

Graphes planaires

Vincent Nivoliens

18 mai 2007

1 Introduction

Le problème des graphes planaires est à la base un problème typiquement humain. En effet, il s'agit d'un problème de représentation d'un graphe dans une forme qui nous est plus familière, afin de mieux l'étudier. D'un point de vue purement informatique, pour la plupart des problèmes, un graphe planaire sera représenté comme tous les autres graphes. D'un point de vue humain, la représentation planaire permet d'avoir une meilleure compréhension d'un graphe, et de trouver la solution d'un problème plus facilement.

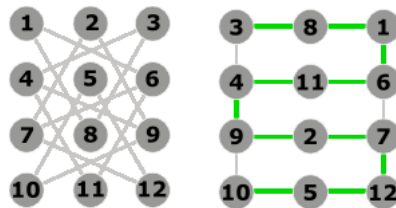


FIG. 1 – Problème du déplacement d'un cavalier d'échecs en touchant toutes les cases une unique fois

Comme dans toute famille de graphes, il tout d'abord nécessaire de s'intéresser à la définition de cette famille et à ses différentes caractérisations. Pour se faire, il est aussi nécessaire de distinguer les propriétés spécifiques de la classe de graphes, qui la différencient des autres, et sur lesquelles s'appuient les caractérisations. Je vais donc dans un premier temps m'intéresser aux différentes propriétés des graphes planaires, avant de donner différentes caractérisations possibles.

Un autre point important d'une classe de graphes est la possibilité de détecter l'appartenance d'un graphe à cette classe. Je donnerai donc un algorithme permettant cette reconnaissance. Enfin, je m'intéresserai à certain problèmes en relation avec les graphes planaires.

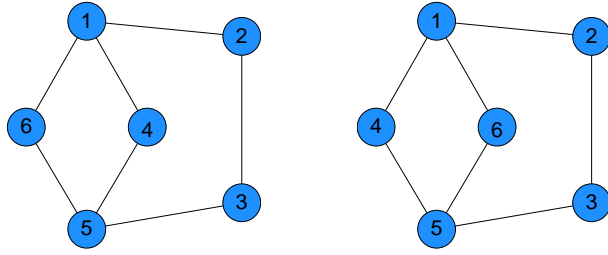


FIG. 2 – deux représentation d'un même graphe n'ayant pas les mêmes faces

2 Abécédaire des graphes planaires

2.1 Idée à la base de la classe : la représentation dans un plan

Visuellement, un graphe planaire est un graphe qu'il est possible de représenter dans un plan de telle sorte que les arêtes entre les sommets ne se croisent pas. Cette définition est un peu vague et demande un peu de précision, notamment sur ce que formellement on appelle représentation.

Définition 1. Une *courbe* est une application continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^2 . Une courbe *polygonale* est une courbe composée d'un ensemble fini de segments. Une (u, v) – courbe est une courbe dont les extrémités sont les points u et v .

Définition 2. Une *représentation* d'un graphe G est une fonction f définie sur l'ensemble de ses sommets V et de ses arêtes E qui à un sommet v associe un point $f(v)$ du plan, et à une arête (u, v) associe une $(f(u), f(v))$ – courbe.

Définition 3. On parlera de *représentation planaire* lorsque les courbes correspondant aux arêtes ne se coupent qu'au niveau de leurs extrémités (formellement, quand les intérieurs des courbes des arêtes sont deux à deux d'intersection nulle. Il est à souligner que de telles représentations ne sont absolument pas uniques.

Un *graphe planaire* est donc un graphe qui a une représentation planaire.

Liée à la notion de représentation apparaît une notion de face. En effet, une représentation planaire réalise une partition du plan en différentes portions séparées par des arêtes. Ces portions sont ce que l'on appelle les faces de G , et l'ensemble des arêtes qui les délimitent sont leur pourtour. Intuitivement, la notion de face est liée à la notion de cycle dans le graphe, mais en réalité, si une face induit un cycle, le contraire est faux, la notion de face est intrinsèque à la représentation planaire du graphe utilisée, et celle-ci n'est pas unique pour un graphe donné. La figure 2 donne un exemple de cela.

2.2 Notion d'équivalence de représentations

Afin de pouvoir comparer des représentations planaires, il est nécessaire de déterminer des outils. Le livre [Die00] donne deux notions d'isomorphismes entre représentations planaires : combinatoire et topologique.

2.2.1 Isomorphisme topologique

Un plan est homéomorphe à une sphère privée d'un point (un homéomorphisme est un isomorphisme qui conserve les propriétés topologiques). Nous allons utiliser cet homéomorphisme pour définir l'isomorphisme topologique. Un isomorphisme topologique revient à envoyer une représentation plane sur son équivalent sur la sphère privée d'un point, à appliquer un homéomorphisme sur la sphère vers une autre sphère, puis à reprojeter sur le plan. Avec les mains, cela revient à mettre la représentation sur une sphère, et réaliser dessus des isomorphismes. Le petit bonus par rapport au plan est qu'il est possible de changer la face externe. la figure 3 vous donne des exemples de représentations topologiquement isomorphes, pour une numérotation adéquate des sommets. Le dernier cas correspond au cas du changement de face externe, le point exclu de la sphère a été déplacé à l'intérieur d'une autre face. Il est à noter que le cas d'un sommet au point interdit est interdit.

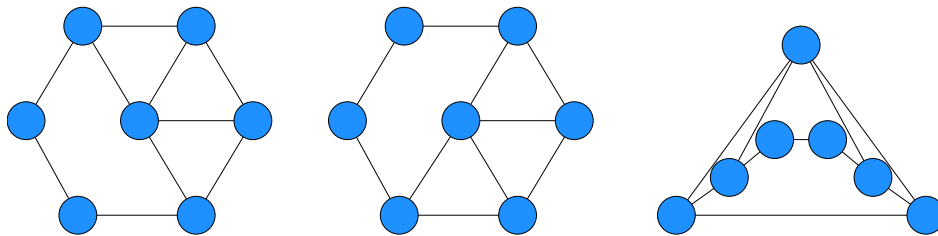


FIG. 3 – Équivalence topologique de graphes

2.2.2 Isomorphisme combinatoire

La notion d'isomorphisme combinatoire est plus faible que la notion topologique. En effet, l'isomorphisme topologique est un cas particulier d'isomorphisme combinatoire. Ce dernier consiste à réaliser un isomorphisme entre les représentations, de telle sorte que la notion d'adjacence soit conservée. Il n'agit pas uniquement de l'adjacence des sommets et des arêtes, mais aussi des arêtes et des faces. La figure 4 donne exemple d'isomorphisme combinatoire qui n'est pas topologique.

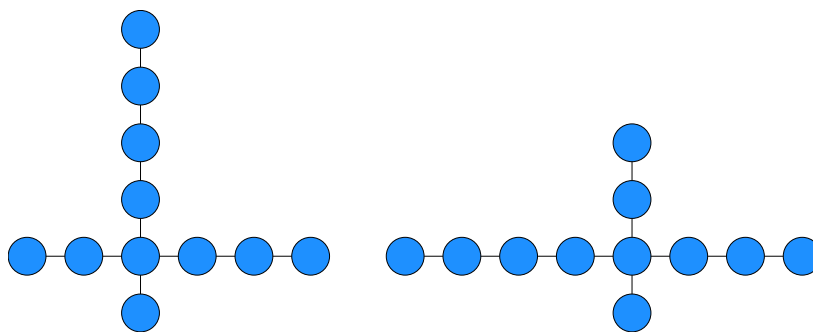


FIG. 4 – Équivalence combinatoire et non topologique

Intuitivement, la notion d'isomorphisme combinatoire est plus faible, car elle autorise des transformations locale du graphe. En effet au niveau d'un point d'articulation, il est possible de réaliser un isomorphisme topologique d'un des lobes sans les

autres, ce qui ne peut pas se faire lorsqu'on réalise simplement un isomorphisme topologique. Cette intuition se confirme dans [Die00] lorsqu'il est prouvé un théorème d'équivalence des deux types d'isomorphismes dans le cas des graphes 2-connectés, sans point d'articulation donc.

3 Premières propriétés sur les graphes planaires

3.1 Exemples de graphes non planaires

Deux graphes sont particulièrement célèbres pour leur non-planarité, à cause du théorème de Kuratowski que nous verrons plus tard. Je vais donc vous montrer que K_5 , la clique à cinq sommets, et $K_{3,3}$, graphe biparti complet à trois sommets ne sont pas planaires. Il en existe de nombreuses démonstrations.

Une très courte et amusante consiste à remarquer que $K_{3,3}$ a une représentation sans croisement d'arêtes sur le ruban de Moebius, avec un ensemble de faces faisant le tour du ruban. Cette surface n'étant pas orientable, si $K_{3,3}$ était planaire, le plan ne serait pas orientable, ce qui est absurde. La figure 5 montre cette représentation. La même démonstration peut-être effectuée pour K_5

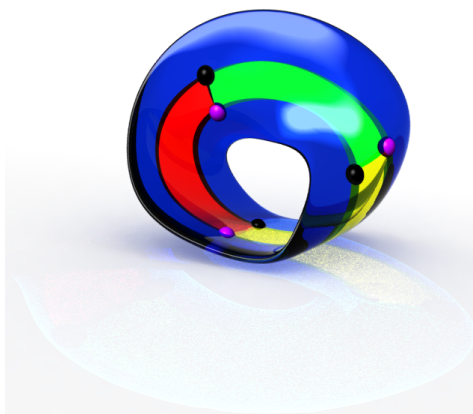


FIG. 5 – $K_{3,3}$ sur un ruban de Moebius

La démonstration de [Wes01] se base sur le choix d'un cycle couvrant, comme base de la représentation. Ensuite, on montre que les arêtes restantes ne peuvent pas être représentées toutes dans des faces différentes, et que si elles sont représentées dans la même face, cela pose problème car dans ce cas, une arête sépare une face en deux, et la seconde à une extrémité dans chaque partie, et doit donc traverser la courbe réalisant la coupure pour les rejoindre, ce qui empêche la planarité.

Une troisième démonstration, elle aussi très simple, se base sur la formule d'Euler, pour montrer que ces graphes ont trop d'arêtes par rapport au nombre de leurs sommets pour être planaires.

3.2 Formule et caractéristique d'Euler

Théorème 1. *Si un graphe planaire connexe possédant n sommets, e arêtes, a une représentation planaire à f faces, alors la relation $n - e + f = 2$ est vérifiée.*

L'idée de preuve de ce théorème est très simple : on commence par transformer toutes les faces en ensemble de triangles en ajoutant des arêtes, ce qui ne modifie pas la somme étant donné qu'à chaque arête ajoutée, on augmente aussi de un le

nombre de faces. De même, on peut supprimer les arêtes doubles car on enlève une arête et une face en même temps. Ensuite, on raisonne par récurrence sur le nombre de sommets, en se ramenant à un graphe plus petit en retirant un sommet d'un triangle ayant deux arêtes en contact avec la face externe, ou en supprimant une arête d'un triangle n'ayant qu'une arête en contact avec la face externe.

Ce théorème permet de donner une autre preuve du fait que $K_{3,3}$ et K_5 ne sont pas planaires. De plus on peut déduire de cette relation une majoration sur le nombre d'arêtes maximales d'un graphe planaire simple en fonction du nombre de sommets. En effet, en considérant aussi le fait qu'une arête sépare toujours deux faces, et en considérant que toutes les faces d'un graphe ont au moins trois arêtes pour pourtour, il découle que $2e(G) \geq 3f$, et en remplaçant dans la relation, il vient :

Théorème 2. *Un graphe planaire simple (sans doubles arêtes) à n sommets et m arêtes vérifie $m \leq 3n - 6$*

4 Caractérisations des graphes planaires

4.1 Caractérisation par mineurs interdits

4.1.1 Théorème de Kuratowski

La caractérisation la plus connue des graphes planaires correspond au théorème de Kuratowski, qui engendre une caractérisation par mineurs interdits. En réalité, Kuratowski parle de subdivisions, et non de mineurs, mais il est assez facile de passer des subdivisions aux mineurs.

Définition 4. *Une subdivision d'une arête uv d'un graphe est l'opération de la remplacer par un chemin uvw en ajoutant un sommet w .*

Un graphe G' est une subdivision de G s'il peut être obtenu à partir de G par une série de subdivisions

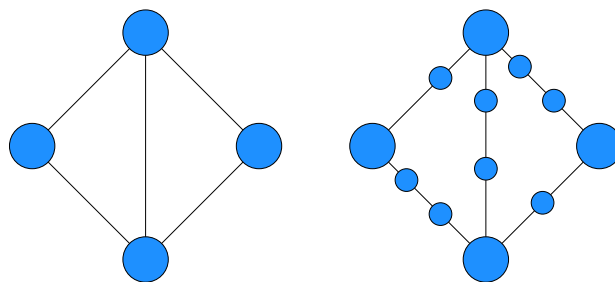


FIG. 6 – Subdivision d'un graphe

Théorème 3. *Un graphe est planaire si et seulement si il ne contient pas de subdivisions de K_5 ou de $K_{3,3}$ (On les appellera sous-graphes de Kuratowski).*

[Wes01] et [Die00] proposent tous deux des preuves de ce théorème, qui sont assez similaires. L'idée globale est toujours de passer par les graphes 3-connectés. La première étape est de démontrer le lemme :

Lemme 1. *Un graphe non planaire minimal (en terme de nombre d'arêtes) ne contenant pas de sous-graphe de Kuratowski est 3-connecté.*

L'idée de la preuve est de choisir deux sommets séparateurs du graphe x et y . On montre qu'ajouter l'arête xy à l'un des lobes crée un graphe non planaire, ayant moins d'arêtes, et contenant donc un sous-graphe de Kuratowski. Seule l'arête xy a été ajoutée or comme x et y forment un ensemble séparateur, un autre lobe contient un chemin de x à y , faisant que G contient une subdivision d'un graphe de Kuratowski.

L'étape suivante consiste à montrer qu'un graphe 3-connecté ne contenant pas de sous-graphe de Kuratowski est planaire. Cette démonstration est faite par récurrence en considérant le fait que dans tous graphes 3-connectés de plus de 5 arêtes, il est possible de contracter une arête en gardant la 3-connectivité. De plus la contraction d'arête ne fait pas apparaître de sous-graphe de Kuratowski. Les deux ouvrages diffèrent sur la fin. En effet, [Wes01] reste sur la notion de subdivision, et démontre un résultat plus fort, alors que [Die00] passe par les mineurs pour démontrer le résultat. Je vais vous présenter la preuve de [Wes01].

Lemme 2. *Si G est un graphe 3-connecté sans sous-graphe de Kuratowski, alors il existe une représentation planaire convexe de G sans que trois sommets ne soient alignés.*

Démonstration. Initialisation de la récurrence : si le graphe a moins de 4 sommets, il s'agit de K_4 qui est le seul 3-connecté qui a une telle représentation.

Étape de récurrence : soit G un graphe 3-connecté sans sous-graphe de Kuratowski. En contractant une arête xy en un sommet z pour former un graphe H , on reste 3-connecté, et on ne crée pas de sous-graphe de Kuratowski. Ainsi, on a une représentation planaire convexe n'ayant pas trois sommets alignés. Une des faces de H contient le sommet z (s'il s'agit de la face externe, le résultat s'applique, moyennant quelques déformations n'affectant pas la convexité ni l'alignement de points, et il doit aussi être possible de changer la face externe par un isomorphisme, mais je ne me risquerai pas à prouver qu'un tel isomorphisme conserve la convexité).

Soient $x_1 \cdots x_k$ les voisins de x dans l'ordre du cycle englobant la face. Si tous les voisins de y sont dans une portion de cycle contenue entre x_i et x_{i+1} , on obtient aisément une représentation en plaçant y dans la face délimitée par x , x_i , x_{i+1} et tous les sommets du cycle entre deux. On peut ensuite tracer sans croisement les arêtes de y à ses voisins.

Dans le cas contraire, si y a deux voisins qui alternent dans le cycle avec deux voisins de x , on montre qu'il apparaît une subdivision de $K_{3,3}$. Maintenant les autres cas. Le graphe étant 3-connecté, y a au moins trois voisins. Si y a un voisin qui n'est pas un x_i , comme tous ses voisins ne sont pas dans le même intervalle $x_i \cdot x_{i+1}$, un de ses autres voisins autre que x est à l'extérieur, et on arrive dans le second cas.

y n'a donc que des voisins qui sont des voisins de x . De même il ne peut pas y en avoir que 2, sinon, ils sont dans le même intervalle, ils sont donc au moins trois. On exhibe alors une subdivision de K_5 . La figure 7 vous montre ces différents cas. \square

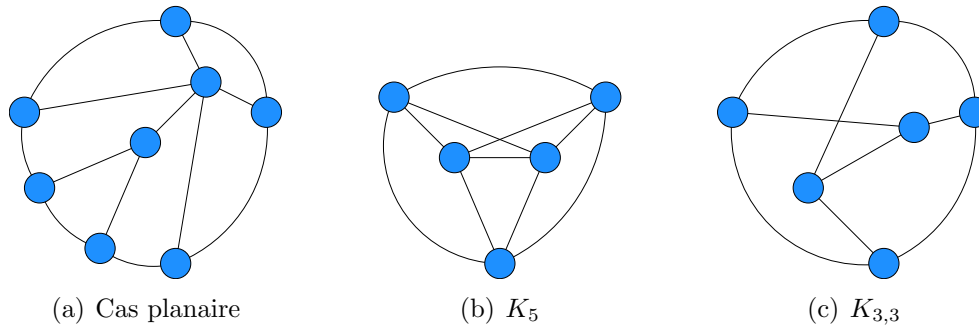


FIG. 7 – différents cas de placement des voisins de y selon ceux de x

4.1.2 Extension aux mineurs interdits, théorème de Wagner

Le résultat de Kuratowski se transforme facilement pour donner une caractérisation par mineurs interdits.

Définition 5. *Un mineur est un graphe obtenu par suppression ou compression d'arêtes.*

Pour montrer ce résultat, il suffit de voir que la contraction ou la suppression d'arêtes conserve la planarité. Ainsi, si un graphe contient $K_{3,3}$ ou K_5 comme mineur, il ne peut pas être planaire. L'autre sens découle immédiatement du théorème de Kuratowski, étant donné le fait qu'une subdivision d'un graphe contient ce graphe comme mineur.

4.2 Autres caractérisations

Il existe de nombreuses autres façons de caractériser les graphes planaires. La plupart des autres se situent plus d'un point de vue algébrique, je mentionnerai toutefois la caractérisation de Fraysseix-Rosenstiehl [dFR82], qui permet de déduire un algorithme de reconnaissance polynômial des graphes planaires. Elle se base sur la notion d'arbre trémal de G . Un parcours en profondeur crée un arbre, et il reste un certain nombre d'arêtes qui ne peuvent pas être ajoutées sans créer de cycle. Le parcours en profondeur fait que ces arêtes sont des arêtes de retour, c'est à dire qu'elles ont été découvertes à un noeud et pointent vers un noeud de profondeur plus petite sur la branche menant à ce noeud. Cette propriété définit un *arbre trémal* de G . La caractérisation revient à réaliser une partition de des arêtes de retour d'un arbre trémal de G en deux sous ensembles

Théorème 4. *Soit G un graphe et T un arbre trémal de ce graphe. G est planaire si et seulement si il existe une partition de ses arêtes de retour en deux classes telles*

que deux arêtes sont dans la même classe si elles sont **T-semblables**, et deux arêtes sont dans deux classes différentes si elles sont **T-opposées**.

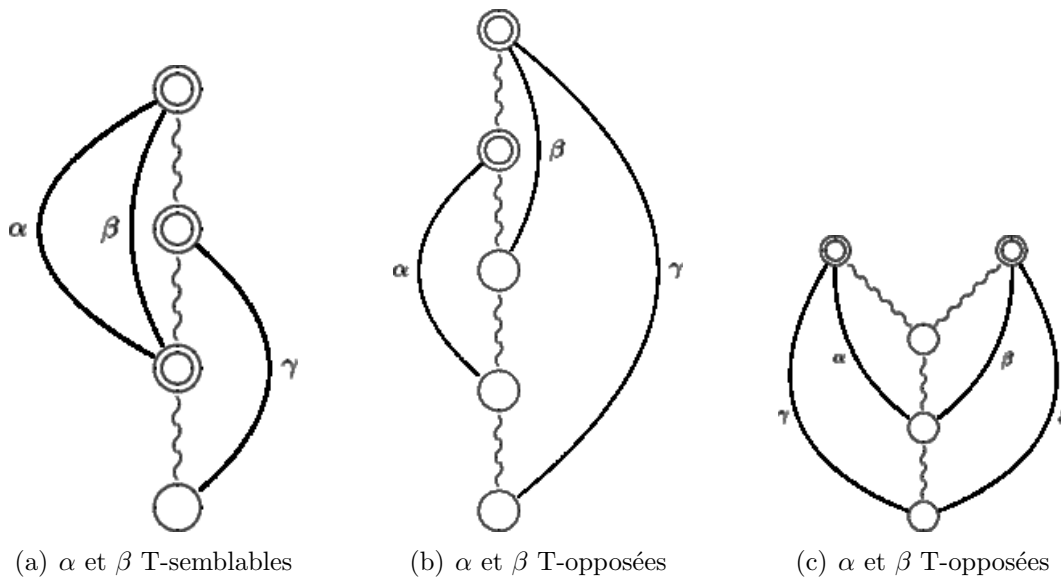


FIG. 8 – Notion de T-semblable et T-opposé

Définition 6. Deux arêtes sont dites **T-semblables** si dans toute représentation planaire du graphe elles sont incidentes du même côté de l'arbre trémal. Inversement deux arêtes sont **T-opposées** si dans toute représentation planaire du graphe elles ne sont pas incidentes du même côté de T . Le côté de l'incidence d'une arête de retour e correspond à l'orientation de l'angle formé par l'arête partant du noeud où termine e , et enracinant la branche contenant le noeud de départ de e , avec e elle-même.

5 Reconnaissance des graphes planaires

5.1 Algorithme de Demoucron-Malgrange-Petruiset

L'algorithme proposé par [Wes01] consiste à construire une représentation planaire d'un graphe. Il s'agit de l'algorithme de Demoucron-Malgrange-Petruiset. Cet algorithme n'est pas linéaire, mais il en existe un, plus compliqué. La construction se base sur ce que l'on appelle des H -fragments

Définition 7. Soit H un sous-graphe de G , un H – fragment est soit :

- une arête dont les extrémités sont toutes les deux dans H
- une composante connexe de $G - V(H)$, ainsi que les arêtes la connectant à H .

L'idée générale de l'algorithme est de partir d'un cycle C du graphe, et de réaliser une itération. On pose $G_0 = C$, et ensuite, si G_i est le graphe obtenu à la $i^{\text{ème}}$ itération, une passe d'itération consiste à chercher les G_i – fragment. Une fois fait,

on cherche l'ensemble des faces de G_i contenant l'ensemble des arêtes rattachant le fragment à G_i . Si cet ensemble est vide pour un des fragments, on peut retourner que le graphe n'est pas planaire. Si l'un des fragments ne peut être mis que dans une face, on le sélectionne, sinon, tous les fragments peuvent être mis dans plusieurs faces, on sélectionne l'un des fragments. Le fragment sélectionné, on cherche un chemin reliant deux de ses arêtes d'attachement, et on le rajoute à G_i dans la bonne face. On peut ensuite itérer à nouveau.

Cet algorithme n'est pas linéaire mais la compréhension en est assez simple. En effet, on rajoute petit à petit des chemins dans le graphe. Le coeur du problème se situe au niveau du choix de la face dans laquelle on réalise l'ajout, quand il y en a plusieurs possibles pour tous les fragments, et qu'on choisit au hasard. L'idée de la preuve est de montrer que si G_i peut être étendu à un graphe planaire, G_{i+1} le peut aussi. Si un fragment est placé dans la face f , on montre qu'on peut aussi le placer dans la face f' , en modifiant l'agencement des fragments venant par la suite. Si un autre fragment pose problème, et empêche de "retourner" la représentation de f à f' , c'est qu'en réalité, il ne pouvait pas être placé dans plusieurs faces entre f et f' , et aurait dû être placé avant.

5.2 Algorithme de Fraysseix-Ossona-Rosenstiehl

Cet algorithme donné dans l'article [FMR06] se base sur la caractérisation donnée plus haut. Le but est de créer une coloration sur les arêtes. Pour se faire, il attribue à chaque arête du graphe une pile de paires de piles, qui vont contenir des arêtes et des contraintes de coloration. Le principe global est de traiter les arêtes de retour en premier, puis de traiter petit à petit les arêtes dont toutes les arêtes filles dans l'arbre tréma ont été traitées, en faisant une sorte de fusion sur les structures des arêtes filles. Si les résultats sont compatibles, la coloration avance, s'ils ne le sont pas, on échoue.

6 Quelques problèmes en relation avec les graphes planaires

6.1 Problème de coloration

La coloration d'un graphe planaire est devenu un sujet assez célèbre. En effet, une conjecture annonçait qu'il était toujours possible de colorer un graphe planaire avec 4 couleurs, mais la preuve a résisté longtemps, et a été sujette à controverse. La 6-coloration des graphes planaires est immédiate. En effet, nous avons vu grâce à la formule d'Euler qu'un graphe planaire à n sommets avait au maximum $3n - 6$ arêtes. De cette majoration, on peut aisément déduire que dans tout graphe planaire, il existe un sommet de degré au plus 5. Il vient donc immédiatement une preuve par récurrence que tout graphe planaire est colorable avec 6 couleurs, en retirant puis réajoutant ce sommet.

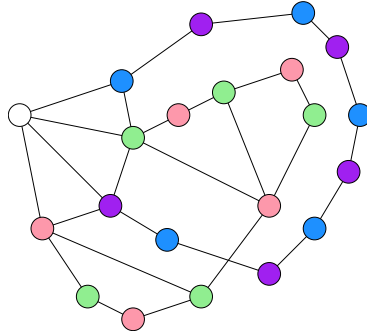


FIG. 9 – Impossibilité d’avoir 5 couleurs identiques sur un même cycle autour d’un sommet

En partant de cette propriété, on démontre avec un petit peu plus de travail qu’un graphe planaire est 5-colorable. En effet, si v est un sommet de degré au plus 5 de G , en enlevant v , par récurrence, on peut obtenir une 5-coloration. Imaginons que tous les sommets entourant le sommet soient de couleurs différentes. On notera v_i le voisin de v ayant la couleur i . On considère $G_{i,j}$ la composante de G contenant v_i , et uniquement des sommets de couleurs i ou j . Si $G_{i,j}$ ne contient pas v_j , on peut inverser dans $G_{i,j}$ les couleurs i et j , et ce faisant retirer une couleurs des voisins de v , que l’on peut lui attribuer. Si ce n’est pas le cas, considérons 4 sommets du voisinage de v alternés sur le cycle, v_1, v_2, v_3, v_4 . Soit P un chemin de v_1 à v_3 dans $G_{1,3}$. En ajoutant v à ce chemin, on forme un cycle, avec les sommets v_2 et v_4 dans des faces différentes par rapport à ce cycle. Ainsi, tout chemin de v_2 à v_4 doit traverser le cycle, et le graphe étant planaire, la traversée ne peut se faire qu’au niveau d’un sommet. En particulier un chemin dans $G_{2,4}$ doit traverser ce cycle, ce qui est impossible car les couleurs des sommets des chemins sont incompatibles. Ceci est schématisé en figure 9.

Le passage à quatre couleurs est beaucoup plus ardu. En effet, pour se faire, on utilise la notion d’ensembles *inévitables*. Un ensemble de graphes inévitables est un ensemble dont un contre-exemple minimal est obligé de contenir un élément. Ces graphes sont des *configurations*. Il s’agit d’un ensemble de sommets formant un cycle, appelé l’anneau, et une portion du graphe à l’intérieur. Un exemple d’ensemble inévitable est par exemple donné et figure 10. En effet, tout graphe simple est contenu dans une triangulation, donc on peut se limiter aux sommets de degrés au minimum 3, et nous avons vu qu’un graphe planaire possédait un sommet de degré au plus 5.

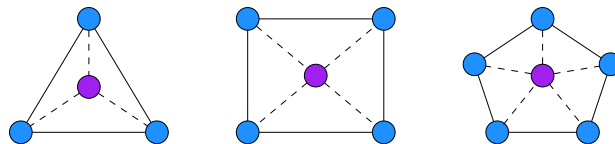


FIG. 10 – Ensemble inévitable pour la démonstration du théorème des 5 couleurs

C’est intuitivement cet ensemble que nous avons utilisé pour la preuve de la 5-colorabilité, en choisissant un sommet de degré au plus cinq. Les deux premiers

graphes de l'ensemble inévitable ne sont pas traités, car ils sont triviaux. La démonstration en utilisant ces ensembles consiste à montrer que pour chaque graphe de ce sous-ensemble, on peut créer une coloration, à partir de la coloration du sous-graphe obtenu en supprimant le sous-graphe dans l'anneau de la configuration. Le problème est que la réduction directement à partir de cet ensemble inévitable n'est pas possible. C'est sur ces ensembles que la première démonstration a été réalisée par , mais l'ensemble considéré contenait 66430 configurations. Une simplification plus tard par Appel, Haken et Koch se réduisait à 1258, puis Robertson, Sanders, Seymour et Thomasse sont ramenés à 633.

6.2 Se ramener aux graphes planaires pour les graphes quelconques

Dans le cas de graphes quelconques, il peut être intéressant d'essayer de se ramener à un graphes planaires le plus proche possible. Il existe donc deux paramètres d'étude sur les graphes quelconques : l'épaisseur, et le nombre de croisements. L'épaisseur est le nombre minimal de graphes planaires, dans une décomposition en graphes planaires. Le nombre de croisements est le nombre minimal de croisements dans une représentation du graphe dans le plan. [Wes01] étudie certaines propriétés, par exemple le nombre de croisements de la clique de taille n , $\nu(K_n)$. Il démontre que

$$\frac{1}{80}n^4 + O(n^3) \leq \nu(K_n) \leq \frac{1}{64}n^4 + O(n^3)$$

7 Conclusion

Pour conclure sur le problème des graphes planaires, je dirais qu'il s'agit d'un type de problème particulier car la propriété que l'on cherche ne concerne pas vraiment la structure du graphe, mais la façon de le représenter. Cela permet de se représenter plus facilement les problèmes. Une autre piste d'exploration que je n'ai pas abordée est celle des graphes duals que l'on peut définir pour les graphes planaires, et qui peuvent servir d'outil pour les démonstrations. [Wes01] Consacre aussi une partie sur les graphes "planaires" sur d'autres surfaces que le plan, comme le tore. On se ramène ainsi plus à un problème de topologie. Le sujet reste encore assez actif, et constitue pour moi un problème plutôt intéressant dans le sens où il est facile de comprendre et d'expliquer ce qu'est un graphe planaire.

Références

- [dFR82] H. de Fraysseix and P. Rosenstiehl. A depth-first-search characterization of planarity. *Ann. Discrete Math.*, 13 :75–80, 1982.
- [Die00] Reinhard Diestel. *Graph theory*. Springer-Verlag, New York, 3 edition, 2000.

- [FMR06] Hubert De Fraysseix, Patrice Ossona De Mendez, and Pierre Rosenstiehl. Trémaux trees and planarity. 2006.
- [Wes01] D. B. West. *Introduction to Graph Theory (2nd Edition)*. (Prentice Hall, Upper Saddle River), 2001.