Beaux ordres et graphes

Bastien Le Gloannec

21 avril 2009

1 Introduction

L'étude des beaux ordres n'est pas spécifique à la théorie des graphes. Ces ordres apparaissent en effet à de très nombreuses occasions et l'on peut les voir comme une forme affaiblie des bons ordres. En théorie des graphes, l'emblématique théorème des mineurs de Robertson et Seymour a notamment contribué à mettre en avant certaines notions comme les décompositions arborescentes et les beaux ordres. Ces derniers étaient toutefois étudiés depuis longtemps, y compris en théorie des graphes, ce que nous illustrerons notamment avec le théorème de Kruskal, qui a lui-même également publié un *survey* ayant pour objet la théorie des beaux préordres en 1970 ([3]). Nous présenterons dans ce rapport une approche tout d'abord générale, puis centrée sur la théorie des graphes, de la notion de bel ordre. Cela nous offrira l'occasion de nous intéresser finalement au théorème des mineurs, dont les enjeux et conséquences ont notamment été synthétisées dans un *survey* de Lovasz sur la théorie des mineurs ([5]), et de le mettre en relation avec la notion de bel ordre.

Enfin, il convient de faire remarquer au lecteur qu'un nombre non négligeable de preuves ou exemples de ce rapport sont issus d'exercices (non corrigés) de [1]. Il n'est par conséquent pas impossible que des erreurs ou imprécisions y figurent malencontreusement. Le lecteur est donc invité à rester vigilant.

2 Généralités

2.1 Définitions et caractérisation

Commençons par rappeler qu'étant donné un ensemble X quelconque, on appelle *préordre* sur X toute relation binaire réflexive et transitive sur X. Si X est muni d'un préordre, nous parlerons d'*anti-chaîne* pour désigner un sous-ensemble de X dans lequel tous les éléments distincts sont deux à deux incomparables. On appelle *beau préordre* tout préordre $\leqslant$ sur X tel que pour toute suite infinie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X, il existe deux indices $i < j$ tels que $x_i \leqslant x_j$. Le couple (x_i, x_j) est dans ce cas appelé *bonne paire* et toute suite contenant une bonne paire sera appelée *bonne suite*. À l'inverse, une suite qui n'est pas bonne sera dite *mauvaise*. Ainsi, tout préordre sur X est un beau préordre si et seulement si toute suite infinie de X est bonne. On donne le théorème de caractérisation des beaux préordres suivant.

Théorème 1 (Caractérisation des beaux préordres) *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\leqslant$ *est un beau préordre sur* X*.*

(ii) De toute suite infinie d'éléments de X*, on peut extraire une sous-suite croissante.*

(iii) X *ne contient ni anti-chaîne infinie, ni suite infinie strictement décroissante.*

Bien qu'il soit assez simple de donner une preuve directe de cette caractérisation, il existe une jolie démonstration passant par un théorème de Ramsey énoncé et démontré ci-après. Mais avant, définissons quelques notations utiles. Étant donné un ensemble X, nous noterons $\mathcal{P}_k(X)$ l'ensemble des parties finies de X à exactement k éléments. Pour $c \geqslant 1$, on appelle *c-coloration* de X toute fonction de X dans $\{0, \dots, c-1\}$, qui à chaque élément de X associe une couleur parmi c couleurs possibles. Si X est muni d'une c-coloration, on dira qu'un ensemble $Y \subseteq X$ est *monocromatique* si tous les éléments de Y ont la même couleur.

Théorème 2 (Ramsey) *Soit* X *un ensemble infini,* $k \geqslant 1$*,* $c \geqslant 1$ *et l'on suppose donnée une* c*-coloration de* $\mathcal{P}_k(X)$*. Alors il existe une partie infinie* $Y \subseteq X$ *telle que* $\mathcal{P}_k(Y)$ *soit monochromatique.*

Preuve (Ramsey) On procède par récurrence sur k à c fixé.

Pour $k = 1$, quel que soit X infini et une c-coloration de $\mathcal{P}_1(X)$ (singletons) que l'on assimilera à une coloration de X, il n'y a qu'un nombre fini de couleurs attribuées à un nombre infini d'éléments donc au moins une couleur est affectée à une infinité d'éléments.

Pour $k > 1$ on suppose que pour tout ensemble Z infini et toute c-coloration de $\mathcal{P}_{k-1}(X)$, il existe une partie infinie $Z' \subseteq Z$ telle que $\mathcal{P}_{k-1}(Z')$ soit monochromatique. Nous allons construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X ainsi qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante de parties infinies de X vérifiant les conditions suivantes (pour tout i) :

(i) $x_i \in X_i$

(ii) $X_{i+1} \subseteq X_i \backslash \{x_i\}$

(iii) L'ensemble $\{S \cup \{x_i\},\ S \in \mathcal{P}_{k-1}(X_i \backslash \{x_i\})\}$ (i.e. l'ensemble des parties à k éléments de X contenant x_i et dont tous les autres éléments sont pris dans X_i) est monochromatique, et l'on note c_i sa couleur.

On commence par poser $X_0 = X$ et $x_0 \in X$ quelconque.

Supposons construite la suite jusqu'au rang i. On considère l'ensemble $\mathcal{P}_{k-1}(X_i\backslash\{x_i\})$ et l'on définit une c-coloration sur cet ensemble ainsi : pour tout $S \in \mathcal{P}_{k-1}(X_i\backslash\{x_i\})$, on pose la couleur de S comme étant la couleur de $S \cup \{x_i\}$ (ensemble à k éléments car $x_i \notin X_i$) dans la c-coloration de $\mathcal{P}_k(X)$. Par hypothèse de récurrence, il existe $X_{i+1} \subseteq X_i\backslash\{x_i\}$ ((ii) est vérifiée) tel que $\mathcal{P}_{k-1}(X_{i+1})$ soit monochromatique ((iii) est vérifiée) et l'on pose c_i la couleur correspondante[1]. On choisit alors $x_{i+1} \in X_{i+1}$ quelconque ((i) est vérifiée).

La suite étant maintenant construite, on remarque que la suite des couleurs associées ne prend qu'un nombre fini de valeurs, il en existe donc une extraction φ telle que le suite infinie $(c_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ soit constante, notons C sa valeur. Il ne reste plus qu'à poser $Y = \{x_{\varphi(n)},\, n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$. Y vérifie (on a tout fait pour) la propriété attendue : $\mathcal{P}_k(Y)$ est monochromatique. En effet, quel que soit $S \in \mathcal{P}_k(Y)$, S est constitué d'éléments de la suite $(x_{\varphi(n)})$ et posons x_i l'élément de plus petit indice de S. Par construction, $S\backslash\{x_i\} \in \mathcal{P}_{k-1}(X_{i+1})$, et donc, par ($iii$), S est de couleur $c_i = C$ (car x_i est issu de le suite extraite $(x_{\varphi(n)})$) et ce pour tout S, donc $\mathcal{P}_k(Y)$ est monochromatique. D'où le résultat. □

On peut maintenant démontrer le théorème de caractérisation qui nous intéresse.

Preuve (Caractérisation) Remarquons tout d'abord que les implications (ii) $\Rightarrow$ (i) et (i) $\Rightarrow$ (iii) sont évidentes. Pour la première, si pour toute suite il existe une sous-suite croissante, alors il existe une infinité de bonnes paires et *a fortiori* la suite est bonne. Pour la seconde, toute suite d'éléments distincts d'une anti-chaîne infinie, ainsi que toute suite infinie strictement décroissante est une mauvaise suite, ce qui n'existe pas par définition même d'un beau préordre.

Considérons maintenant l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i). Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. Considérons le graphe infini dont les sommets sont les indices de la suite et les arêtes les couples (i, j) pour $i < j$. Pour tous $i < j$, on colorie l'arête (i, j) de la façon suivante :

- si x_i et x_j sont incomparables, on colorie l'arête (i, j) en gris.
- sinon, si $x_i \leqslant x_j$, *i.e.* (x_i, x_j) est une bonne paire, on colorie l'arête (i, j) en vert.
- sinon, on a $x_i > x_j$ et l'on colorie l'arête (i, j) en rouge.

Par théorème de Ramsey (pour $k = 2$ et $c = 3$ sur les paires d'éléments de n, la paire $\{i, j\}$ avec $i < j$ se voyant attribuée la couleur de l'arête (i, j) de notre graphe), il existe un sous-graphe infini monochrome. S'il était gris alors on aurait formé une anti-chaîne infinie. S'il était rouge, on aurait trouvé une sous-suite infinie strictement décroissante. Il ne peut donc qu'être vert : c'est une sous-suite infinie croissante et donc bonne *a fortiori*. On notera au passage que par cette même méthode on peut extraire de toute suite de X une sous-suite croissante, *i.e.* l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est démontrée du même coup. □

Dans la suite, nous appellerons *bel ordre* tout beau préordre qui est en plus un ordre (*i.e.* anti-symétrique).

2.2 Exemples et premières propriétés

Nous allons exposer ici quelques exemples de beaux préordres et beaux ordres ainsi que quelques propriétés simples, naturelles et utiles. Voici tout d'abord quelques remarques immédiates sur les beaux préordres.

Proposition 1 (Beau préordre induit) *Soit $\leqslant$ est un beau préordre (resp. bel ordre) sur X et $Y \subseteq X$, le préordre (resp. ordre) induit par $\leqslant$ sur Y est un beau préordre (resp. bel ordre).*

> **Preuve** Tout mauvaise suite sur Y muni de l'ordre induit serait aussi une mauvaise suite sur X, or il n'en existe pas par hypothèse. □

Proposition 2 (Ordres et sous-ordres) *Soient $\leqslant_1$ et $\leqslant_2$ sont deux préordres sur X vérifiant $\leqslant_1 \subseteq \leqslant_2$, i.e. $\forall x, y \in X$, $x \leqslant_1 y \Rightarrow x \leqslant_2 y$. Alors on a $\leqslant_1$ beau préordre $\Rightarrow \leqslant_2$ beau préordre mais la réciproque est fausse.*

> **Preuve** Toute bonne suite pour $\leqslant_1$ est encore bonne pour $\leqslant_2$. Toute suite est donc bonne pour $\leqslant_2$ qui est donc un beau préordre.
>
> Pour la réciproque, comme nous le verrons, la relation de mineur est un bel ordre sur les graphes finis mais pas la relation de mineur topologique. □

Exemple 1 Les ordres sur $\mathbb{N}$.

1. L'ordre usuel sur $\mathbb{N}$ est un bel ordre (car il est total et qu'il n'existe pas de chaîne infinie strictement décroissante).
2. L'ordre produit usuel (composante par composante) sur $\mathbb{N}^k$ est aussi un bel ordre. En effet, de toute suite de $\mathbb{N}^k$, on peut extraire une sous-suite croissante ainsi : on extrait une sous-suite croissante (pour l'ordre usuel, bon ordre sur $\mathbb{N}$) suivant la première composante ; de cette suite on extrait une sous-suite croissante suivant la deuxième composante, et on itère ainsi sur toutes les composantes... On arrive finalement à une suite de $\mathbb{N}^k$ simultanément croissante sur toutes les composantes, *i.e.* croissante pour l'ordre produit.

Il est intéressant de constater qu'à travers de l'exemple de $\mathbb{N}^k$, nous avons donné une méthode de preuve qui assure immédiatement le résultat suivant.

Proposition 3 (Bel ordre produit) *Pour tout $n \geqslant 1$ et tous ensembles $X_1, \ldots, X_n$ munis respectivement de beaux préordres (resp. beaux ordres) $\leqslant_1, \ldots, \leqslant_n$, le préordre (resp. l'ordre) produit sur $X = \prod_{k=1}^{n} X_k$, définit par $(x_1, \ldots, x_n) \leqslant (y_1, \ldots, y_n)$ si et seulement si $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $x_k \leqslant y_k$, est un beau préordre (resp. bel ordre) sur X.*

La preuve est immédiate par la méthode que nous avons proposé pour l'exemple 1.

Dans la même veine, ce résultat sur le produit cartésien est également trivialement valable pour l'union disjointe.

Proposition 4 (Bel ordre sur l'union) *Pour tout $n \geqslant 1$ et tous ensembles $X_1, \ldots, X_n$ disjoints munis respectivement de beaux préordres (resp. beaux ordres) $\leqslant_1, \ldots, \leqslant_n$, le préordre (resp. l'ordre) union sur $X = \bigcup_{k=1}^{n} X_k$, défini par $\leqslant = \bigcup_{k=1}^{n} \leqslant_k$, est un beau préordre (resp. bel ordre) sur X.*

Exemple 2 Bons ordres et beaux ordres.

Une question brûle certainement les lèvres du lecteur avisé qui a certainement déjà entendu parler de bons ordres, de relations bien fondées et se demande s'il existe un lien avec ces beaux ordres qu'il vient de découvrir. Une *relation bien fondée* sur un ensemble X est une relation binaire sur X^2 telle que tout sous-ensemble non vide de X admette un élément "minimal" (au sens d'un élément sans antécédent par la relation ; en particulier, il n'y a pas nécessairement unicité de cet élément). Modulo l'axiome du choix dépendant, cette définition est équivalente à la non existence de suite infinie décroissante (on dit aussi que la relation est nœuthérienne en théorie de la réécriture). Ainsi donc un préordre est un beau préordre si et seulement si l'ordre strict associé est bien fondé et qu'il n'existe pas d'anti-chaîne infinie.

Qu'en est-il des bons ordres ? Un *bon ordre* sur X est une ordre sur X tel que tout sous-ensemble non vide de X admette un plus petit élément (au sens d'un élément inférieur ou égal à tous les autres). En particulier un tel ordre est total. Là encore, modulo l'axiome du choix dépendant, cette définition est en fait équivalente à dire que l'ordre est total et la relation d'ordre strict associée est bien fondée.

Un bon ordre est donc un bel ordre : il n'existe par d'anti-chaîne par totalité et la relation stricte est bien fondée. Ainsi donc tout ensemble bien ordonné est également muni d'un bel ordre. C'était par exemple le cas de $\mathbb{N}$ pour l'ordre usuel, mais c'est par exemple aussi le cas des $\mathbb{N}^k$ pour l'ordre lexicographique.

Quelques contre-exemples

- L'ordre usuel sur $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ n'est pas un bel ordre (suites infinies strictement décroissantes).
- Les ordres produit et lexicographique sur $\mathbb{Z}^k$, $\mathbb{Q}^k$, $\mathbb{R}^k$ (suites infinies strictement décroissantes, ou anti-chaînes infinies dans le cas de l'ordre produit).
- L'inclusion $\subseteq$ sur un ensemble infini : les singletons forment une anti-chaîne infinie.

3 Quelques résultats

3.1 Lemme de Higman

Un résultat remarquable est que l'on peut étendre tout beau préordre sur X à l'ensemble $X^{<\omega}$ des parties finies de X. On définit en effet la relation $\leqslant$ sur $X^{<\omega}$ ainsi : pour tous $A, B \in X^{<\omega}$, $A \leqslant B$ si et seulement s'il existe une injection f de A dans B telle que pour tout $a \in A$, $a \leqslant f(a)$. On vérifie aisément que cette relation est un préordre sur $X^{<\omega}$:

- Réflexivité : il suffit de prendre $f = \mathrm{id}_A$.
- Transitivité : si $A \leqslant B$ par une injection f et $B \leqslant C$ par une injection g, alors $\forall a \in A$, $f(a) \in B$ donc $g(f(a)) \geqslant f(a) \geqslant a$ et $g \circ f$ composée d'injections reste injective.

Dans le cas où l'on dispose initialement d'un bel ordre sur X, on obtient également un bel ordre sur $X^{<\omega}$. En effet, on hérite de l'anti-symétrie : si $A \leqslant B$ via f et $B \leqslant A$ via g, alors $\forall a \in A$, $g(f(a)) \geqslant a$. $g \circ f$ est une bijection de A dans A et cette inégalité exprime le fait que tout élément de a doive être envoyé sur un élément depuis lequel il est accessible dans le DAG fini (car A fini) de la relation d'ordre (partielle) $\geqslant$ sur A. Ainsi, les sources de ce DAG (éléments maximaux de A) sont nécessairement envoyées sur elles-mêmes. Comme l'application est injective, on ne peut plus réutiliser ces sources pour continuer à construire $g \circ f$, on peut donc les retirer du graphe, faisant ainsi apparaître de nouvelles sources à leur tour envoyées sur elles-mêmes, et l'on itère... Finalement, $\forall a \in A$, $g(f(a)) = a$. Mais $a = g(f(a)) \geqslant f(a) \geqslant a$ (par $B \leqslant A$ puis $A \leqslant B$) donc $f(a) = a$ et donc $A = B$.

Lemme 1 (Higman – version ensembles) *Soit X un ensemble muni d'un beau préordre $\leqslant$ alors le préordre induit par $\leqslant$ sur $X^{<\omega}$ est un beau préordre.*

Preuve Par l'absurde, supposons qu'il existe des mauvaises suites sur $X^{<\omega}$. On va construire une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $X^{<\omega}$ par récurrence. Supposons construite la suite jusqu'au rang i et supposons qu'elle vérifie l'hypothèse suivante : $X_0, \ldots, X_i$ est le début d'au moins une mauvaise suite sur $X^{<\omega}$. On alors choisit $X_{i+1} \in X^{<\omega}$ de cardinal minimal tel que $X_0, \ldots, X_i, X_{i+1}$ soit le début d'une mauvaise suite. La suite ainsi formée est bien sûr une mauvaise suite (sinon il existe $i < j$ tels que $X_i \leqslant X_j$ et donc $X_0, \ldots, X_i, \ldots, X_j$ ne saurait être le début d'une mauvaise suite). *A fortiori*, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \neq \varnothing$ (en remarquant que $\forall A \in X^{<\omega}$, $\varnothing \leqslant A$). Pour tout n, on peut donc choisir $x_n \in X_n$ quelconque et poser $Y_n = X_n \backslash \{a_n\}$. Par caractérisation (iii) dans X muni d'un bel ordre, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ croissante. Par minimalité du cardinal dans le choix $A_{\varphi(0)}$, la suite

$$X_0, \ldots, X_{\varphi(0)-1}, Y_{\varphi(0)}, Y_{\varphi(1)}, Y_{\varphi(2)}, \ldots$$

est bonne et contient donc une bonne paire. Une telle paire ne peut être ni de la forme (X_i, X_j) (puisque $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est mauvaise) ni (X_i, Y_j) puisque $X_j > Y_j$ (et on aurait $X_i \leqslant Y_j < X_j$). Une bonne paire est donc de la forme (Y_i, Y_j) et donc $Y_i \leqslant Y_j$ via une injection f de Y_i vers Y_j. On prolonge alors f en f' de X_i vers X_j en posant $f'(x_i) = x_j$ (on a bien $x_j \geqslant x_i$ car x_i et x_j sont issus de la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$) on a construit une injection assurant que $X_i \leqslant X_j$, ce qui est absurde car la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est mauvaise. $\square$

La réciproque du lemme de Higman est également vraie : il suffit de considérer les singletons.

Il existe également une version mots du lemme de Higman que nous allons maintenant considérer. Si Σ un alphabet muni d'un beau préordre $\leqslant$, on peut étendre ce préordre à Σ^* en posant, pour tous mots $u = u_1 \dots u_p$ et $v = v_1 \dots v_q$, $u \leqslant v$ si et seulement si il existe une injection f de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, q\}$ telle que pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, $u_i \leqslant v_{f(i)}$.

Lemme 2 (Higman – version mots) *Si Σ un alphabet muni d'un beau préordre $\leqslant$, alors le préordre induit par $\leqslant$ sur Σ^* est beau préordre.*

Ce résultat pourrait se démontrer par une preuve totalement analogue à la précédente. Nous allons plutôt procéder en réutilisant le résultat précédent. Nous allons même montrer un peu plus : l'équivalence des deux versions du lemme de Higman.

Preuve (équivalence des versions ensembles/mots) Il suffit de remarquer que pour toute permutation σ de $\{1, \dots, p\}$ et toute permutation σ' de $\{1, \dots, q\}$, si l'on pose $u' = u_{\sigma(1)} \dots u_{\sigma(p)}$ et $v' = v_{\sigma'(1)} \dots v_{\sigma'(q)}$ alors si l'on a $u \leqslant v$ via une injection f, on a également $u' \leqslant v'$ via l'injection $\sigma'^{-1} \circ f \circ \sigma$. En d'autres termes, l'ordre des lettres n'a aucune importance, on peut les voir comme des ensembles finis de lettres, *i.e.* des éléments de $\Sigma^{*<\omega}$. L'équivalence des énoncés est alors immédiate. $\square$

Il est à noter que l'ordre des lettres n'étant pas important, pour tout mot u et toute permutation u' de u, $u' \neq u$, on aura tout de même $u \leqslant u'$ et $u' \leqslant u$ sans avoir $u = u'$: l'anti-symétrie n'est pas vérifiée, on ne peut avoir qu'un préordre ici et pas d'ordre.

Enfin, il existe en combinatoire sur les mots une autre version usuelle du lemme de Higman. On utilise pour cette dernière l'ordre suivant : $u \leqslant v$ si et seulement si u est un sous-mot de v (au sens d'une suite extraite, aux lettres non nécessairement consécutives dans v). On vérifie aisément que cette relation sur les mots est cette fois un ordre et pas seulement un préordre.

Lemme 3 (Higman – version sous-mots) *La relation de sous-mot $\leqslant$ est un bel ordre sur Σ^*.*

Cela revient à prendre l'égalité comme relation et à imposer de plus à l'injection d'être croissante dans la version mots du lemme de Higman. On peut en fait montrer que le lemme de Higman est encore vrai si l'on impose à l'injection d'être croissante. Il implique alors directement la version sous-mots (que l'on pourrait aussi démontrer directement en adaptant la preuve du théorème de Higman en une preuve plus simple par certains aspects, puisque l'on ne dispose plus d'un beau préordre sur Σ, mais en assurant la croissance de l'injection).

3.2 Théorème de Kruskal

Dans cette section, nous allons étudier le théorème de Kruskal sur la classe des arbres finis. Avant toute chose, une remarque préliminaire et importante pour toute la suite s'impose : les relations de mineur (notée $\preccurlyeq$) et mineur topologique sont des relations d'ordre (partielles) sur la classe des graphes finis. Ce fait est très simple à vérifier.

Théorème 3 (Kruskal, [2]) *La relation de mineur topologique est un bel ordre sur les arbres finis.*

Il est à noter que ce résultat ne restera cependant pas vrai sur la classe des graphes finis quelconques toute entière comme nous allons le voir dans la section suivante.

Afin de démontrer ce théorème, nous allons renforcer la notion de mineur topologique en définissant la notion de mineur topologique enraciné sur la classe des arbres. Rappelons si nécessaire les définitions de la notions de mineur topologique. On dit qu'un graphe H est une subdivision d'un graphe G si H peut être obtenu à partir de G en "subdivisant" des arêtes, *i.e.* en remplaçant une arête de G par une chaîne de longueur arbitraire. On dit alors qu'un graphe G est un *mineur topologique* d'un graphe H s'il existe un sous-graphe H' de H tel que H' soit une subdivision de G. En d'autres termes, G est obtenu à partir de H en supprimant des arêtes, des sommets, et en contractant des chaînes. Étant donnés deux arbres enracinés T et T', de racines respectives r et r' (rappelons que l'enracinement induit un ordre naturel sur l'arbre), on dira que $T \leqslant T'$ si et seulement s'il existe une isomorphisme φ d'une subdivision T_0 de T (pour la même racine, ce qui induit un ordre sur T_0) vers un sous-arbre T_1 de T' qui préserve l'ordre, *i.e.* telle que si $x < y$ dans T alors $\varphi(x) < \varphi(y)$ dans $T_1 \subseteq T'$. Il est aisé de vérifier que l'on définit bien un préordre sur les arbres enracinés ainsi. Essentiellement, la relation définie est en tout points similaire à la notion de mineur topologique, si ce n'est qu'elle préserve l'orientation pour des arbres enracinés. La Fig. 1 illustre cette notion.

La méthode de preuve qui suit est totalement similaire à celle mise en œuvre pour démontrer le lemme de Higman. D'ailleurs, nous n'hésiterons pas à renvoyer par endroit le lecteur à cette dernière dans la preuve qui suit.

Preuve (Kruskal, méthode de Nash-Williams, [6]) Nous allons démontrer que la relation de mineur topologique enraciné est un beau préordre sur les arbres finis enracinés, ce qui implique naturellement ce que l'on veut démontrer du fait de l'équivalence suivante : T' est un mineur topologique de T si et seulement si il existe un enracinement de T et un enracinement de T' tels que T' soit un mineur topologique enraciné de T pour ces enracinements.

Par l'absurde (*i.e.* on suppose l'existence de mauvaises suites), on procède comme dans la preuve du lemme de Higman (s'y reporter si nécessaire) en construisant une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'arbres enracinés (de racines respectives les éléments de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$) en choisissant à chaque étape i un plus petit arbre (en nombre de sommets) T_i de racine r_i

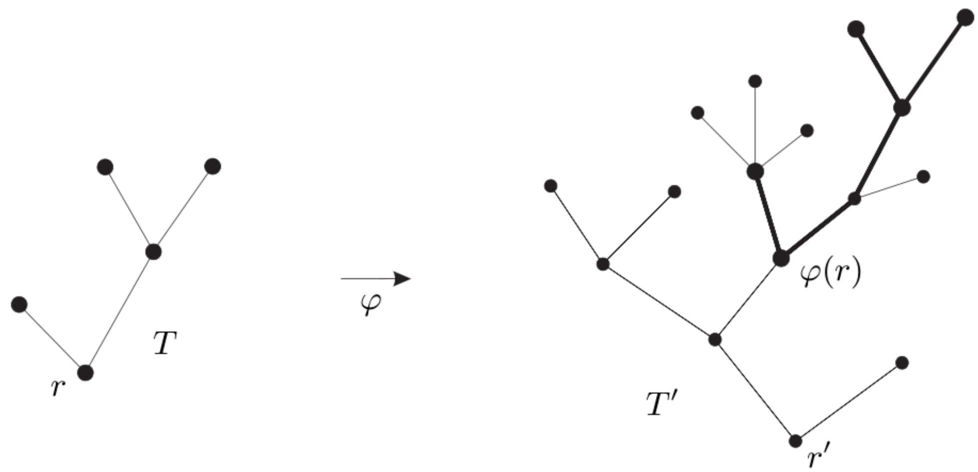


FIG. 1 – Mineur topologique enraciné, [1]

tel que $T_0, \dots, T_i$ soit le début d'une mauvaise suite. Là encore, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une mauvaise suite. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose S_i l'ensemble des composantes connexes du graphe T_i dont on a retiré la racine r_i, chacune de ces composantes étant enracinée en le voisin de r_i dans la composante, de sorte que l'ordre induit par l'enracinement reste exactement le même que dans T_i. On pose $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$.

Montrons alors que l'on a un beau préordre sur S. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de S en prenant, pour tout n, $t_n \in S_{i_n}$. Soit m tel que i_m soit minimal parmi les i_n. Dès lors, la suite

$$T_0, \dots, T_{i_m-1}, t_m, t_{m+1}, t_{m+2}, \dots$$

est bonne (car $t_m \in S_{i_m}$ est une composante connexe issue de la suppression de r_{i_m} dans T_{i_m} et a au moins un sommet de moins que T_{i_m}) et contient donc une bonne paire qui ne peut être que de la forme (t_i, t_j) avec $i < j$. En effet, comme (T_n) est mauvaise, cela ne peut être (T_i, T_j) et si c'était (T_i, t_j), alors $T_i \leqslant t_j < T_{i_j}$ avec $i \leqslant i_m - 1$ et par choix de m on a $i_j \geqslant i_m$ donc $i < i_j$ ce qui contredirait le fait que (T_n) soit mauvaise. On a donc trouvé en (t_i, t_j) une bonne paire dans la suite (t_n) (*a priori* quelconque) de S qui est donc bien muni d'un beau préordre.

Puisque chaque S_n est une partie finie de S muni d'un beau préordre, alors par lemme de Higman la suite (S_n) est bonne et admet donc une bonne paire (S_i, S_j), $i < j$, et donc $S_i \leqslant S_j$ via une injection f de S_i dans S_j vérifiant, pour tout $t \in S_i$, $t \leqslant f(t)$ via un certain isomorphisme φ_t. On pose φ le morphisme réalisant l'union de sous ces φ_t et on le prolonge à T_i en posant $\varphi(r_i) = r_j$. L'ordre est ainsi préservé (car on avait déjà remarqué que l'ordre restait inchangé dans les composantes connexes lorsque l'on effectuait la suppression de r_i) et φ définit naturellement un isomorphisme assurant $T_i \leqslant T_j$: on a trouvé une bonne paire dans la mauvaise séquence (T_n), d'où la contradiction. □

3.3 Contre-exemples

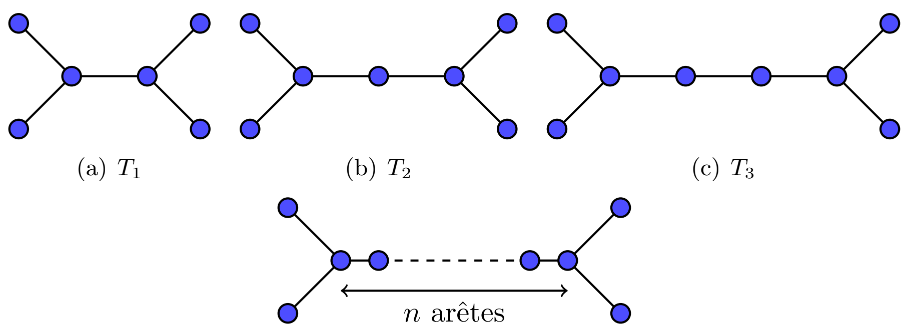
On considère dans cette section deux contre-exemples instructifs. Le premier montre que le théorème de Kruskal ne tient plus si l'on restreint la relation à celle de sous-graphe connexe, et le second que le théorème des mineurs ne reste pas non plus vrai si l'on se limite à la relation de mineur topologique.

Contre-exemple 1 La relation de sous-graphe connexe n'est pas un bel ordre pour la classe des arbres finis.

Notons que les propriétés de réflexivité, de transitivité et d'anti-symétrie sont trivialement vérifiées pour cette relation.

Remarquons également qu'un graphe n'a qu'un nombre fini de sous-graphes connexes (et ils sont tous de taille inférieure ou égale), par conséquent il est inutile d'espérer obtenir une suite strictement décroissante ici.

Nous allons maintenant exhiber une anti-chaîne infinie de d'arbres. La Fig. 2 présente une telle famille d'arbres deux à deux incomparables pour la relation de sous graphe connexe.



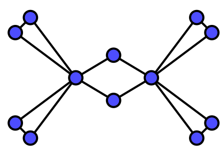
(a) T_1 (b) T_2 (c) T_3

(d) T_n

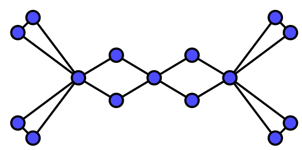
Fig. 2 – Anti-chaîne infinie pour la relation de sous-graphe connexe sur les arbres finis

Contre exemple 2 La relation de mineur topologique n'est pas un bel ordre sur la classe des graphes finis.

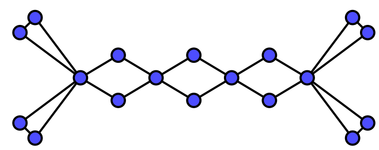
Rappelons que ce qui était vrai sur la classe des arbres finis ne l'est donc plus lorsque l'on passe aux graphes quelconques. Mais cela sera par contre vrai sur la classe des graphes fini en élargissant la relation aux mineurs. Là encore, comme dans l'exemple précédent, il est inutile d'espérer obtenir une suite infinie strictement décroissante, un graphe n'ayant qu'un nombre fini de mineurs topologiques. On cherche donc une anti-chaîne infinie, ce qui est moins évident à obtenir que dans le cas précédent. L'idée est que pour montrer qu'un graphe H est un mineur topologique d'un graphe G, on peut exhiber un isomorphisme de graphe d'une subdivision de H vers une sous-graphe de G. Il n'est pas difficile de remarquer que ce morphisme envoie nécessairement tout sommet de H vers un sommet de degré supérieur ou égal dans G. Organiser judicieusement les degrés est un moyen de forcer tel sommet à être envoyé sur tel autre sommet, en agençant les sommets entre-eux de façon à ce qu'il ne soit pas possible qu'un graphe soit le mineur d'un autre (ici il y a 2 sommets de degrés 6 par graphe qui sont forcément envoyés les uns sur les autres, la chaine les séparant n'étant pas bien contractable) on construit une anti-chaîne infinie décrite sur la Fig. 3, et basée sur une adaptation naturelle de l'exemple précédent.



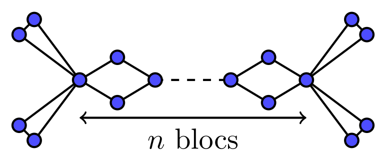
(a) T_1



(b) T_2



(c) T_3



(d) T_n

Fig. 3 – Anti-chaîne infinie pour la relation de mineur topologique sur les graphes quelconques

4 Autour du théorème des mineurs

Dans cette section, nous allons nous intéresser au fameux théorème des mineurs et voir en quoi il est fondamentalement lié à la notion de bel ordre. Mais avant, précisons que nous dirons dans tout ce qui suit qu'une classe de graphes C est *fermée par mineurs* si et seulement si tout mineur d'un graphe de C est encore dans C, *i.e.* la classe est stable par passage à un mineur.

4.1 Approche et énoncé

Un résultat bien connu en théorie des graphes est que l'on peut caractériser la classe des graphes planaires comme l'ensemble des graphes n'admettant ni K_5 ni $K_{3,3}$ comme mineur. Ce résultat de 1930 est connu sous le nom de théorème de Kuratowski.

Théorème 4 (Kuratowski, [4]) *Un graphe est planaire si et seulement s'il n'admet ni K_5 ni $K_{3,3}$ comme mineur.*

Ce résultat a particulièrement marqué les théoriciens des graphes qui en ont longtemps cherché des généralisations. Il est en effet très commode de disposer d'une telle caractérisation par une famille finie de mineurs interdits : d'une part on peut montrer la non appartenance à la classe d'un graphe en donnant pour certificat une séquence de transformations conduisant au mineur interdit et d'autre part l'on peut tester l'appartenance à la classe en temps polynomial. Malheureusement, encore auourd'hui bien peu de résultats explicites de ce genre sont connus et le théorème de Kuratowski reste de loin le plus emblématique. Toutefois, Wagner aurait conjecturé dès 1970 que toute classe de graphes fermée par mineurs (*i.e.* telle que tout mineur d'un graphe de la classe est encore dedans) pouvait être caractérisée par une famille finie de mineurs interdits, à la manière du théorème de Kuratowski. Ce résultat a été finalement été démontré par Robertson et Seymour à travers une série de vingts articles publiés entre 1983 ([8]) et 2004 ([10]).

Théorème 5 (Robertson & Seymour, [10]) *Toute classe de graphes fermée par mineurs peut être caractérisée par une famille finie de mineurs interdits.*

Pour bien comprendre les enjeux de ce théorème, il est a noter que c'est bel et bien l'aspect fini de la famille de mineurs qui en est l'élément important. Ce même résultat pour une famille infinie est une propriété basique et bien connue énoncé ci-dessous. Introduisons tout d'abord une notation utile. Pour K un ensemble de graphes, on définit la classe $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(K)$ comme l'ensemble des graphes n'admettant aucun des éléments de K comme mineur, *i.e.* la classe de graphes caractérisée par un ensemble de mineurs interdits K. On rappelle que l'on note $\preccurlyeq$ la relation de mineur (et $\prec$ la relation stricte associée). Inversement, pour tout classe C, on appelle *ensemble de Kuratowski* de C l'ensemble

$$K_C = \{G \text{ graphe}/G \notin C \text{ et } \forall H \prec G,\, H \in C\}$$

i.e. l'ensemble des éléments minimaux pour $\preccurlyeq$ dans le complémentaire $\overline{C}$ de C. Par construction même, les éléments de K_C forment une anti-chaîne pour $\preccurlyeq$.

Proposition 5 *Une classe de graphes est fermée par mineurs si et seulement si on peut la caractériser par une famille (éventuellement infinie) de mineurs interdits, auquel cas K_C est une famille qui convient et c'est la famille minimale pour l'inclusion unique à convenir.*

Preuve Si C est une classe de graphes fermée par mineurs, il suffit de remarquer que $C = \mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(\overline{C})$ (pour $\overline{C}$ le complémentaire de la classe). Par ailleurs, K_C est incluse dans toute autre famille K à convenir car si un élément G de K_C n'y étais pas, alors il serait interdit (car il doit l'être) en faisant intervenir un élément de K qui serait un mineur strict de G. Or par définition même de K_C, tout mineur strict de ses éléments est dans C. D'où la contradiction et donc $K_C \subseteq K$. Par ailleurs K_C convient également car s'il existait un élément G de $\overline{C}$ non interdit par K_C, alors aucun de ses mineurs ne serait dans K_C. Imaginons l'arbre des mineurs de G sur lequel G est la racine, suivent tous les mineurs stricts directs (issus d'une opération), puis les mineurs stricts directs des mineurs,etc (on autorise les répétitions de sommets correspondant à un même graphe). Toutes les feuilles de l'arbre correspondent au graphe à un sommet qui appartient évidemment à tout classe de graphes fermée par mineurs (supposée implicitement non vide). Mais alors il existe dans le graphe des sommets appartenant à C (ainsi qu'au moins la racine appartenant à $\overline{C}$). Par stabilité par mineurs de C, ces sommets ont tous leurs descendants dans C. Considérons un sommet S de profondeur maximale dans l'arbre parmi ceux correspondant à un graphe de $\overline{C}$. Tous ses descendants sont donc dans C. Ce sommet est donc dans K_C et est un mineur de G. D'où la contradiction.

Réciproquement, tout $\text{Forb}_{\preccurlyeq}(K)$ est trivialement fermé par mineurs. □

4.2 Mineurs et beaux ordres

Le théorème des mineurs a une autre formulation mettant plus en valeur ce qui nous préoccupe, à savoir les beaux ordres.

Théorème 6 (des mineurs – deuxième version) *La relation de mineur est un bel ordre sur la classe des graphes finis.*

Il est intéressant de montrer l'équivalence des deux énoncés de ce théorème.

Preuve (équivalence des énoncés) Comme nous l'avons déjà vu, si une classe C est fermée par mineurs, alors $C = \text{Forb}_{\preccurlyeq}(K_C)$ où K_C est une anti-chaîne pour $\preccurlyeq$. Mais alors, si K_C n'est pas fini, alors on a trouvé une anti-chaîne infinie et donc $\preccurlyeq$ ne saurait être un bel ordre sur la classe des graphes finis. On a montré par contraposée que la deuxième version implique la première (qui est clairement équivalente à la finitude de K_C en utilisant la proposition 5).

Réciproquement, supposons un instant par l'absurde qu'il existe une anti-chaîne infinie K. La classe $C = \text{Forb}_{\preccurlyeq}(K)$ est close par mineurs et admet donc un ensemble de Kuratowski K_C fini tel que $C = \text{Forb}_{\preccurlyeq}(K_C)$. Mais alors, K_C est un ensemble de mineurs qui interdit l'ensemble des éléments K. Et surtout, par proposition 5, $K_C \subseteq K$. Il y a donc dans K infini une infinité d'éléments à ne pas être dans K_C et à pourtant admettre pour mineur un élément de K_C et donc de K, qui ne saurait donc être une anti-chaîne. D'où le résultat. □

4.3 Aspects algorithmiques

Le théorème suivant constitue une conséquence algorithmique non négligeable du théorème des mineurs.

Théorème 7 *L'appartenance d'un graphe à une classe de fermées par mineurs peut toujours être testée en temps polynomial.*

Ce résultat très fort et général repose sur une méthode algorithmique en $O(n^3)$ (Seymour & Robertson, [9]). Toutefois la constante est énorme et dépend fortement de la liste des mineurs exclus. Nous n'entrerons cependant pas dans les détails algorithmiques ici.

4.4 Une conjecture plus forte

Dans les années 1980, Seymour a conjecturé l'énoncé suivant.

Conjecture 1 (Seymour) *Tout graphe infini dénombrable est un mineur strict de lui-même.*

Précisons le sens à donner à la notion de mineur strict ici : G infini est un mineur strict de lui même s'il existe une séquence de transformations, parmi les suppressions de sommets, d'arêtes et les contractions d'arêtes, non vide et finie telle que le graphe obtenu soit isomorphe à G.

Cela peut sembler étonnant de prime abord, puisque l'on s'intéresse ici à des graphes infinis dénombrables (un contre-exemple indénombrable a été découvert en 1990 par Oporowski, [7]), mais ce résultat impliquerait le théorème des mineurs.

Preuve (le théorème des mineurs est un corollaire de la conjecture)

Pour la classe des graphes connexes Par l'absurde, supposons la conjecture vérifiée mais pas le théorème des mineurs. Comme nous l'avons déjà vu, il n'y a jamais de suite infinie strictement décroissante pour la relation $\preccurlyeq$. Par conséquent, c'est qu'il existe une anti-chaîne infinie de graphes finis $\{G_0, G_1, \ldots\}$ (dénombrable car l'ensemble des graphes finis est lui-même dénombrable). Posons alors $G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_i$ (sans créer d'arêtes entre-eux). G est un mineur strict de lui-même donc il existe une séquence non vide de transformations qui produisent finalement un graphe G' isomorphe à G. Comme il y a au moins une transformation, au moins un graphe G_i est modifié. Mais G_i ne peut avoir été supprimé complètement. En effet, s'il l'avait été, alors comme il est présent dans G', et qu'il est connexe, c'est qu'il a été obtenu à partir d'un autre graphe (et d'un seul car on est dans le cas connexe) de l'anti-chaîne, graphe dont il serait donc mineur, ce qui est impossible par hypothèse. Mais alors il a été réduit sans totalement disparaître. Chaque composante connexe d'après réduction (et il y en a au moins une) étant isomorphe à un graphe de l'anti-chaîne, graphe qui est donc un mineur de G, ce qui est absurde. D'où le résultat dans le cas connexe.

Et dans le cas général On peut voir un graphe fini quelconque comme l'ensemble de ses composantes connexes, *i.e.* comme une partie finie de la classe des graphes connexes. Il n'est pas difficile alors de remarquer que l'on a $H \preccurlyeq G$ avec H et G non nécessairement connexes si et seulement si G a au moins autant de composantes connexes que H et il existe une injection de H vers G envoyant chaque composante connexe c' de H vers une composante c de G telle que $c' \preccurlyeq c$, autrement dit $c' \preccurlyeq f(c')$ (on réduit alors G en H en supprimant toutes les composantes qui n'appartiennent pas à l'image de f, et en réduisant chaque $f(c')$ en la composante c' de H). La relation de mineur sur les graphes finis est donc exactement la relation induite par la relation de mineur pour la classe graphes connexes (qui est un bel ordre) sur l'ensemble de ses parties finies. Par lemme de Higman, on en déduit que la relation $\preccurlyeq$ est un bel ordre sur la classe des graphes quelconques. $\square$

5 Conclusion

L'étude des beaux ordres a permis d'établir un certain nombre de théorèmes intéressants, notamment, pour ce qui est de l'informatique fondamentale, en combinatoire sur les mots et en théorie des graphes comme nous avons pu l'illustrer tout au long de ce rapport. Le théorème des mineurs de Robertson et Seymour, qui est probablement le plus gros résultat de la théorie des graphes en l'état actuel de l'art, se ramène ainsi à démontrer que la relation de mineur est un bel ordre sur la classe des graphes finis. Sur des structures combinatoires peu contraintes comme les graphes ou les mots, les beaux ordres peuvent être vus comme une alternative faible à des notions plus fortes telles que les bons ordres, omniprésents en théorie des ensembles. C'est finalement un moyen fructueux de ramener des problèmes combinatoires à des objets mathématiques bien connus et étudiés.

Références

[1] R. Diestel. *Graph theory.* Springer, 2005.

[2] JB Kruskal. Well-quasi-ordering, the tree theorem, and Vazsonyi's conjecture. *Transactions of the American Mathematical Society*, pages 210–225, 1960.

[3] J.B. Kruskal. The theory of well-quasi-ordering : A frequently discovered concept. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 13(3) :297–305, 1972.

[4] K. Kuratowski. Sur le probleme des courbes gauches en topologie. *Fund. Math*, 15(27) :1–283, 1930.

[5] L. Lovász. Graph minor theory. *Bulletin-American Mathematical Society*, 43(1) :75, 2006.

[6] C. Nash-Williams. On well-quasi-ordering finite trees. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 59, 1963.

[7] B. Oporowski. A counterexample to Seymour's self-minor conjecture. *Journal of Graph Theory*, 14(5), 1990.

[8] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. i. excluding a forest. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 35(1) :39–61, 1983.

[9] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors .xiii. the disjoint paths problem. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 63(1) :65–110, 1995.

[10] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. xx. wagner's conjecture. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 92(2) :325–357, 2004.