Master 1 d'informatique fondamentale
École Normale Supérieure de Lyon

Rapport de cours de recherche

Aloïs BRUNEL

4 avril 2009

Les Graphes Parfaits

Table des matières

1 Introduction

Introduite dans les années 60 par Claude Berge, la notion de graphe parfait a depuis été d'une grande importance en théorie des graphes. De nombreuses classes sont en effet incluses dans la classe des graphes parfaits. Elle permet de généraliser un certain nombre de résultats connus sur ces classes particulières. Les graphes parfaits ont une importance majeure du fait des nombreuses applications dans le monde réel qu'on leur trouve.

De plus, les graphes parfaits ont été étudiés intensivement dans le but de prouver les deux fameuses conjectures (faible et forte) des graphes parfaits. C'est chose faite depuis 2002, grâce à la preuve de Chudnovsky, Robertson et Seymour.

Nous allons ici survoler quelques bases de la théorie des graphes parfaits. Nous nous intéresserons à plusieurs classes différentes de graphes qui se trouvent être des graphes parfaits et regarderons plus précisément les propriétés de coloriage de ces graphes ; l'intérêt de chacune de ces classes de graphes sera mis en évidence. Nous présenterons une preuve relativement courte de la conjecture faible des graphes parfaits, découverte en 1972 par Laszlo Lovasz. Enfin nous présenterons quelques résultats intéressants concernant les graphes parfaits.

2 Première définition et conjectures célèbres

Commençons par définir ce que sont les graphes parfaits, et quels sont les résultats les plus connus les concernant.

2.1 Quelques rappels sur les graphes

Avant de définir la classe des graphes parfaits, rappelons quelques définitions usuelles et utiles des graphes.

Définition (Graphe simple)

On dit qu'un grape $G = (V, E)$ est **simple** s'il ne possède pas de boucle et qu'il n'a pas d'arêtes multiples.

Définition (Stable)

On dit que $S \subset V$ est un **stable** si $\forall x, y \in S, \{x, y\} \notin E$.

Définition (Clique)

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. On dit que $C \subset V$ est une **clique** de G si $\forall x, y \in C, \{x, y\} \in E$.

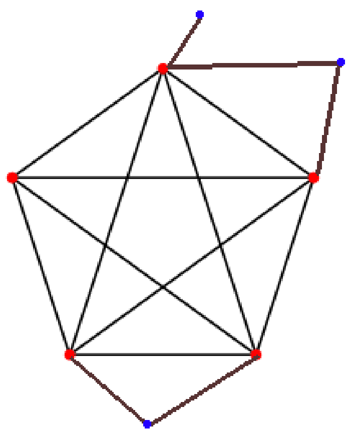

FIGURE 1 – Clique de taille 5 dans un graphe (arêtes en noir)

Définition (Taille de la plus grande clique)

Soit G un graphe simple. On note $\omega(G)$ la taille maximale d'une clique de G.

2.2 Définition

Nous pouvons maintenant définir le concept de coloration, puis la classe des graphes parfaits.

Définition (Coloration)

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Une **coloration** de G est une partition de V en stables.

Remarque. *Chaque stable représente une couleur. Prendre une telle définition permet de confondre les colorations à permutation des couleurs près.*

Définition (Nombre chromatique)

Soit G un graphe simple. On appelle **nombre chromatique** de G et on note $\chi(G)$ le cardinal minimum d'une coloration de G.

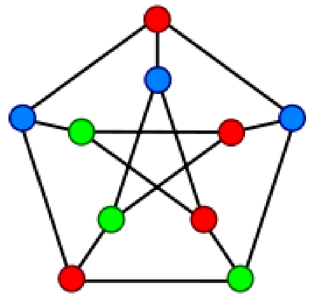

FIGURE 2 – Exemple de coloration d'un graphe de nombre chromatique $\chi(G) = 3$

Définition (Graphes parfaits)

On définit la classe des **graphes parfaits** comme la classe des graphes G tels que pour tout H sous-graphe de G, alors

$$\omega(H) = \chi(H)$$

2.3 Les théorèmes des graphes parfaits

Les graphes parfaits, outre leur utilité indéniable dans le monde de l'algorithmique, sont connus pour les 3 théorèmes suivants, qui furent pendant longtemps des conjectures. Chacun d'eux est aujourd'hui résolu, et nous nous attacherons à montrer certains d'entre eux, dans des cas plus ou moins généraux.

Théorème (La Conjecture faible des graphes parfaits).
Soit G un graphe parfait. Alors $\bar{G}$ le complémentaire de G est également parfait

Ce théorème a été énoncé par Berge et résolu 12 ans plus tard en 1972 par Laslo Lovasz. Nous en verrons une démonstration.

Définition (Trou)

Soit G un graphe simple. Un **trou** est un cycle sans corde de longueur supérieure à 4.

Théorème (La Conjecture forte des graphes parfaits).
G est parfait ssi ni G ni $\bar{G}$ ne contiennent de trou de longueur impair.

Théorème (La reconnaissance en temps polynomial des graphes parfaits).
Il existe un algorithme terminant en temps polynomial déterminant si un graphe simple G est parfait ou non.

La conjecture forte des graphes parfaits et le problème de l'existence d'un algorithme de reconnaissance ont tous deux été résolus en 2002 par Seymour et Al. La preuve est particulièrement complexe et longue, et nous ne ferons qu'esquisser le contenu général de la preuve.

3 Quelques classes de graphes parfaits

Nous allons ici étudier plusieurs classes de graphes qui se trouvent être toutes contenues dans la classe des graphes parfaits. Nous rappellerons l'importance de chacune de ces classes, établiront l'inclusion dans la classe des graphes parfaits, et quand le résultat est simple à établir, nous montrerons le théorème fort ou faible des graphes parfaits dans le cas particulier de la sous-classe étudiée.

3.1 Graphes bipartis

Les graphes bipartis constituent l'une des classes les plus simples de graphes. Leur caractérisation extrèmement simple les rend facile à étudier, et les algorithmes les utilisant très rapides. Les graphes bipartis disposent d'application dans des domaines aussi variés que la chimie, les réseaux ou l'informatique théorique.

Nous verrons que les graphes bipartis possèdent des solutions très simples aux problèmes que nous nous posons sur les graphes parfaits.

Définition (Graphes bipartis)

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On dit que G est **biparti** si on peut trouver une partition $\{V_1, V_2\}$ de V telle que :

$$\forall x, y \in V, \{x, y\} \in E \text{ ssi } (x, y) \in V_1 \times V_2 \cup V_2 \times V_1$$

Autrement dit, une arête ne peut relier qu'un sommet de V_1 à un sommet de V_2. On notera plus simplement $G = (V_1, V_2, E)$ si G est biparti.

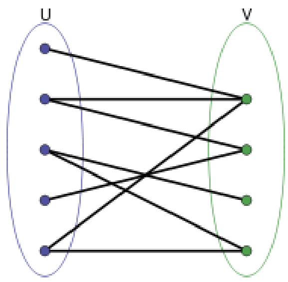

FIGURE 3 – Exemple de graphe biparti

Remarque. *Remarquons déjà que tout sous-graphe d'un graphe biparti est lui-même biparti. Ainsi nous n'aurons pas à vérifier la condition d'hérédité de la définition des graphes parfaits. Il suffit de vérifier la condition d'égalité pour tout graphe biparti.*

Théorème (Perfection).
Tout graphe biparti est également parfait.

▷ **Preuve.**
Soit $G = (V_1, V_2, E)$ biparti. On peut colorier le graphe en n'utilisant que deux couleurs, une couleur pour les sommets de V_1 et une pour les sommets de V_2. Si le graphe n'est pas trivial, on a donc $\chi(G) = 2$. De plus, une clique dans un graphe biparti ne peut contenir plus de 2 sommets. En effet, soit C une clique contenant 3 sommets u, v et w. Supposons sans perte de généralité que $u \in V_1$, alors $uv \in E$ implique que $v \in V_2$. De plus on a $vw \in E$ (car C est une clique) donc $w \in V_1$. Enfin, de la même manière, $uw \in E$, donc $w \in V_2$. Or $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, ce qui constitue la contradiction. Ainsi pour G, on a bien $\chi(G) = \omega(G)$.
G est parfait.
◁

Preuve du théorème fort des graphes parfaits

On va tout d'abord donner une autre caractérisation des graphes bipartis.

Théorème (Caractérisation).
Un graphe biparti ne contient pas de cycle impair.

▷ **Preuve.** Si $G = (U, V, E)$ est un graphe biparti contenant un cycle impair $(x_1, ..., x_{2n+1})$. Alors supposons sans perte de généralité que $x_1 \in U$. Alors pour tout k, $x_{2k} \in V$ et $x_{2k+1} \in U$ par induction immédiate. Or $x_{2n+1}x_1 \in E$, car on est en présence d'un cycle. Donc $x_{2n+1} \in U$ implique $x_1 \in V$, ce qui est absurde. Il n'existe donc pas de tel graphe biparti. ◁

Et on donne maintenant une preuve dans le cas particulier des graphes bipartis de la conjecture forte des graphes parfaits.

Théorème (**Théorème fort des graphes parfaits - graphes bipartis).**
Si $G = (V_1, V_2, E)$ est un graphe biparti, ni lui ni $\bar{G}$ ne contient de trou.

▷ **Preuve.**
- Par la caractérisation précédente, G ne contient pas de cycle impair, donc à fortiori aucun trou.
- Considérons les arêtes de $\bar{G}$. Soit e une telle arête. Elle relie, soit 2 sommets $x, y \in V_i$ avec le même i. Soit elle relie un sommet de V_1 et un de V_2 qui n'étaient pas reliés dans G. Soit $(x_1, ..., x_{2k+1})$ un trou impair $(2 \leq k)$. Deux possibilités :
  - Si tous les $x_k \in V_i$ avec $i = 1, 2$. Alors on sait que ce n'est pas possible car aucun des sommets n'étant reliés dans G, on a à la place dans $\bar{G}$ un maillage de triangles. Donc $(x_1, ..., x_{2k+1})$ ne peut être un trou de taille supérieure à 4.
  - Parmi les x_k on ne peut trouver que 2 sommets provenant de V_1 et 2 sommets provenant de V_2, car à partir de 3, les 3 seraient reliés, donc on aurait une corde au milieu du trou. Donc, le trou est nécessairement de taille 4 (c'est la taille la plus petite possible), il n'est donc pas impair.

◁

3.2 Graphes d'intervalles

Définition (Graphe d'intervalle)

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. On dit que G est un graphe d'intervalle, si à chaque sommet $v \in V$ on peut associer I_v un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall u, v \in V, uv \in E \text{ ssi } I_v \cap I_u \neq \emptyset$$

Remarque.
- *Dans la représentation graphique précédente, on voit que la taille de la clique maximale est simplement le nombre d'intervalles maximum s'intersectant en un point donné.*
- *De plus, la classe des graphes d'intervalle vérifie la condition d'hérédité, ce qui va simplifier la preuve de perfection de cette classe.*
- *On remarque qu'on peut choisir que tous les intervalles démarrent à une date différente. C'est ce que l'on supposera, car cela simplifie les preuves.*

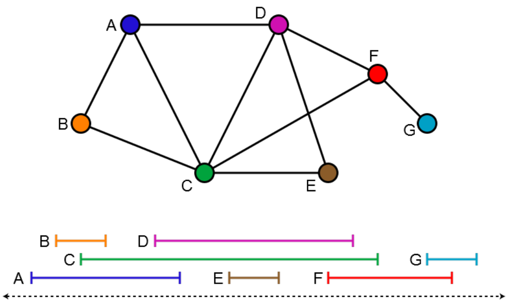

FIGURE 4 – Exemple de graphe d'intervalle

Intérêt des graphes d'intervalle

Les graphes d'intervalle sont tout indiqués pour représenter les problèmes d'ordonnancement. En effet, un problème d'ordonnancement se représente souvent comme un certain nombre de tâches, avec un temps de début, de fin, une durée, des chevauchements temporels de tâches. C'est exactement ce qu'est un graphe d'intervalle : un graphe associé à un ensemble d'intervalles qui peuvent s'intersecter.

De plus, ces graphes ont l'avantage de posséder un algorithme de reconnaissance en temps linéaire

Théorème (Perfection).
Tout graphe d'intervalle est parfait.

▷ **Preuve.** La preuve va être facile à faire car il y a une notion de précédance. On va pouvoir colorier de la gauche vers la droite.

Soit $G = (V, E, I)$ un graphe d'intervalle et $k = \omega(G)$ couleurs. On va puiser dans ces couleurs pour colorier les intervalles. Chaque intervalle $I_v \in I$ est noté $I_v = [v_1; v_2]$.

On commence par colorier l'intervalle le plus à gauche avec la première couleur. Supposons maintenant être au début de l'intervalle I_v et que pour l'on a réussi à colorier avec moins de k couleurs tout intervalle $I_u \in I$ tel que $u_1 \leq v_1$. Alors comme on a supposé que tous les intervalles avaient des bornes distinctes, tout intervalle contenant v_1 a débuté avant v_1. Le nombre n d'intervalles s'intersectant en v_1 est nécessairement $\leq k$ car k est le cardinal maximum d'une clique de G, ce qui on le rappelle correspondant au nombre maximal d'intervalles s'intersectant en un point de $\mathbb{R}$. Donc $n \leq k$. On a réussi à colorier les $n-1$ intervalles intersectant I_v en v_1 (avec donc au plus $n - 1 \leq k$ couleurs), il suffit donc de colorier l'intervalle I_v avec une des couleurs disponibles restante.

Par principe d'induction, on a réussi à montrer qu'un coloriage de taille $\leq k$ est possible.

Ainsi, comme la classe des graphes d'intervalle possède la propriété d'hérédité, tout graphe d'intervalle est parfait. ◁

Théorème (Théorème fort des graphes parfaits - graphes d'intervalle).
Si $G = (V, E)$ est un graphe d'intervalles associé à I, alors ni lui ni $\bar{G}$ ne contient de trou impair.

▷ **Preuve.**
- Il suffit de voir que si il y a un trou $(I_1, I_2, ..., I_n)$ $(4 \leq n)$, cela signifie que $\forall i, I_i \cap I_{i+1} \neq \emptyset$ et $I_n \cap I_1 \neq \emptyset$, de plus $I_n \cap I_{n+2} = \emptyset$ car c'est un trou. Or, cela signifie que les intervalles sont rangés par ordre croissant ou décroissant (facile à voir). D'où il y a impossibilité que $I_n \cap I_1 \neq \emptyset$.
- Dans le graphe $\bar{G}$, $uv \in \bar{E}$ ssi $I_u \cap I_v = \emptyset$. Donc si on a 3 intervalles disjoints, ils sont nécessairement reliés dans G. Dans tout trou de taille $4 \leq$, on a 4 intervalles qui se suivent dans le cycle et sont disjoints. Il y a donc une corde. c'est absurde.

◁

Calcul du nombre chromatique

Il est facile de trouver un algorithme polynomial pour le calcul du nombre chromatique d'un graphe d'intervalle. En effet, on dispose d'un algorithme linéaire de reconnaissance d'un tel graphe, qui calcule un ensemble d'intervalles associés au graphe de départ. Il suffit ensuite de trier ces intervalles par extrémité gauche croissante. On tient ensuite un compteur qui augmente de 1 dès qu'on arrive sur un nouvel intervalle, et diminue de 1 dès qu'on sort d'un autre. Il suffit ainsi de parcourir l'ensemble des intervalles, il y en a n. Le coût est donc $O(n.log(n))$ du fait du tri.

3.3 Graphes de comparabilité et de permutation

Nous allons ici introduire la classe des graphes de permutation et celle des graphes de comparabilité.

Définition (Graphe de comparabilité)

Soit $G = (V, E)$. On dit que G est un **g**raphe de comparabilité s'il existe une orientation de ses arêtes telle que la relation résultante sur son ensemble sommet est un ordre partiel P. Sans l'établir par une preuve, nous

utiliserons le théorème suivant, dont on peut trouver une preuve dans [1].

Théorème ([Admis] Perfection des graphes de comparabilité).
Si G est un graphe de comparabilité, alors G est parfait.

Ce qui nous permet de parler de la classe des graphes de permutation.

Définition (Graphe de permutation)

On dit que $G = (V, E)$ est un **graphe de permutation** si il existe σ une permutation de $\{1, ..., |V|\}$ telle que :

$$\forall u, v \in V, uv \in E \text{ ssi } (u < v) \text{ et } \sigma(u) > \sigma(v)$$

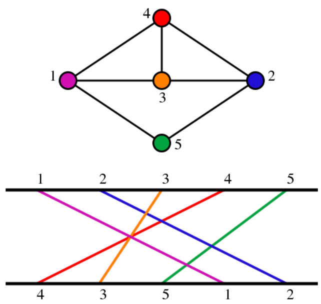

FIGURE 5 – Exemple de graphe de permutation : $\sigma \equiv \{4, 3, 5, 1, 2\}$

On dispose d'une caractérisation très intéressante de la classe des graphes de permutation :

Lemme. *Si on dispose d'un graphe de permutation $G = (\pi, V, E)$, alors (π^{rev}, V, E) est un graphe de permutation également, et de plus $(\pi^{rev}, V, E) = \bar{G}$.*

▷ **Preuve.** Si l'on renverse la permutation π, alors ◁

Théorème (Caractérisation).

Si G est un graphe de permutation alors G et $\bar{G}$ sont des graphes de comparabilité. (la condition est même suffisante)

▷ **Preuve.**

($\Rightarrow$) Comme $\bar{G}$ est un graphe de permutation ssi G en est un, il suffit de montrer que G est un graphe de comparabilité. Soit π sa permutation associée. Il suffit de prendre l'orientation $u \to v$ ssi $u < v$. Ainsi, on a un ordre partiel transitif, car si $u < v$ et $v < w$, alors $\pi(v) < \pi(u)$ et $\pi(w) < \pi(v)$ donc il y a une arête aussi de u vers w car $\pi(w) < \pi(u)$. Donc les graphes de permutation sont des graphes de comparabilité.

◁

On en déduit donc immédiatement que la classe des graphes de permutation est une sous-classe des graphes parfaits. On en déduit également une preuve de la conjecture faible des graphes parfaits pour cette classe particulière.

4 La conjecture faible des graphes parfaits

Dans cette partie, nous allons établir la preuve du théorème faible des graphes parfaits dans le cadre général, comme établi en 1972 par Laslo Lovasz dans [2].

Rappelons l'énoncé de ce théorème.

Théorème (Théorème faible des graphes parfaits).

Soit G un graphe parfait. Alors $\bar{G}$ le complémentaire de G est également parfait

Nous allons ici développer une preuve de ce théorème, sans détaille les preuves, car celles-ci sont clairement écrites dans [1].

Définition (Multiplication de sommets)

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Soit $x \in V$. Le graphe $G \circ x$ est obtenu à partir de G en ajoutant un nouveau sommet x' connecté à tous les voisins de x. Plus généralement, si $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{N}^n$ et $x_1, x_2, ..., x_n$ sont des sommets de G, alors $G \circ v$ est obtenu en substituant à chaque x_i un stable comprenant h_i sommets $((x_i^1, ..., x_i^{h_i}))$; alors x_i^s est relié à x_j^t ssi x_i et x_j sont reliés dans G.

On dit que ce graphe est obtenu à partir de G par **multiplication de sommets**.

Tout d'abord, définissons trois propriétés. Ces 3 propriétés vont être démontrées comme équivalentes. De ce théorème découlera aisément le théorème des graphes parfaits.

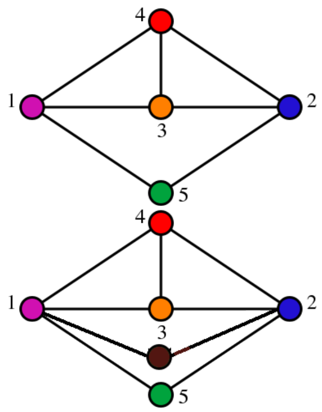

FIGURE 6 – Exemple de graphe et son multiplié en 5 (le sommet marron a été ajouté)

Définition (Propriétés)

Soit $G = (V, U)$ un graphe simple. On définit les propriétés suivantes :
(P_1) $\forall A \subset V$, $\omega(G_A) = \chi(G_A)$
(P_2) $\forall A \subset V$, $\alpha(G_A) = k(G_A)$
(P_3) $\forall A \subset V$, $|A| \leq \omega(G_A)\alpha(G_A)$

La preuve développée ici est essentiellement la même que dans [1]. Certains passages ont été allégés pour n'exprimer que les grandes lignes de la preuve.

Commençons avec un lemme prouvé dans [3].

Théorème ([ADMIS] Berge[1961]).
Soit H obtenu à partir de G par multiplication des sommets.
– *Si G satisfait (P_1), alors H satisfait (P_1).*
– *Si G satisfait (P_2), alors H satisfait (P_2).*

Le théorème suivant est très important et constitue la base du théorème des graphes parfaits, et a été découvert simultanément par Fulkerson et Lovász.

Théorème ([ADMIS] Fulkerson, Lovasz).
Soit G un graphe dont tous les sous-graphes induits satisfont P_2, et soi H obtenu à partir de G par multiplication des sommets. Si G satisfait (P_3), alors H satisfait (P_3).

Ce lemme établi (admis ici...) nous permet d'établir le résultat final, à savoir l'équivalence de (P_1), (P_2) et (P_3).

Théorème (Lovasz).
Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(P_1) $\omega(G_A) = \chi(G_A)$
(P_2) $\alpha(G_A) = k(G_A)$
(P_3) $|A| \leq \omega(G_A)\alpha(G_A)$

▷ **Preuve.** Soit G un graphe simple. Par induction forte, supposons que tous les graphes avec moins de noeuds que G vérifie le théorème.
$(P_1) \Rightarrow (P_3)$. Soit $A \subset V$. Alors, on peut colorier G_A avec seulement $\omega(G_A)$ couleurs, par définition. De plus, le nombre de noeuds d'une même couleur dans un tel coloriage est de au plus $\alpha(G_A)$. Donc,

$$|A| \leq \sum_{1 \leq i \leq \omega(G_A)} |A|_i$$

où i est une couleur d'un coloriage minimal, et $|A|_i$ le nombre de noeuds de couleur i dans ce coloriage. D'où

$$|A| \leq \sum_{1 \leq i \leq \omega(G_A)} |A|_i \leq \sum_{1 \leq i \leq \omega(G_A)} \alpha G_A = \omega(G_A)\alpha(G_A)$$

$(P_3) \Rightarrow (P_1)$. Soit G vérifiant (P_3). Supposons par induction que chaque sous graphe propre de G vérifie (P_1) et (P_3).
Si on disposait d'un stable S de G tel que $\omega(G_{v-s}) < \omega(G)$, on pourrait colorier G_{v-s} avec 1 couleur et le reste $\omega(G) - 1$ couleurs. Et ainsi on aurait $\omega(G) = \chi(G)$. Supposons que cette condition n'est pas vérifiée.
Alors pour tout stable S, supposons que G_{v-s} à une clique $K(S)$ de taille ωG.
Pour tout $x_i \in V$, h_i est défini comme le nombre de cliques $K(S)$ qui contiennent x_i.
On note $H = (X, F)$ le graphe obtenu à partir de G par multiplication des x_i par h_i.
On sait par le théorème admis précédent que $|X| \leq \omega(G)\alpha(H)$.
On établit facilement les égalités et inégalités suivantes :

$$|X| = \omega(G)|S|$$

$$\omega(H) \leq \omega(G)$$

$$\alpha(H) \leq |S| - 1$$

D'où on obtient

$$\omega(H)\alpha(H) \leq \omega(G)(|S| - 1)$$

Donc H ne vérifie pas (P_3), ce qui est absurde.

– La dernière équivalence résulte des raisonnements précédents.

◁

Le théorème des graphes parfaits est un corollaire immédiat du théorème précédent.

5 Conclusion

Nous avons passé en revue différentes classes de graphes parfaits. Bien qu'élémentaires, ces classes de graphes sont très importantes dans l'étude générale des graphes parfaits. Différentes propriétés ont été montrées sur ces classes particulière de manière élémentaire, et bien que des résultats généraux existent, ceux-ci restent aujourd'hui difficiles à appréhender.

Pour une description générale de la preuve de la conjecture forte des graphes parfaits, on pourra consulter l'article [5], qui décrit le cheminement intellectuel ayant mené à la découverte de la preuve tant attendue.

Références

[1] M.C. Golumbic *Algorithmic graph theory and perfect graphs*

[2] L. Lovasz *A characterization of perfect graphs*

[3] Berge C., *Farbung von Graphen deren samtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind (Zusammenfassung)* Wissenschaftliche Zeistschirft, 1961

[4] Wikipedia

[5] P. Seymour, *How the proof of the strong perfect graph conjecture was found*, la Gazette des Mathematiciens (2006).