**Partiel de graphes - 2 heures**

*Remarque :* dans les exercices suivants, les graphes considérés sont non orientés. Pour un graphe $G = (X, E)$, on notera $n = |X|$, $m = |E|$ et $d(x)$ le degré de $x$ dans $G$.

**Exercice 1**

Un graphe $G = (X, E)$ est un *graphe scorpion* s'il existe trois sommets $x$, $y$ et $z$ tels que :
- $d(x) = 1$ ($x$ est le *dard*),
- $d(y) = 2$ et $xy \in E$ ($y$ est la *queue*),
- $d(z) = n - 2$ et $yz \in E$ ($z$ est la *tête*).

Les autres sommets constituent le *corps.*

1 - Quels sont les nombres minimum et maximum d'arêtes d'un graphe scorpion à $n$ sommets ?

2 - Montrer que s'il existe trois sommets $a$, $b$ et $c$ tels que $ab \in E$, $bc \in E$, $d(a) = 1$, $d(b) = 2$ et $d(c) \neq n - 2$, alors le graphe n'est pas scorpion.

3 - En déduire un algorithme en $\mathcal{O}(n)$ pour reconnaître si un graphe donné par ses listes d'adjacence est un graphe scorpion.

**Exercice 2**

1 - Étant donné un graphe biparti $G = (X, Y, E)$ tel que $|X| = |Y|$, montrer qu'il existe $x \in X$, $y \in Y$ tels que $d(x) \leq d(y)$.

Étant donné un graphe biparti $G = (X, Y, E)$ sans sommet isolé et tel que $|X| = |Y|$, on veut maintenant montrer la proposition suivante :

$$\text{il existe } x \in X,\ y \in Y \text{ et } xy \in E \text{ tels que } d(x) \leq d(y).$$

2 - *Première preuve :*
  2a - Si $G$ admet un couplage parfait, montrer que la proposition est vraie.
  2b - Si $G$ n'admet pas de couplage parfait, montrer que malgré tout il existe $B \subseteq X$, $0 < |B| < |X|$, tel que $|B| = |\Gamma(B)|$ et le graphe induit par $G$ sur $B \cup \Gamma(B)$ admet un couplage parfait. En déduire que la proposition est vraie dans ce cas aussi.

3 - *Deuxième preuve :* Quelle est la valeur de la somme $\sum_{\substack{xy \in E \\ x \in X, y \in Y}} (\frac{1}{d(x)} - \frac{1}{d(y)})$ ? Conclure.

**Exercice 3**

Un *cycle hamiltonien* d'un graphe $G$ est un cycle élémentaire à $n$ sommets (autrement dit un cycle passant une fois et une seule par chaque sommet de $G$).

Soit $G = (X, E)$ un graphe tel que toute paire de sommets $x$ et $y$ non adjacents vérifie $d(x) + d(y) \geq n$. On veut montrer que $G$ admet alors un cycle hamiltonien (théorème de Ore [1960]).

1 - Soit $(x_1, \ldots, x_k)$ une chaîne élémentaire de $G$ de longueur maximum. En considérant les voisinages $\Gamma(x_1)$ et $\Gamma(x_k)$, montrer qu'il existe un cycle élémentaire de $G$ dont l'ensemble des sommets est $\{x_1, \ldots, x_k\}$.

2 - Montrer de plus que nécessairement $k = n$, ce qui conclut.

**Exercice 4**

Soit $G = (X, E)$ un graphe connexe tel que chaque arête $e \in E$ porte un poids $w(e) \in \mathbb{N}$. Le *poids* d'un arbre couvrant $T = (X, E_T)$ de $G$ est défini par $W_\Sigma(T) = \sum_{e \in E_T} w(e)$. Comme autre mesure, le *coût critique* d'un arbre couvrant $T = (X, E_T)$ de $G$ est défini par $W_{\max}(T) = \max_{e \in E_T} w(e)$. On s'intéresse aux arbres couvrants qui minimisent l'une ou l'autre de ces mesures.

1 - Montrer qu'un arbre couvrant de $G$ de poids minimum est un arbre couvrant de $G$ de coût critique minimum.

2 - Donner un exemple simple de graphe $G$ et d'arbre couvrant $T$ de $G$ qui minimise le coût critique mais pas le poids.

*A l'heure actuelle, aucun algorithme en temps $\mathcal{O}(n + m)$ n'est connu pour le calcul d'un arbre couvrant de poids minimum. Les questions suivantes ont pour objectif de montrer qu'il existe par contre un algorithme linéaire pour le calcul d'un arbre couvrant de coût critique minimum.* Dans la suite, on suppose que $G$ est donné en entrée par ses listes d'adjacence et que pour toute arête $e$, on accède en temps constant à son poids $w(e)$.

3 - Donner un algorithme en temps $\mathcal{O}(n + m)$ qui, pour un graphe $G$ et un entier $b$, détermine s'il existe un arbre couvrant de coût critique inférieur ou égal à $b$.

4 - Étant donné un graphe $G = (X, E)$ et une partition $X_1$, $X_2$, ..., $X_k$ de l'ensemble $X$ (où chaque $X_i$ est donné en entrée par la liste de ses éléments), construire en temps $\mathcal{O}(n + m)$ le graphe contracté $G' = (X', E')$ où $X' = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ et $x_i x_j \in E'$ si et seulement si il existe $x \in X_i$, $y \in X_j$ tels que $xy \in E$ (autrement dit chaque $X_i$ est contracté en un seul sommet $x_i$).

5 - Décrire un algorithme en temps $\mathcal{O}(n+m)$ qui calcule un arbre couvrant de coût critique minimum. Justifier sa correction et sa complexité.

*Suggestion :* vous pouvez utiliser comme sous-routines les algorithmes des questions 3 et 4, ainsi que l'algorithme de calcul du médian d'un ensemble de valeurs (supposé connu, qui détermine en temps $\mathcal{O}(|S|)$ le médian d'un ensemble $S$ d'entiers).