Réduction généralisée de NP-complétude

ou : Node- and Edge-Deletion NP-complete problems

rapport de Benjamin Hellouin
d'après un article de M. Yannakakis

4 avril 2009

Table des matières

1 Introduction

1.1 Présentation et objectifs

Ce rapport porte sur un article de Mihalis Yannakakis intitulé "Node- and Edge-deletion NP-complete problems", paru en 1978 dans le cadre du Symposium on Foundations of Computer Science 1978 (FOCS'78). Dans cet article, Yannanakis s'intéresse à la complexité du problème de suppression de noeuds, que l'on peut exprimer de la façon suivante : "Combien de noeuds faut-il supprimer au minimum pour que mon graphe vérifie une certaine propriété ?" - ou, pour travailler sur le problème de décision associé, "Est-il possible de supprimer moins de k noeuds de telle sorte que mon graphe vérifie une certaine propriété ?" pour k non fixé.

Il ne s'agit donc pas "du" problème mais bien "des" problèmes de suppression de noeuds, intimement dépendants du choix de la propriété étudiée. Qu'on se contente de considérer, à titre d'exemple, la différence entre le problème lié à propriété “vrai” (temps 1) et à la propriété “graphe complet” (équivalent à trouver une clique de taille maximale, donc NP-complet). Le but sera donc de déterminer des conditions suffisantes sur les propriétés afin d’obtenir des résultats de complexité (notamment de NP-complétude) généraux.

Par rapport aux méthodes qui prévalent depuis l’introduction de la NP-complétude par Cook, les avantages d’une telle approche sont clairs : classifier des ensembles de problèmes avec des conditions suffisantes économise du travail et permet de mieux comprendre les points qui rendent ces problèmes difficiles à calculer. C’est cette forme de démonstration en bloc (“Tous les problèmes du type x sont NP-complets”) qui justifie le titre du rapport.

Elle est également très surprenante au premier abord, et ce principalement pour deux raisons. Premièrement, dans les preuves de NP-complétude, les réductions sont souvent finement adaptées au problème, et même si certaines méthodes se retrouvent régulièrement, il est rare qu’une très légère modification du problème ne demande pas une astuce pour se ramener au cas général. En particulier, restreindre les entrées ou rendre une propriété plus générale transforme un problème NP-complet en un problème sont on ne peut rien dire dans le cas général.

Deuxièmement, la méthode utilisée pour les preuves, la réduction, est extrêmement constructive : “A partir d’une instance du problème initial, on construit une instance appropriée du problème réduit...”. Bien que rien ne s’y oppose en théorie, il n’existe à ma connaissance aucune démonstration de NP-complétude qui se contente de prouver l’existence d’une instance appropriée sans l’exhiber. Cela implique que, pour deux problèmes A et B dont la sortie diffère sur certaines entrées, le réduction se fera nécessairement par des constructions différentes ; par conséquent, pour prouver la NP-complétude d’une famille de problèmes, l’intuition est qu’il faudra construire une famille d’instances suivant le problème considéré. Ces deux arguments réunis nous rendent incrédules sur la possiblité d’une telle preuve.

De fait, Mihalis Yannakakis ne se contente pas d’étudier le problème sans perspective et montre dés l’introduction qu’il a conscience de la nouveauté de son point de vue. Sa pertinence apparaît à travers le principal résultat qu’il démontre dans l’article ; pour certaines propriétés, le problème était ouvert et un sujet de recherche à l'époque (voir par exemple l'article "Node-deletion NP-complete problems" de Krishnamoorthy & Deo), et non inventé pour les besoins de la cause.

1.2 Principaux résultats

Le premier résultat obtenu, et à mon sens le plus important, et de démontrer la NP-complétude du problème de suppression de noeuds dans un cas assez général. Les conditions se ramènent à supposer l'hérédité des propriétés et à éviter les cas triviaux. L'interêt du résultat tient à la fois à la nouveauté de l'approche, à l'interêt du résultat en tant que tel, et à une certaine élégance (et complexité) de la démonstration. C'est ce qui justifie mon choix de présenter la démonstration dans son intégralité, tout en tentant de simplifier et de clarifier au mieux en insistant sur les étapes clés et en rassemblant quelques points de détail à la fin.

Dans la suite de l'article, l'auteur tentera ensuite de porter ses résultats : aux graphes bipartis, orientés, planaires, acycliques, puis tous ceux-là dans le cas où on demande que les graphes résultants des suppressions demeurent connectés. Bien que les résultats soient moins novateurs et semblent d'un interêt immédiat moins évident (zoologique plus que philosophique), cette partie n'est pas inintéressante : les difficultés et les résultats varient fortement selon les classes étudiées et certaines nécessitent des astuces de décomposition assez élégantes pour être soulignées. Assez ironiquement, l'effort est reporté de la distinction entre les différents problèmes à la distinction entre les classes de graphe. On se contentera donc de donner les principaux résultats avec une idée de la difficulté et de la forme de la démonstration.

Enfin, l'auteur étudie le problème de suppression d'arêtes dans certains cas étudiés précédemment. Quelques résultats de NP-complétude sont obtenus, mais il renonce à utiliser la même approche que dans la première partie en l'absence d'une sorte de "structure commune" dans les réductions.

2 Problème de suppression de noeuds : une méthode générale

2.1 Formalisation et hypothèses

Définition 1 (Problème de suppression de noeuds)

Soit π une propriété sur les graphes, G un graphe (ev^{t} orienté). Le problème de suppression de noeuds consiste à trouver le plus petit ensemble de sommets E tel que le sous-graphe induit $G - E$ vérifie π (version d'optimisation) ou de savoir s'il existe un tel ensemble de taille inférieure à k pour k non fixé (version de décision).

On va à présent introduire les conditions sur les propriétés dont on se servira pour le théorème et dans la suite.

Définition 2 (Propriétés héréditaires)

Une propriété π est dite héréditaire si pour tout graphe G vérifiant π, le sous-graphe obtenu par la suppression d'un noeud (ou d'une arête) vérifie toujours π. Cela revient à dire que tous les sous-graphes de G vérifient π.

Cette hypothèse sera la restriction principale sur nos propriétés et, intuitivement, celle qui nous donne la structure grâce à laquelle la démonstration sera possible. Le discussion sur les propriétés concernées se fera plus tard, mais on se convainc que la définition n'est pas ridicule en constatant qu'une majorité des propriétés d'appartenance aux classes de graphe vérifient cette hérédité.

Définition 3 (Propriétés non triviales)

Une propriété est dite non triviale quand elle est vérifiée par un noeud isolé et qu'elle n'est pas vraie pour tous les graphes de la classe considérée.

Définition 4 (Propriétés intéressantes)

Une propriété π est dite intéressante s'il n'existe pas de borne supérieure à la taille des graphes qui vérifient π.

Toutes les propriétés triviales ou inintéressantes sont évidemment dans P. Si la taille des graphes vérifiant π est bornée par k, il en existe un nombre fini et il suffit de vérifier si le graphe en entrée en fait partie. D'autre part, si la propriété n'est pas vraie sur un sommet isolé, elle n'est vraie pour aucun graphe par hérédité. Par conséquent, émettre ces hypothèses revient moins à se contraindre qu'à exclure des cas triviaux.

2.2 Résultat

Théorème 1 (Résultat principal) *Pour toute propriété π héréditaire, non triviale et intéressante, le problème de la suppression de noeuds est NP-complet.*

En préliminaire à la réduction proprement dite, nous allons procéder à une transformation particulière pour obtenir la bonne instance. On notera n le cardinal de G.

Démonstration 1 (Construction de l'instance)
Soit $G = (V, E)$ un graphe, que l'on considèrera connexe en première approche. Pour tout sommet $c_i \in V$, on considère les tailles $(n_1..n_k)$ des composantes connexes de $G - c$ et on associe à c_i la séquence a_i qui correspond à ces tailles triées dans l'ordre décroissant. On choisit ensuite le sommetc qui minimise cette séquence pour l'ordre lexicographique (intuitivement, qui minimise la plus grosse composante ; il s'agit donc du meilleur "point de coupe"). On obtient alors un ordre lexicographique sur les graphes en leur associant cette séquence minimale.

Considérons alors le plus petit graphe J (au sens de cet ordre) qui ne peut être répété un nombre arbitraire de fois sans violer la propriété. Il existe donc k tel que $k - 1$ copies indépendantes de J vérifient π tandis que k copies violent π. Ce graphe existe par non-trivialité de π et on le considèrera également connexe pour simplifier la démonstration.

Par la même méthode que précédemment, soit c_J le meilleur point de coupe de J et J_0 la plus grosse composante connexe résultante. On note aussi $J' = J - J_0 + c_J$, et on choisit arbitrairement $d \in J_o$ distinct de c (J_0 est non vide car J n'est pas un sommet isolé - ceci sera montré plus bas).

A présent, considérons le graphe G^* consitué de $k.n$ copies indépendantes de G, et opérons une transformation appropriée (cf. fig 1 pour quelque chose de plus visuel). Pour chaque sommet u, on crée une copie de J' dans laquelle u est identifié à c_1. Puis chaque arête (u, v) est remplacé par une copie de J_0 où u est identifié à c_1 et v à d (quel noeud est associé à quelle extrémité n'a aucune importance). On note G' le graphe résultant.

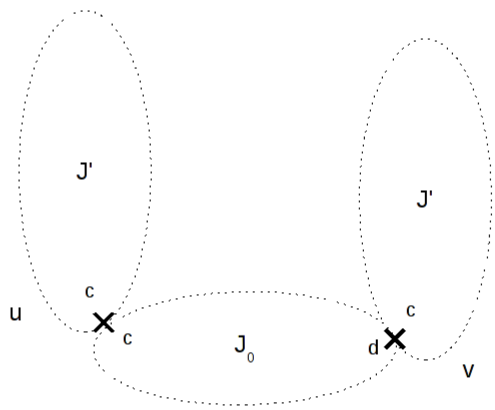

FIG. 1 – Transformation d'une arête (u,v)

Quelques remarques sur l'instance construite :

Le choix de J et de k est dépendant de la propriété et hautement non constructif ("le plus petit tel que..."). Il s'agit donc, moralement, de l'étape-clé de la démonstration à laquelle on faisait référence plus haut.

Dans les deux cas où nous avons supposé le graphe connexe, ce n'était que par souci de simplicité ; dans le cas général, il suffit d'associer une séquence à chaque composante connexe, de trier ces séquences dans l'ordre décroissant et de classer les graphes lexicographiquement par cette séquence de séquences. On utilisera cette technique plus bas.

Enfin, on a un problème dans le cas où J_0 est vide, i.e. quand J est un sommet isolé. Ce cas ne peut arriver que quand il existe un ensemble de sommets indépendants qui viole π. Or il existe un nombre $r(m,n)$ (dit de Ramsey) tel que tout graphe de taille supérieure à $r(m,n)$ contient soit K_m (clique de taille m), soit $\bar{K}_n$ (indépendant de taille n). Comme π est vérifiée par des graphes arbitrairement grands, elle est vérifiée (par hérédité) pour toutes les cliques ou tous les ensembles indépendants de sommets.

En considérant si nécessaire le problème complémentaire $\bar{\pi}$ (vrai sur G si π est vrai sur le complémentaire de G), on peut considérer sans perte de généralité que la propriété est vraie sur les ensembles indépendants de sommets. Par conséquent, J est de cardinal ≤ 2.

Le théorème précédent est dû à Ramsey, et son adaptation aux autres classes de graphes n'est pas immédiate, notamment pour les graphes orientés. On pourra se référer au "Introduction to Graph Theory" de D.West qui traite la question (chapitre 8.3).

Nous allons nous servir de cette construction pour opérer la réduction à partir du problème VERTEX-COVER, réputé NP-complet.

Réduction 1 *Soit $\alpha(G)$ le cardinal de la couverture par sommets minimum de G, i.e. le plus petit ensemble de sommets couvrant toutes les arêtes.*
Alors

$$\forall l, \alpha(G) \leq l \Leftrightarrow \nu_\pi(G') \leq |G|.k.l.$$

Démonstration 2 (Sens direct)
Soit V une couverture par sommets, $|V| \leq l$. On ôte de chaque copie de G dans G' tous les sommets de V (soit $n.k.l$ sommets), en laissant les J_0 et J' qui leur étaient attachés. On montre que le graphe résultant, noté K, vérifie la propriété π.

Les composantes connexes de K peuvent être de quatre types (ici encore, la figure 1 peut aider) :
- *J' privé de c (si le sommet associé a été supprimé)*
- *J_0 privé de c et d (arête dont les sommets ont été supprimés)*
- *J' attaché à plusieurs copies de J_0 privées chacune de c ou d (sommet non supprimé avec ses arêtes)*

Il n'existe aucun cas où les deux extrémités d'une arête n'auraient pas été supprimés, car le complémentaire d'une couverture par sommets est un indépendant.

On veut exprimer chaque composante de K sous forme de sous-graphe d'un unique graphe J^* qui soit inférieur à J (pour l'ordre défini ci-dessus).

Ainsi, un nombre arbitraire de copies indépendantes de J^* vérifieraient π (par minimalité de J) et, par hérédité, K également.

Comme les deux premiers cas sont inclus dans le troisième, il suffit que le graphe inclue le troisième cas. On définit J^* comme J' attaché à autant de copies de J_0 que nécessaire (degré maximum de G, au pire). Comme il existe plusieurs manières d'attacher les J_0 (par c ou par d), on fait plusieurs copies indépendantes du graphe qui incluent toutes les possibilités (cf. fig.2). Tous les composantes connexes sont donc des sous-graphes de J^*.

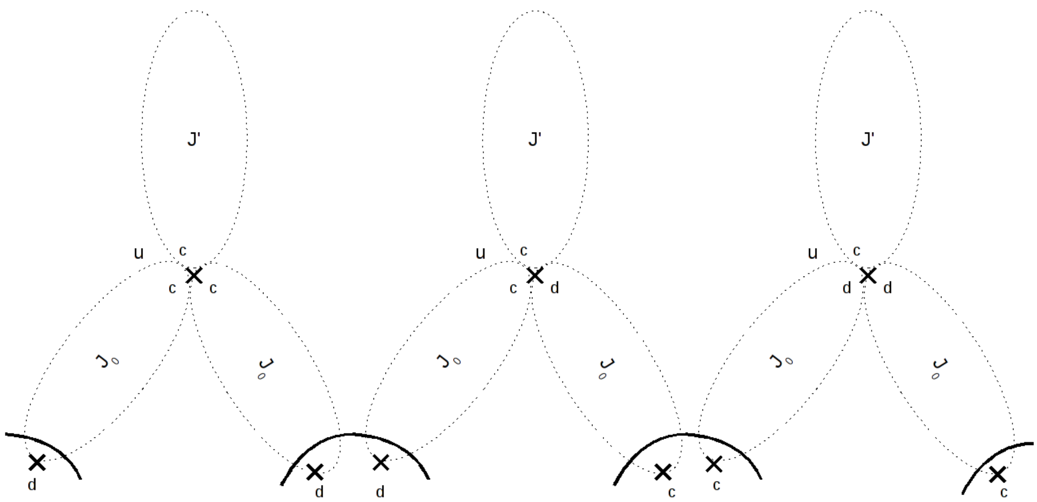

FIG. 2 – Un exemple de J^* quand le degré maximum est 2. Les noeuds ôtés de la composante sont signalés par des traits.

Pour chacune de ces composantes, c est un point de coupe créant des composantes de taille inférieure à J_0 ($J - J_0$ d'un coté, J_0 privé d'un sommet de l'autre). Donc J^* est plus petit que J pour l'ordre lexicographique défini ci-dessus, ce qui nous permet de conclure que J^* vérifie π, et de même pour K.

On a donc un ensemble de sommets de taille n.k.l dont la suppression résulte en un graphe qui vérifie π, ce qui conclut le sens direct.

Démonstration 3 (Sens indirect)
Par contraposée, supposons que $\alpha \geq l+1$ et considérons V une solution au problème de suppression de sommets. Soit m le nombre de composantes connexes de $G' - V$ contenant J comme sous-graphe induit ; clairement, $m < k$, car autrement k copies indépendantes de J vérifieraient π par hérédité. Donc au moins $nk - k + 1 = (n-1)k + 1$ copies de G ne contiennent par J.

Soit U l'ensemble des sommets $v \in G'$ défini ainsi : $v \in U$ si et seulement s'il n'y a aucun sommet de V dans la copie de J' associée à v dans G^* et dans les copies de J_0 associées aux arêtes issues de v pour lesquelles v a été associé à c (et non à d).

Supposons qu'il existe deux sommets u, v reliés par une arête dans G appartenant tous les deux à U. Alors, dans G^*, il n'existe aucune sommet de V dans J_0 ni dans aucun des deux J'. Un des deux sommets étant identifié au sommet c, on a une copie de J ($J' \cup J_0$ reliés par c) sans sommet de V (cf. fig.3 pour un exemple)

Pour les $(n-1)k + 1$ copies de G ne contenant pas J, U est donc une couverture par sommets dans G^*. Comme, pour chaque copie, le cardinal d'une couverture par sommets est supérieur à $l + 1$, on a

$$|U| \geq (l+1)((n-1)k+1) = nkl + l + 2 + k(n-1-l)$$

$$\Rightarrow |U| \geq nkl \qquad\qquad \text{car } n > l+1$$

2.3 Exemples

Voici quelques exemples suggérés par l'auteur de propriétés qui vérifient les hypothèses et pour lesquelles le problème de suppression de noeuds est donc NP-complet.

- complet,
- planaire,
- "outerplanar" (planaire extérieur - représentable avec les sommets sur un cercle et les arêtes ne s'intersectant pas),

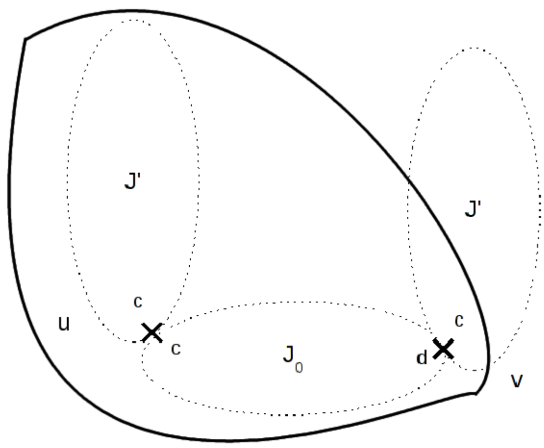

FIG. 3 – Cas où deux sommets u et v n'ont pas été supprimés. Une copie de $J = J_0 \cup J' \cup \{c\}$ est visible en noir (d n'a pas été supprimé).

- linéaire (graphe représentant les adjacences entre les arêtes d'un autre graphe),
- triangulé,
- sans cycle de taille l,
- sans cycle de taille $\leq l$,
- acyclique (= forêt),
- biparti, ou biparti complet,
- de comparabilité (graphe dont on peut orienter les arêtes de telle sorte qu'il soit transitif),
- de degré maximum r,
- etc.

On reconnait dans cette liste à peu près tous les problèmes de reconnaissance de graphes héréditaires, qui sont une des applications principales du problème. On peut ajouter la reconnaissance de graphes parfaits, de graphes d'intervalles, de graphes k-colorables, de graphes complets, etc. A noter également que pour chaque propriété, la propriété $\bar{\pi}$ définie comme étant vraie sur G si π est vraie sur le complémentaire de G entre aussi dans cette liste.

3 Application à d'autres classes de graphes

Dans la suite, l'auteur s'attache à étendre son résultat de NP-complétude à des cas où le graphe en entrée appartient à une certaine classe. Cela consiste généralement à réutiliser la démonstration précédente en prenant garde à ce que les graphes manipulés restent bien dans le classe considérée et, dans les cas pathologiques, montrer qu'ils peuvent se ramener à un autre problème.

Comme les classes considérées sont héréditaires, il suffit de considérer que le graphe en entrée appartient à la classe étudiée : le graphe résultant de la suppression des sommets y sera aussi.

3.1 Graphes planaires

Théorème 2 *Pour toute propriété héréditaire, intéressante et non triviale sur les graphes planaires, le problème de suppression de sommets est NP-complet.*

Ce résultat découle principalement du fait qu'il est possible de conserver la planarité des graphes manipulés à travers la démonstration. Il est juste nécessaire de faire attention à la représentaiton et au choix de d pour que les graphes se "rejoignent" sans problème.

3.2 Graphes bipartis

Théorème 3 *Pour toute propriété héréditaire, vérifiée par les ensembles indépendants de noeuds, intéressante et non triviale sur les graphes bipartis, le problème de suppression de noeuds est NP-complet.*

Conserver les graphes bipartis au cours de la démonstration se révèle moins trivial que dans le cas précédent. Un sous-cas devra être résolu indépendamment par réduction à 3-SAT, mais sans contrainte supplémentaire sur les propriétés.

3.3 Graphes orientés

Théorème 4 *Pour toute propriété héréditaire, intéressante et non triviale sur les graphes orientés et sur les graphes orientés acycliques, le problème de suppression de noeuds est NP-complet.*

Pour les graphes orientés, la démonstration utilise une adaptation du résultat précédent avec une réduction différente au problème de couverture des noeuds selon que le problème soit vérifié sur les ensembles de noeuds indépendants ou non.

La démonstration s'adapte très simplement au cas acyclique.

3.4 Graphes connectés

Bien qu'il ne s'agisse pas à proprement parler d'une classe de graphes, l'auteur obtient des résultats significatifs sur la restriction aux graphes connectés. Comme la condition de connexité n'est pas héréditaire, on suppose qu'elle porte aussi bien qur le graphe initial que sur l'ensemble des graphes intermédiaires.

Théorème 5 *Pour toute propriété héréditaire, intéressante et non triviale, le problème de suppression connectée de noeuds est NP-complet.*

Théorème 6 *Pour toute propriété héréditaire, intéressante et non triviale, le problème de suppression connectée de noeuds pour les graphes orientés et les graphes orientés acycliques est NP-complet. Ceci est en revanche faux pour la restriction aux graphes planaires, et un contre-exemple est π = "étoile".*

Les démonstrations sont ici encore constituées d'un raisonnement par cas, certains cas étant simples et d'autres se ramenant au problème de suppression de noeuds en considérant une propriété appropriée.

Deux résultats annexes sur l'approximation et sur un pont entre les deux problèmes est également démontré. Ils réclament une hypothèse supplémentaire d'hérédité : si π est vraie pour tout sous-graphe de G, alors π est vraie pour G. Sous cette condition, on prouve que :

Théorème 7 *Pour toute propriété héréditaire, intéressante et non triviale, toute approximation du problème de suppression de sommets de ratio $O(n^{1-\epsilon})$ est NP-complète (et une approximation de ratio $O(n)$ est tout simplement inutile).*

Théorème 8 *Pour toute propriété héréditaire, intéressante et non triviale, le problème de savoir si tous les plus grands sous-graphes de G vérifiant π sont connectés ou non est NP-dur et coNP-dur.*

Les deux démonstrations sont difficiles et utilisent une réduction à 3-SAT. Elles ne reposent pas particulièrement sur les concepts développés jusque ici.

4 Le problème de suppression d'arêtes

Nous avons vu de quelle manière le problème de suppression de noeuds pouvait être attaqué de manière systématique afin de produire des preuves de NP-complétude générale. Bien entendu, on aimerait porter ce résultat à d'autres problèmes, et en particulierà un problème voisin, celui de suppression d'arêtes.

Définition 5 (Problème de suppression d'arêtes) *Soit π une propriété sur les graphes et G un graphe (ev^t orienté). Le problème de suppression d'arêtes consiste à trouver le plus petit ensemble d'arêtes V tel que le sous-graphe induit $G-V$ vérifie π (version d'optimisation) ou de savoir s'il existe un tel ensemble de taille inférieure à k pour k non fixé (version de décision).*

L'auteur démontre plusieurs résultats pour des cas particuliers de propriétés dans le but d'extraire une structure commune de réduction qui permette une démonstration semblable à celle de la deuxième section pour une classe convenablement restreinte de propriétés. Vu les grandes différences entre les différentes réductions, cependant, on peut suspecter qu'une telle structure n'existe pas, et l'auteur renonce à trouver une telle méthode générale pour le problème de suppression d'arêtes.

Notons tout de même quelques réductions qui nous laissent penser que le problème est NP-complet pour environ les mêmes types de problèmes :

Théorème 9 *Le problème de suppression d'arêtes est NP-complet pour π appartenant à la liste suivante : planaire, planaire extérieur, sans cycle de taille l, sans cycle de taille $\leq l$, connecté et de maximum degré r.*

5 Conclusion

L'auteur a, d'une certaine façon, répondu indirectement à nos deux objections soulevées dans l'introduction. Face à la nécessité de construire une instance différente pour chaque problème, il obtient son résultat principal par une réduction dont une étape (le choix de J et de k) est à la fois non constructive et dépendante de la propriété.

D'autre part, face à la grande variété des méthodes de réduction pour certains problèmes proches, il souligne le fait que sa méthode est spécifique au problème de suppression de sommets, ce qui implique une forme de "régularité" du problème. Il ne prétend pas extraire une méthode générale pour des démonstrations de ce type, et de fait, il ne parvient pas à un tel résultat même sur le problème proche de suppression d'arêtes.

Cela ne signifie pas que cette approche soit réservé à ce problème en particulier, et il est suggéré qu'elle pourrait être fructueuse pour prouver la NP-complétude de classes de problème portant sur la division d'entiers et de polynôme, où une majorité de réductions se ressemblent (Travaux de D.Plaisted, avec par exemple l'article "Some polynomial and integer divisiblity problems are NP-hard")..

Au final, ce qui est introduit dans cet article est moins un nouveau concept de démonstration qui modifie la vision des réductions de NP-complétude qu'une nouvelle technique qui s'ajoute à l'arsenal disponible pour ces réductions (en ce sens que l'approche ne pourra être adaptée qu'au cas par cas), ainsi qu'un nouveau problème "de base" à partir duquel on pourra faire des réductions vers d'autres problèmes ressemblants. On constate d'ailleurs que la majorité des auteurs qui citent cet article s'intéressent non pas à l'approche en tant que telle mais soit à un des problèmes particuliers qui a été démontré, soit (et il s'agit sans doute du plus gros apport théorique de cet article) à la possibilité de réduire un autre problème "généralisé" au problème de suppression de noeuds.