence. On pose $B = A \oslash \lambda$ la matrice dont les coefficients sont ceux de A auquels on a retiré λ. Le graphe de précédence associé $\mathcal{G}(B)$ n'a donc que des circuits de poids négatifs ou nuls. Cela permet de définir les matrices $B^* = \bigoplus_{kge0} B^k$ et $B^+ = B^*B$. De plus tous les circuits du graphe seront de poids au plus e.
On va montrer que dans certaines colonnes de la matrice, le coefficient diagonal est égal à e (l'élément neutre de $\otimes$. On prend k un noeud appartenant à un circuit de poids moyen λ dans A. Le poids maximal d'un chemin de k à k est maintenant e. Donc on a bien $B^+_{k,k} = e$. On note $B^+_{.,k}$ la k-ième colonne de B, on a : $B^+_{.,k} = B^*_{.,k}$ donc $BB^*_{.,k} = B^*_{.,k}$, donc $AB^+_{.,k} = \lambda B^*_{.,k}$. On peut donc conclure que $x = B^+_{.,k}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ. □

Preuve de l'unicité. On peut montrer que si λ vérifie l'équation caractérisant une valeur propre, alors c'est le poids moyen d'un circuit x. On considère un circuit $(i_1, \ldots, i_p, i_1)$ dont tous les noeuds ont un coefficient non nul dans x. On a donc $A_{i_{k+1},i_k} x_{i_k} \leq \lambda x_{i_{k+1}}$ pour k entre 1 et p (avec $i_{p+1} = i_1$). En multipliant toutes ces inégalités, on obtient :$A_{i_2,i_1} A_{i_3,i_2} \ldots A_{i_1,i_p} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p} \leq \lambda^p x_{i_2} x_{i_3} \ldots x_{i_1}$. En simpliiant tous les x_{i_k} dans cette expression, on obtient que λ est supérieur au poids moyen du circuit $(i_1, \ldots, i_p, i_1)$. λ est donc le poids moyen maximal d'un circuit. □

Pour calculer λ, on peut utiliser l'algorithme de Karp qui propose de calculer le poids moyen minimal d'un circuit. Il repose sur l'égalité :
$\lambda = \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \dfrac{l_n(s,v) - l_k(s,v)}{n-k}$. Où $l_i(x,y)$ est le poids du plus court chemin entre x et y de longueur i. L'algorithme se fait en temps polynomial, puisqu'il suffit de calculer les chemins de poids minimum d'un sommet s à tous les autres sommets pour des longueurs entre 1 et n. C'est à dire calculer par exemple la puissance n de la matrice d'adjacence dans l'algèbre (min,+)

3.3 Comportement asymptotique des puissances de matrices.

On va maintenat prouver des résultats sur le comportement des matrices dans l'algèbre (max,+) lorsqu'elles sont mises à une puissance tendant vers l'infini. On donne pour commencer une série de définitions sur les graphes. On a une matrice A et son graphe de précédence $\mathcal{G}(A)$. On supposera toujours que le poids maximal des circuits est e, au besoin on divisera par λ comme plus haut pour se ramener à une telle matrice.

Définition 3.4. *Un circuit est dit critique si son poids est maximal(c'est à dire e.*

Définition 3.5. *On appelle* **`graphe critique`**, *le graphe $\mathcal{G}^c(A)$ le graphe contenant tous les noeuds et arcs de $\mathcal{G}(A)$ qui font partie d'un circuit critique.*

Définition 3.6. *La cyclicité d'une composante fortement connexe est le pgcd de toutes les longueurs des circuits de cette composante. La cyclicité d'un graphe est le ppcm de toutes les cyclicités de ses composantes fortement connexes.*

On définit maintenant la norme utilisée : $|a - b|_e = |exp(a) - exp(b)|$. Cette norme a pour interêt que si deux suites tendent vers ϵ, alors ces deux suites ont une différence tendant vers 0.

On note $Q_i = A^+_{.,i} A^+_{i,.}$ pour tout sommet i de $\mathcal{G}^c(A)$. Et $Q = \bigoplus_i Q_i$ où on fait la somme sur les sommets i de $\mathcal{G}^c(A)$.

Enfin, on va énoncer un lemme d'arithmétique que l'on utilisera plus tard :

Lemme 3.2. *Si n et p sont premiers entre eux, pour tout $q \geq (p-1)(n-1)$, il existe $a(q)$ et $b(q)$ des entiers positifs tels que $q = a(q)p + b(q)n$.*

Le premier résultat sur le compotement asymptotique des puissances de matrice est le suivant :

Théorème 3.2. *Pour une matrice A, $\lim_{k\to+\infty} A^k = Q$ est équivalent à ce que la cyclicité de chacune de ses composantes fortement connexes soit 1.*

Démonstration. Pour montrer que la condition est suffisante, on prend un noeud i de $\mathcal{G}^c(A)$. Pour tout j, on note $p(i,j)$ la longueur d'un chemin de poids maximal entre i et j, si il y a plusieurs chemins de poids maximaux, on prend la plus petite longueur, et si le poids maximal est $+\infty$, on prend $p(i,j) = 1$. La composante fortement connexe contenant i a pour cyclicité 1, donc il existe deux circuits de longueurs n et p premier entre eux. Grâce au lemme précédent, il existe donc un entier $M[i]$ tel que pour tout $m \geq M[i]$, il existe un circuit critique de longueur m dans la composante fortement connexe contenant i. Ce cicuit est obtenu en composant les deux circuits de longueurs p et n. Comme le poids maximal d'un circuit est e, tout chemin de poids maximal entre i et j de longueur $q \geq M[i] + p(i,j)$ est composé d'un cycle critique de longueur $q - p(i,j)$ et d'un chemin de poids maximal entre i et j. En effet, entre i et j, le chemin de poids maximal est de longueur $p(i,j)$, et il faut ajouter un circuit de la longueur restante de poids e. Donc, pour tout $q \geq M[i] + p(i,j)$, on a $A^q_{j,i} = A^+_{j,i}$. Comme $A^+_{i,i} = e$, on a de plus $A^q_{j,i} = A^+_{j,i} A^+_{i,i}$. On a montré cela pour tout noeud i de $\mathcal{G}^c(A)$.

On prend maintenant l un noeud qui n'est pas dans $\mathcal{G}^c(A)$, et i dans $\mathcal{G}^c(A)$. Soit q assez grand et $p \leq n$ tel que $A^p_{i,l} = A^+_{i,l}$. C'est possible car tous les circuits sont de poids inférieur ou égal à e. On obtient l'inégalité : $A^q_{j,l} \geq A^{q-p}_{j,i} A^p_{i,l} = A^+_{j,i} A^+_{i,l}$. L'inégalité est stricte si le chemin de poids maximal de j à l ne passe pas par i, c'est à dire ne passe par aucun sommet de $\mathcal{G}^c(A)$. Dans ce cas, comme les poids des circuits qui ne sont pas dans $\mathcal{G}^c(A)$ sont strictement inférieurs à e, en augmentant q, les chemins générés ont un poids arbitrairement proche de ϵ. Dans ce cas, on a $\lim_{q\to+\infty} A^q_{j,l} = \epsilon = \bigoplus_i A^+_{j,i} A^+_{i,l}$, pour i dans $\mathcal{G}^c(A)$.

On a donc dans tous les cas $\lim_{q\to+\infty} A^q_{j,l} = \bigoplus_i A^+_{j,i} A^+_{i,l}$ pour j et l dans$\mathcal{G}(A)$ et i dans $\mathcal{G}^c(A)$. Ce qui termine la preuve de la suffisance.

Pour montrer que la condition est nécessaire, on suppose que la propriété sur la limite est vraie et que la cyclicité de $\mathcal{G}^c(A)$ est strictement supérieure à 1. On choisit un noeud i d'une composante fortement connexe de $\mathcal{G}^c(A)$ de cyclicité stristement supérieure à 1. On a $A^+_{i,i} = e$, et on sait qu'il existe d tel que pour tout k, $A^{kd}_{i,i} = e$. Grâce à la limite, on a $exp(A^{kd}_{i,i}) = exp(e) = exp(A^{kd+1}_{i,i}) + \eta$, où η peut être pris aussi petit que possible puisque la limite de la différence des exponentielles tend vers 0. Or $A^{kd+1}_{i,i} = A^p_{i,i}$ pour un certain $p \leq n$, donc il ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, ce qui prouve que η est nul. Donc, on a un circuit critique de longueur $kd+1$, mais kd et $kd+1$ sont premiers entre eux, ce qui contredit l'hypothèse sur la cyclicité. □

On peut prouver de la même manière un résultat plus fort pour les graphes fortement connexes.

Théorème 3.3. *Si $\mathcal{G}(A)$ est fortement connexe, il existe un entier K tel que : $\forall k \geq K, A^k = Q$, si et seulement si la cyclicité de chaque composante fortement connexe de $\mathcal{G}^c(A)$ est 1.*

Démonstration. La preuve est essentiellement la même que celle du théorème précédent. Cependant comme le graphe est fortement connexe, tout chemin de longueur suffisament grande de j à l rencontre $\mathcal{G}^c(A)$. Donc il n'est plus nécessaire de passer à la limite en prenant des chemins de longueur décroissante tendant vers ϵ. □

3.4 Cyclicité des puissances de matrices.

Dans cette section, on va encore montrer un résultat sur les puissances des matrices et leur comportement asymptotique. On va définir la notion de cyclicité sur les matrices, puis celle de cyclicité asymptotique.

Définition 3.7. *Une matrice A est dite cyclique s'il existe un entier d et un entier M tels que : $\forall m \geq M, A^{m+d} = A^m$. Le plus petit tel d est la cyclicité de la matrice.*

Définition 3.8. *Une matrice A est dite asymptotiquement cyclique si il existe un entier d tel que, pour tout $\eta > 0$, il existe M, tel que pour tout $m \geq M$, $sup_{i,j}|A^{m+d}_{i,j} - A^m_{i,j}|_e \leq \eta$. Le plus petit tel d est la cyclicité asympotique de la matrice.*

Cela amène le résultat suivant :

Théorème 3.4. *Toute matrice est asymptotiquement cyclique. La cyclicité asymptotique d'une matrice A est égale à la cyclicité* ρ *de* $\mathcal{G}^c(A)$.

Démonstration. Pour $\rho = 1$ le résultat a déjà été montré à la section précédente. On prend donc une matrice A avec ρ quelconque. On pose $B = A^\rho$. Le graphe critique de B est un sous-graphe de celui de A. Comme la cyclicité de $\mathcal{G}^c(A)$ était ρ, celle de $\mathcal{G}^c(B)$ est 1. On peut donc appliquer les théorèmes précédents à B. D'où, B est asymptotiquement cyclique avec $d = 1$ et donc A est aussi asymptotiquement cyclique avec $d \leq \rho$.

On montre maintenant que $d \geq \rho$. On prend i dans une composante fortement connexe l de cyclicité ρ_l. On a donc :
$exp\left(A_{i,i}^{k\rho_l}\right) = exp(e) = exp\left(A_{i,i}^{k\rho_l+d}\right) + \eta$. Pour k assez grand et η arbitrairement petit. On a vu dans la preuve de 3.2 que l'on obtenait alors $A_{i,i}^{k\rho_l+d} = A_{i,i}^{k\rho_l}$. Ce qui implique qu'il existe un circuit de longueur d dans la composante fortement connexe. Donc ρ_l/d. Comme ce résultat est vrai pour toutes les composantes connexes, on a en définitif ρ/l, ce qui achève la preuve. □

4 Conclusion.

On a ici montré que des problèmes de graphes pouvaient trouver des solutions en utilisant le formalisme de ces algèbres (min,+) ou (max,+). On se ramène, en pratique, essentiellement à des problèmes matriciels et notament des problèmes de puissances de matrices. Or on a vu aussi que l'on pouvait donner des résultats sur les comportement de matrices, et ces résultats sont eux-mêmes démontrés avec des techniques utilisant largement les graphes. Le lien entre ces deux mondes est donc intéressant puisque fructueux, et fonctionne dans les deux sens.