Quelques résultats sur les Unit Disk Graphs

Rémi Vannier

22 avril 2009

1 Introduction

Les Unit Disk Graphs (UDG) ont été introduits dans les années 80-90 [2] pour modéliser les interactions dans les réseaux sans fil. Les sommets du graphe sont les stations sans fil, et deux sommets sont reliés si ces stations sont à portée de communications, ou risquent d'interférer si elles émettent simultanément, le premier modèle étant adapté pour étudier les protocoles de routage, et le second, entre autres, pour les protocoles d'accès au medium (MAC). Pour simplifier la modélisation, on suppose que la portée de communication - respectivement la capacité à provoquer des interférences - est la même dans toutes les directions et pour toutes les stations. Voici, pêle mêle, quelques problèmes que les chercheurs ont pu inventer pour concilier les contingences pragmatiques des réseaux avec leur amour de la théorie des graphes [1].

- Coloriage de graphe : pour éviter les interférences, on cherche une attribution des canaux de sorte à ce que deux stations voisines utilisent des canaux différents.
- Minimum dominating set : utile pour les protocoles à base d'élection d'arbitres locaux.
- Connected dominating set : même objectif, mais connecté.
- All Maximal cliques : utilisé pour les équations de contraintes dans le partage de la bande passante (pas plus d'une station dans une clique ne peut émettre au même instant).
- All Maximal independent set : une autre approche pour générer les contraintes. Cette dernière est plus difficile à utiliser car les ensembles indépendants induisent des algorithmes centralisés par opposition aux cliques, qui sont des structures locales, et induisent des algorithmes distribués.

2 Définitions et propriétés

2.1 Unit Disk Graph

Définition 1 (Unit Disk Graph)**.** *Etant donné P un ensemble de points dans le plan, on construit son Unit Disk Graph associé $G(V, E)$ où*

- *à chaque point de P est associé un sommet dans V,*
- *il existe une arête entre 2 sommets si la distance Euclidienne entre les deux points associés est au plus 1.*

[1] mais il faut reconnaître que le groupe IEEE 802.11 a pour l'instant apporté beaucoup plus aux réseaux sans fil que les chercheurs en théorie des graphes.

Notes
- Un UDG peut aussi être vu comme le graphe d'intersection d'un ensemble de disques de rayon $\frac{1}{2}$.
- On peut généraliser les Unit Disk Graphs à plus de 2 dimensions, en remplaçant les disques par des boules.

2.2 Propriétés

Voici quelques propriétés que j'ai pu glaner sur les UDG.

Propriété 1. *Soit $G(V, E)$ un UDG. $\forall x \in V$, on note $N(x)$ l'ensemble des voisins de x, x compris. Alors $N(x)$ ne contient pas d'ensemble indépendant de taille supérieure à 5.*

Preuve : La preuve est géométrique et immédiate : si x a 6 voisins ou plus, alors 2 d'entre eux sont voisins.

Corollaire - sous structure interdite : Soit $G(V, E)$ un UDG. Alors G ne contient pas de sous-graphe isomorphe à $K_{1,6}$.

Propriété 2 (Propriété de Helly)**.** *Une famille $F = \{S_m\}_{m \in 1..n}$ d'ensembles vérifie la propriété $k-$Helly (ou propriété de Helly pour $k = 2$) si l'intersection de $k + 1$ ensembles de F s'intersectant deux à deux est non-vide.*

Cette propriété n'est malheureusement pas vérifiée par les UDG. Il suffit de placer 3 points aux sommets d'un triangle équilatéral de côté 1. Le centre du triangle, situé à égale distance des 3 sommets, l'est à une distance $\frac{\sqrt{3}}{3}$ qui est plus grand que $\frac{1}{2}$. Je mentionne cette propriété car elle peut être très utile par exemple, pour trouver les cliques maximales dans les graphes d'intersection. Dans le cas des Unit Square Graphs - ou l'on remplace la distance Euclidienne par la norme infinie - la propriété de Helly est vérifiée.

Propriété 3. *Les UDG ne sont pas des graphes parfaits.*

Le trou de longueur 5, sous-structure interdite des graphes parfaits, est un UDG. En définissant les points comme des nombres complexes, $P = \{e^{\frac{2ik\pi}{5}} | 0 \leq k < 5\}$ est un UDG.

Propriété 4. *Les UDG ne sont pas planaires.*

La clique de taille 5, K_5 est un UDG. Hors, c'est une sous-structure interdite des graphes planaires. En revanche, un graphe planaire de degré inférieur à 4 peut être plongé dans un UDG, d'après Valiant, propriété qui est utilisée pour démontrer la NP-complétude des problèmes cités ci-dessous.

2.3 Quelques résultats de complexité

La majorité des problèmes NP-durs dans les graphes quelconques le restent dans les UDG. Colbourn et Clarke [2] donnent en 1990 la complexité de quelques problèmes dans les UDG, consignées dans le tableau 1.

Nombre chromatique	NP-complet
Clique	*Polynomial*
Ens. indépendant	NP-complet
Ensemble dominant	NP-complet
Ensemble dominant connecté	NP-complet
Circuit Hamiltonien	NP-complet
Reconnaissance	NP-dur [1]

TAB. 1 – Quelques problèmes des UDG et leur complexité

3 Application à l'allocation de bande passante dans les réseaux ad hoc

3.1 Problème

La norme 802.11 spécifie les protocoles des couches physiques et MAC des réseaux sans fil. Pour ne pas s'étendre sur le sujet, on peut se limiter à dire que la couche d'accès au médium est de type CSMA (Carrier Sense Multiple Access), c'est à dire qu'une station doit s'assurer que le medium est libre avant d'émettre.

Si l'on suppose que la portée de communication est la même pour toutes les stations et dans toutes les directions (hypothèse assez forte, mais sans laquelle on ne peut plus rien dire), on peut modéliser les interactions entre les stations d'un réseau sans fil par un UDG. Les sommets de cet UDG sont les stations du réseau, et on a une arête entre deux sommets si ceux-ci ne peuvent émettre simultanément, i.e s'ils sont à une distance inférieure à la "carrier sensing range", la distance maximale au delà de laquelle le signal est trop atténué pour être détecté. Le graphe obtenu est appelé *Graphe de conflit*.

Le problème d'allocation de bande passante peut s'exprimer ainsi : Soit $S = \{s_1..s_n\}$ un ensemble de stations et G son graphe de conflit. Première version : étant donné une allocation $X = \{x_1..x_n\}$ représentant le temps pendant lequel chaque station souhaite émettre, est-il possible de satisfaire cette allocation ? Version d'optimisation : étant donné une fonction d'optimisation $f(X)$, quelle allocation maximise f ?
Dans ce second problème, le choix de f conditionne le type d'allocation que l'on souhaite. $f(X) = \sum x_i$ maximisera l'utilisation du réseau, alors que $f(X) = \min x_i$ partagera équitablement la bande passante entre toutes les stations.

Théorème 1 (Clique constraints [3]). *Soit K l'ensemble des cliques maximales de G, et C la capacité du medium radio. Alors,*

$$\forall k \in K \sum_{s_i \in k} x_i < C$$

est une condition nécessaire pour qu'un ordonnancement de X existe.

En effet, dans une clique, pas plus d'une station ne peut émettre à la fois. Il est donc naturel que la somme des émissions dans une clique n'excède pas la capacité.

Théorème 2. *Si G est parfait, cet ensemble de contraintes est nécessaire et suffisant.*

Preuve :

1. Supposons qu'on peut écrire $\frac{x_i}{C} \in Q$ et posons $\frac{x_i}{C} = \frac{p_i}{q}$. On construit le graphe G' où le sommet i est remplacé par la clique K_{p_i}. D'autre part, on ajoute des arêtes entre tous les sommets de deux de ces cliques voisines dans G. Le graphe G' reste parfait par cette transformation.
2. Les contraintes deviennent alors
$$\forall k \in K \sum_{s_i \in k} p_i < q$$
3. La taille de la clique maximum dans G' est donc majorée par q. G' étant parfait, il existe un q-coloriage de G'.
4. On divise alors le temps en q slots, et la station s_i peut émettre pendant les slots correspondant à ses couleurs.

On peut construire un ordonnancement des émissions pour tout X vérifiant les contraintes par cliques. Ces contraintes sont donc suffisantes en plus d'être nécessaires.

3.2 Borne sur le degré d'imperfection

Définition 2. *Le* degré d'imperfection *d'un graphe G est le maximum pour tous les sous-graphes induits du rapport entre taille de la clique maximum et nombre chromatique :*
$$imp(G) = \sup_{A \subseteq G} \frac{\chi(A)}{\omega(A)}$$

Remarques :

- $imp(G) = 1$ si et seulement si G est parfait
- $imp(G) > 1$ sinon.
- Le degré d'imperfection dans un graphe quelconque peut être arbitrairement grand (voir par exemple la construction de Mycielski dans Introduction to Graph Theory de Douglas West [5], page 205-206).

Théorème 3. *Si G est un UDG, alors :*
$$imp(G) \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Ce théorème est prouvé dans [3]. Les auteurs suggèrent que cette borne soit large, et que la borne théorique est $\frac{3}{2}$, borne atteinte par le trou de taille 5, où $\chi(G) = 3$ et $\omega(G) = 2$.

Théorème 4 (Scaled Clique Constraints [3])**.** *Soit G un UDG. Soit K l'ensemble des cliques maximales de G, et C la capacité du medium radio. Alors les contraintes suivantes sont suffisantes :*
$$\forall k \in K \sum_{s_i \in k} x_i < \frac{C}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

4 Conclusion

L'utilisation des cliques maximales pour le calcul des allocations de bande passante dans les réseaux sans fil semble naturelle. D'une part, on dispose de bonnes heuristiques distribuées pour calculer les cliques maximales, et d'autre part, même si la borne théorique sur le degré d'imperfection des UDG est au mieux $\frac{3}{2}$, on constate en pratique qu'il est proche de 1 dans la majorité des cas [4].

Références

[1] Heinz Breu and David G. Kirkpatrick. Unit disk graph recognition is np-hard. *Computational Geometry. Theory and Applications*, 9, 1993.

[2] Brent N. Clark, Charles J. Colbourn, and David S. Johnson. Unit disk graphs. *Discrete Mathematics*, 86(1-3) :165–177, December 1990.

[3] Rajarshi Gupta, John Musacchio, and Jean Walrand. Sufficient rate constraints for qos flows in ad-hoc networks. *Ad Hoc Netw.*, 5(4) :429–443, May 2007.

[4] Pradeepkumar Mani and David W. Petr. Clique number vs. chromatic number in wireless interference graphs : Simulation results. Technical Report ITTC-FY2007-TR41420-01, Information Telecommunication and Technology Center, University of Kansas, Lawrence, KS, 2007.

[5] D. B. West. *Introduction to Graph Theory (2nd Edition).* Prentice Hall, 2001.