Graphes planaires

Théophile Trunck

Avril 2009

Résumé

On présente les résultats les plus classiques de caractérisations, reconnaissances ou colorations concernant les graphes planaires. On évoque sans les détailler des résultats plus récents du domaine.

Table des matières

1 Introduction

Historiquement les graphes planaires ont été étudié par rapport au théorème des quatre couleurs. En pratique ils sont utiles car il est possible de les représenter clairement dans le plan. Un application est la conception de circuit ou on cherche à relier les composants dans le plan pour pouvoir fabriquer la puce sur un PCB une couche. La question se ramène donc à trouver si le graphe induit est planaire et à le dessiner. Du point de vue théorique ils ont amené de nombreuses questions fondamentales, la plus célèbre étant la conjecture de Wagner en 1960 qui a donner le théorème des mineurs démontré en 2004.

On présente dans la section 3 le théorème le plus important de caractérisation, celui de Kuratowski par sous structures interdites. On parle ensuite dans la section 4 du premier algorithme polynomial de reconnaissance du à Demoucron et al. en 1960. La section 5 est consacrée aux problèmes de coloration. Enfin la section 6 parle des problèmes liée aux graphes planaires et à leurs extensions possibles.

2 Premiers résultats

Commençons par définir ce qu'est un graphe planaire. La définition correspond à l'intuition, il s'agit d'un graphe dessinable sans croisement, on peut aussi le voir comme le dual d'une carte.

Définition 2.0.1. *Un graphe $G = (V, E)$ est dit planaire, si il existe une fonction de projection $\phi : V \to P$ de l'ensemble des sommets du graphe dans le plan et que pour chaque arrête $uv \in E$ il existe une courbe continue $c_{uv} : [0, 1] \to P$ telle que $c_{uv}(0) = \phi(u)$ et $c_{uv}(1) = \phi(v)$. On demande également que ces courbes ne s'intersectent pas.*

Cette définition est peu pratique nous allons voir comment il est possible de mieux appréhender la notion de planarité pour un graphe. On peut restreindre l'étude aux graphes connexes, en effet un graphe est planaire si et seulement si chacune de ses composantes connexes l'est. De même on peut se restreindre aux graphes simples. Dans la suite lorsque l'on parlera d'un graphe il sera toujours supposé simple et planaire.

2.1 Formule d'Euler

On peut dans un premier temps remarquer que le plongement d'un graphe planaire dans le plan produit une partition du plan privé du graphe en régions. Deux points sont dans la même région si il est possible de construire une courbe continue n'intersectant pas le graphe et joignant les deux points.

Le théorème suivant permet de parler du nombre de régions d'un graphe planaire.

Théorème 2.1. *Si G est un graphe connexe planaire avec p sommets, q arrêtes et r régions, alors*

$$p - q + r = 2$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le nombre d'arrêtes du graphe. Si $q = 0$, par connexité $p = 1$ et $r = 1$. Le résultat est donc vrai. Supposons alors le résultat vrai pour tout graphe planaire connexe avec moins de $q - 1 \geq 1$ arrêtes. Soit G un graphe planaire connexe avec p sommets et q arrêtes. Si G est un arbre alors $r = 1$, $p = q + 1$ et donc le résultat est vrai. Sinon il existe une arrête e de G qui génère un cycle. On considère alors $H = G - e$. Comme e faisait partie d'un cycle H reste connexe, clairement il est encore planaire. H a donc p sommets, $q - 1$ arrêtes et $r - 1$ régions. Donc par hypothèse d'induction

$$p - (q - 1) + (r - 1) = 2$$

En insérant e dans H, on ajoute une région et une arrête, donc G vérifie la formule et le résultat est prouvé. □

2.2 Bornes simples

Ce théorème permet de d'avoir des bornes sur la taille d'un graphe planaire. Le premier résultat borne le nombre d'arrêtes linéairement par rapport au nombre de sommets. On rappelle que pour une graphe simple connexe quelconque la borne est quadratique.

Proposition 2.2. *Si G est un graphe planaire avec $p \geq 3$ sommets et q arrêtes, alors $q \leq 3p - 6$.*

Démonstration. Pour faire la preuve, il faut introduire la notion de graphe maximal. On dira qu'un graphe est maximal quand il est impossible de lui ajouter une arrête sans violer la propriété de planarité. On remarque alors qu'un graphe maximal est forcément un graphe dans lequel chaque région est délimitée par 3 arrêtes. Sinon on peut facilement ajouter une arrête entre deux sommets de cette région. Comme chaque arrête participe à délimiter deux régions, on obtient $3r = 2q$. En utilisant la formule d'Euler on obtient alors

$$p - q + \frac{2q}{3} = 2$$

ce qui peut s'écrire

$$q = 3p - 6$$

Par maximalité, tout graphe vérifie alors $q \leq 3p - 6$. □

Comme le nombre d'arrêtes est linéaire par rapport au nombre de sommets, il est facile d'obtenir une propriété sur le degré maximal. Le degré moyen est clairement borné mais il n'est pas possible d'obtenir un résultat global. Il existe en effet des graphes planaires dont le degré d'au moins un sommet est maximal, l'étoile par exemple. On obtient donc une borne sur au moins un sommet.

Proposition 2.3. *Tout graphe planaire contient un sommet de degré au plus 5.*

Démonstration. Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire avec p sommets et q arrêtes. Le résultat est trivial si $p \leq 6$ on suppose alors $p \geq 7$.On note x_i les sommets du graphe. On sait que $q \leq 3p - 6$ donc,

$$\sum_{i=1}^{p} degx_i = 2q \leq 6p - 12$$

Si tous les sommets sont de degré au moins 6 alors $2q \geq 6p$. Par contradiction on a bien un sommet de degré au plus 5. □

2.3 Théorème de Fary

Ce théorème est utile car il permet d'ajouter une contrainte forte sur la forme des courbes.

Théorème 2.4. *Tout graphe planaire peut être dessiné dans le plan sans intersection tel que toutes ses arrêtes soient des segments rectilignes.*

Démonstration. Soit G un graphe planaire avec n sommets. On peut sans perte de généralité le supposer maximal, i.e. il est impossible de lui ajouter des arrêtes en conservant le caractère planaire. Dans ce cas toutes les faces de G sont des triangles. Soient a, b, c, trois sommets d'une face de G. On prouve le résultat par induction sur n, en supposant de plus que abc peut être dessiné sur la face extérieure. Le cas de base est trivial. Sinon par maximalité, tous les sommets de G ont au moins trois voisins. Par un raisonnement analogue aux preuves précédentes, il existe un sommet v différent de a, b ou c qui a au plus cinq voisins. On dessine par induction $G - v$. Il y a alors un polygone qui a au plus cinq sommets dans lequel il est possible de placer v. On conclut avec le théorème de la galerie d'art qui assure qu'il est possible de tracer des segments rectiligne pour joindre v a ses voisins. □

Concernant les tracés de Fary, i.e. les tracés dans le plan de graphes planaires par des segments de droites incident à des points on peut en fait avoir un résultat plus précis du à Schnyder.

Théorème 2.5. *Tout graphe planaire peut être dessiné dans la grille* $[\![0, n]\!]^2$ *avec des segments rectiligne.*

Fraysseix et Ossona de Mendez proposent une conjecture :

Conjecture 1. *l'ensemble minimal de point permettant un tracé de Fary de tous les graphes de taille au plus* n *est de taille comprise entre* $n\log(n)$ *et* $n^{\frac{3}{2}}$.

Il est amusant de noter que dans les années 80, la conjecture était que le tracé de Fary peut avoir une taille exponentielle.

Ces résultats donnent des résultats de complexité. Il est possible de calculer si un graphe est planaire en testant toutes les affectations sur la grille possible et en appliquant un algorithme d'intersection de segment. Cela permet aussi de fournir un certificat. On sait alors que ce problème est dans NP. Ceci n'est évidement pas efficace surtout lorsqu'on sait que tester si un graphe est planaire peut se faire en temps linéaire en nombre de sommets du graphe.

2.4 Graphes non planaires

Les bornes précédentes montrent l'existence de graphe non planaire. Nous exhibions ici les deux graphes non planaires fondamentaux $K_{3,3}$ et K_5.

Proposition 2.6. *Le graphe* $K_{3,3}$ *n'est pas planaire.*

Démonstration. On suppose $K_{3,3}$ planaire. Comme $K_{3,3}$ n'a aucun cycle de longueur impaire, il ne contient en particulier pas de triangle et donc chaque région est délimitée par au moins quatre arrêtes. On a alors $4r \leq 2q = 18$. Donc $r \leq 4$. On utilise alors la formule d'Euler et on obtient

$$2 = p - q + r \leq 6 - 9 + 4 = 1$$

Ce qui prouve par contradiction que $K_{3,3}$ n'est pas planaire. □

Proposition 2.7. *Le graphe* K_5 *n'est pas planaire.*

Démonstration. On suppose K_5 planaire, il vérifie alors $q \leq 3p - 6$ i.e. $10 = q \leq 3 \times 5 - 6 = 9$ ce que prouve par contradiction que K_5 n'est pas planaire. □

3 Caractérisations

3.1 Kuratowski

Dans la section précédente on a parlé de graphes non planaires fondamentaux, le théorème suivant justifie cette appellation. Il s'agit du premier théorème de caractérisation des graphes non planaires. Ce théorème permet aussi de montrer que le problème de la planarité est dans Co-NP.

Théorème 3.1. *Un graphe est planaire si est seulement si il ne contient pas de subdivisions de K_5 ou de $K_{3,3}$.*

Proposition 3.2. *Si un graphe G a un sous graphe qui est une subdivision de K_5 ou de $K3,3$ alors il n'est pas planaire.*

Démonstration. Un sous graphe d'un graphe planaire est planaire. Subdiviser une arrête n'affecte pas la planarité, la courbe utilisée pour dessiner une subdivision peut être utilisée pour dessiner le graphe et réciproquement. Comme on a déjà montré que K_5 et $K_{3,3}$ ne sont pas planaires on a le résultat. $\square$

Lemme 3.3. *Si G est un graphe non planaire, ne contenant ni K_5 ni $K_{3,3}$ comme sous graphe, et est minimal en nombre d'arrêtes, alors G est 3-connecté.*

Démonstration. Par minimalité, il est clair que G doit être 2-connecté. Il ne possède donc pas de sommet de degré 1. Supposons qu'il existe un sommet v de degré 2, notons u, w ses voisins. Si uw est une arrête, $G - v$ en tant que sous graphe de G de contient pas de sous graphe interdit. Par minimalité, $G - v$ est un graphe planaire. Cependant dans le dessin de $G - v$ il est possible d'ajouter le sommet v et les arrêtes uv et vw en respectant le caractère planaire donc uw n'est pas une arrête. Dans ce cas on considère $G - v + uw$ et on aboutit à la même contradiction. Donc G est 3 connecté. $\square$

Théorème 3.4. *Si G est un graphe 3 connecté sans subdivision de $K_{3,3}$ ou K_5 alors on peut projeter G dans le plan tel que chaque face soit convexe et qu'il n'y ai pas trois sommets sur une même ligne.*

Démonstration. On raisonne par induction sur le nombre de sommets. Si il y a moins de 4 sommets le seul graphe vérifiant les hypothèses est K_4 et le résultat est vérifié. Sinon on peut prouver qu'il existe une arrête e telle qu'en la contractant G reste trois connecté, et ne contient pas de sous graphe qui serait une subdivisions de K_5 ou de $K_{3,3}$. On note z le sommet obtenu par contraction de e et H le graphe résultant de cette contraction. Par induction il existe un plongement dans le plan de H tel qu'il n'y ait pas trois sommets sur une même ligne. Sur ce plongement en supprimant z il existe une face contenant z, comme le graphe résultant est 2 connecté, la frontière de cette face est un cycle noté C. Tous les voisins de z sont sur ce cycle. En notant $e = xy$ ces voisins peuvent être des voisins de x ou de y dans G. On note $x_1, \dots x_k$ les voisins de x donner dans l'ordre cyclique de leur placement sur C. Si tous les voisins de y sont sur une portion de C entre x_i et x_{i+1} alors il est possible de construire le plongemenent de G à partir de celui de H en respectant les hypothèses, on place x à la position de z et y dans le triangle $x_i z x_{i+1}$. Sinon il y a deux cas possibles : y partage trois voisins u, v, w avec x dans ce cas C avec xy et les arrêtes de $\{x, y\}$ à $\{u, v, w\}$ forme une subdivision de K_5. Sinon y a des voisins u, v qui alternent sur C avec les voisins x_i, x_{i+1} de x. Dans ce cas C avec les chemins uyv, $x_i x x_{i+1}$ et xy forme une subdivision de $K_{3,3}$. Dans les deux cas cela contredit l'hypothèse et on a le résultat. □

Ce théorème n'est pas strictement une caractérisation par mineur interdit. Il est cependant facile à partir de ce théorème d'obtenir celui de Wagner.

Théorème 3.5. *Un graphe est planaire si et seulement si il ne contient ni K_5 ni $K_{3,3}$ comme mineur.*

La différence entre ces deux caractérisations est minuscule, mais Wagner fit la conjecture que ce dernier admettrait une généralisation que celle de Kuratowski n'admettait pas. Il supposait qu'il y aurait, pour chaque classe de graphe fini close par mineur, un ensemble fini de mineurs interdits qui la caractériserait. Cette conjecture à été prouvée récemment (2004) par Seymour et Robertson.

3.2 Demoucron, Malgrange et Pertuiset

À partir de la caractérisation de Kuratowski on peut en obtenir une autre plus constructive dans le sens ou elle induit un algorithme de reconnaissance polynomiale.

Définition 3.2.1. *On appelle segment de G relativement à un cycle C, les composantes connexes de $G - C$ (on supprime ici les arrêtes de C et non ses sommets) dont l'intersection avec C est d'au moins deux points.*

Comme on a supposé le graphe simple et connexe, il n'existe pas de composante connexe sans point d'intersection. Comme on s'intéresse à la manière de dessiner un graphe dans le plan, il n'est pas pertinent de considérer les composantes qui n'ont qu'un seul point d'intersection. Plus généralement si un graphe G possède un sommet disconnectant v, alors il est planaire si et seulement si chaque composante connexe de $G - v$ l'est.

Définition 3.2.2. *Deux segments sont incompatibles si plongés dans la même région du plan délimitée par le projeté de C deux arrêtes se croisent.*

Définition 3.2.3. *Pour chaque cycle C on construit un graphe auxiliaire $P(C)$ comme suit : Chaque segment de G par rapport à C produit un sommet. et on place une arrête entre deux sommets seulement si les segments correspondant sont incompatibles.*

Pour pouvoir dessiner le graphe, il faut que les segments incompatibles soient dessinés dans des régions distinctes. Les segments compatibles sont les sommets indépendants de $P(C)$. Si $P(C)$ est biparti, on peut dessiner les segments d'une même couleur dans une même région sans créer d'intersection. Si le graphe est planaire le dessins est effectivement possible donc pour tout cycle C, $P(C)$ est biparti.

Théorème 3.6. *Un graphe G est planaire si et seulement si, pour tout cycle C de G, le graphe $P(C)$ est biparti.*

Démonstration. Supposons G non planaire. Par théorème de Kuratowski, il contient alors, à contraction de chaînes près K_5 ou $K_{3,3}$. On peut se restreindre au cas ou il contient exactement K_5 ou $K_{3,3}$ la généralisation marche de la même manière. Dans les deux cas il est possible de trouver un cycle C tel que $P(C)$ n'est pas biparti (un cycle simple à quatre éléments pour K_5 et le cycle à six éléments pour $K_{3,3}$). En effet à chaque fois il y a deux des trois segments qui sont incompatibles.

La réciproque, si G est planaire alors pour tout cycle C, $P(C)$ est biparti, est claire avec les remarques précédentes. $\square$

4 Algorithmes de reconnaissance

On a vu que la reconnaissance de graphe planaire peut se faire. Que ce problème est NP et Co-NP. Comme dit précédemment il est en fait linéaire en nombre de sommets de l'entrée. Dans un premier temps nous allons voir quels sont les pré-traitements triviaux qu'il est possible d'appliquer. Nous verrons ensuite le premier algorithme de reconnaissance. Nous faisons l'impasse sur les algorithmes de reconnaissance en temps linéaire. Le premier algorithme en temps linéaire est du à Hopcroft et Targan et est basé sur l'addition de chemin. Les algorithmes qui sont actuellement considérés comme les plus efficaces sont du à Boyer et Myrvold qui font grossir le graphe par augmentation d'arrêtes et à Fraysseix et al. qui se basent sur les propriétés des arbres trémeaux (i.e. obtenu par un parcours en profondeur). C'est ce dernier algorithme qui est retenu dans la librairie PIGALE. On ne parle pas d'algorithme parallèle, Bader et Sreshta proposent un algorithme en $O(\frac{nlog^2n}{p})$ pour $p \leq n$ processeur.

4.1 Pré-traitement

Il est possible et facile de réaliser certains pré-traitements qui permettent de réduire la taille du graphe en entrée et de simplifier les algorithmes.

1. Si $|E| > 3n - 6$ alors le graphe n'est pas planaire, d'après un résultat précédent.
2. Si le graphe n'est pas connexe alors il est planaire si et seulement si chacune de ses composante connexe est planaire.
3. Si il existe des sommets disconnectants v_i alors le graphe G est planaire si et seulement si les composantes connexes de $G - v_i$ sont planaires.
4. Les boucles est les multi-arrêtes ne changent rien
5. Si le graphe contient des sommets de degrés deux, on peut contracter ces sommets.

Toute ces opérations sont linéaires en la taille du graphe, et par la première réduction la taille du graphe est linéaire en son nombre de sommet. La détection de tous les sommets disconnectants peut se faire via un simple parcours en profondeur en remarquant qu'un sommet n'est pas disconnectant si et seulement si c'est la racine et il n'a qu'un fils, ou si il a un descendant qui a une arrête de retour vers un de ses ancêtres.

On en revient donc a considérer uniquement des graphes de taille linéaire en leurs nombre de sommets, simples, 2-connectés, dont tous les sommets sont de degrés au moins 3.

4.2 Demoucron, Malgrange et Pertuiset

Le premier algorithme de test de planarité est du à Demoucron, Malgrange et Pertuiset. Cet algorithme s'exécute en temps polynomial.

L'idée de l'algorithme est la suivante : On cherche une suite de sous-graphe croissante pour l'inclusion qu'il est possible de dessiner. Il faut considère un dessins possible qui pourra ensuite être étendu en le dessin de sous-graphes plus gros. Pour cela on a besoin de la définition suivante.

Définition 4.2.1. *On dit qu'un plongement H' d'un sous-graphe H d'un graphe planaire G est admissible si il existe un plongement G' de G qui contienne H'.*

L'algorithme commence par trouver un cycle et le dessiner, c'est le premier sous-graphe H_1 admissible de la suite. Ensuite pour tout i, on cherche les segments S_j relativement à H_i. Et pour tout segment S_j on calcule l'ensemble des régions dans lesquelles il est possible de le plonger. Ces régions se calculent en regardant on sont placé les points d'intersections de S_j avec H_i. Si on trouve un segment qui peut être placé à un unique endroit on le place pour former H_{i+1}. Sinon on dessine un chemin entre deux points qui sont à l'intersection d'un S_j et de H_i. On itère alors l'algorithme.

L'algorithme est constructif, on peut obtenir une représentions planaire du graphe en entré. Il ne peut donc pas avoir de graphe non planaire déclaré planaire par l'algorithme. L'implémentation directe de cette algorithme s'exécute en $O(n^2)$.

5 Coloriages

Les graphes planaires ont d'abord été étudiés en tant que dual de carte. En 1852 Guthrie conjecture que n'importe quelle carte peut être coloriée avec au plus quatre couleurs. Ce résultat est prouvé en 1876 par Kempe et en 1880 par Tait avec une autre preuve. Onze ans plus tard Heawood montre que la preuve de Kempe est fausse, et l'année d'après Petersen montre que celle de Tait l'est aussi. En 1922 Franklin montre le résultat pour les cartes comportant au plus 25 pays. On a ensuite plusieurs preuves(Appel et Haken(1976), Robertson et al(1997)) par décomposition modulaire qui utilisent un ordinateur pour traiter les cas de base. En 2005 Gonthier et Werner ont formalisé la preuve en coq.

On a quelques résultats immédiatement : la réciproque est fausse car $K_{3,3}$ n'est pas planaire mais est 2-coloriable. Il faut au moins 4 couleurs pour colorier K_4 qui est planaire. Enfin sachant que dans un graphe planaire il existe un sommet de degré au plus 5, et qu'être planaire est une propriété stable par suppression de sommets, par une récurrence immédiate on montre la 6-coloriabilité. Enfin on a montré l'an dernier en td que les graphes planaires sont 5-coloriable.

Théorème 5.1. *Tout graphe planaire est 4-coloriable.*

Démonstration. Coq. □

Une autre chose intéressante à propos de la coloration et la liste-coloration.

Définition 5.0.2. *Soit une graphe $G = (V, E)$ et un ensemble de couleurs $C(v)$ pour chaque sommet $v \in V$. Une liste-coloration $c : V \to \cup_{v \in V} C(v)$ est une coloration ou pour tout $v \in V$, $c(v) \in C(v)$. Le nombre liste-chromatique χ_l*

est l'entier k tel que pour tout ensemble $C(v)$ de taille k il existe toujours une coloration du graphe.

Cet entier existe toujours puisqu'il est borné par le cardinal de V. Comme la coloration est le cas particulier de la liste coloration ou tous les $C(v)$ sont égaux $\chi \leq \chi_l$. C'est deux nombres ne sont pas toujours égaux $K_{2,4}$ fourni un contre exemple.

Théorème 5.2. *Tout graphe planaire G est 5-liste-coloriable, i.e. $\chi_l(G) \leq 5$*

Ce théorème prouve en particulier que les graphes planaires sont 5-coloriable.

Démonstration. Ajouter des arrêtes ne peut qu'augmenter le nombre liste-chromatique. Donc quand H est un sous-graphe de G, on a $\chi_l(H) \leq \chi_l(G)$. On peut donc faire la preuve avec G presque-maximal. On suppose donc que toutes les faces internes sont des triangles. Pour faire la preuve on utilise le lemme suivant qui permet l'induction.

Lemme 5.3. *Soit $G = (V, E)$ un graphe presque-maximal, et soit B le cycle délimitant la région extérieure. Si on suppose de plus sur les ensembles de couleurs $C(v), v \in V$:*

- *Deux sommets adjacents x ,y de B sont déjà coloriés (avec des couleurs différentes) α et β.*
- *$|C(v)| \geq 3$ Pour tout autres sommets v de B.*
- *$|C(v)| \geq 5$ pour tout les sommets v de l'intérieur.*

Alors la coloration de x, y peut être étendue en une coloration de G en choisissant les couleurs dans les listes. En particulier, $\chi_l(G) \leq 5$.

Pour $|V| = 3$ C'est trivial, nous n'avons qu'un sommet non colorié v et nous avons $|C(v)| \geq 3$, il y a donc une couleur restante. L'induction marche alors comme suit :

Cas 1 : Si B a une corde. Le sous-graphe G_1 délimité par $B_1 \cup \{uv\}$ et contenant x, y, u et v est presque maximal et donc a une 5-liste coloration par induction. Supposons que dans cette coloration les sommets u et v aient pour couleurs γ et δ. Considérons l'autre partie G_2 délimitée par B_2 et uv. Considérons u, v comme déjà coloriés, les hypothèses d'inductions sont vérifiées pour G_2. Donc G_2 peut être 5-liste colorié avec les couleurs disponibles, et donc G peut être 5-liste colorié.

Cas 2 : Si B n'a pas de corde. Soit v_0 le sommet adjacent à x sur B différent de y, et soit $x, v_1, \ldots, v_t, w$ les voisins de v_0. $G' = G - v_0$ est presque-maximal et a comme délimiteur $B' = (B - v_0) \cup \{v_1, \ldots v_t\}$. Puisque $|C(v_0)| \geq 3$ par hypothèse, il existe deux couleurs γ, δ dans $C(v_0)$ différentes de α. On remplace alors tous les ensembles de couleurs $C(v_i)$ par $C(v_i) - \{\gamma, \delta\}$. G' satisfait clairement les hypothèses et est donc 5-liste coloriable par induction.. En choisissant γ ou δ pour v_0, différent de la couleur de w, on peut étendre la coloration de G' à G tout entier. □

Terminons sur une conjecture à propos du nombre liste-chromatique.

Conjecture 2. *Pour tout graphes planaire G, $\chi_l(G) \leq \chi(G) + 1$. Soit avec le théorème des quatre couleurs :*

1. $\chi(G) = 2 \Rightarrow \chi_l(G \leq 3)$

2. $\chi(G) = 3 \Rightarrow \chi_l(G \leq 4)$
3. $\chi(G) = 4 \Rightarrow \chi_l(G \leq 5)$

On a montré le troisième cas. Le premier cas à été prouvé par Alon et Tarsi. Cependant il existe des contre exemple pour le cas 2. Actuellement le plus petit contre exemple a 63 sommets.

6 Extensions possible

Dans cette section on présente d'autres problèmes liés aux graphes planaires et les résultats associés sans preuves.

6.1 Nombre d'intersections

On cherche à mesurer de combien un graphe n'est pas planaire. Un paramètre naturel qui est en plus pratique pour le dessin effectif de graphes est le nombre d'intersections.

Définition 6.1.1. *Le nombre d'intersections $\nu(G)$ d'un graphe G est le nombre minimal d'intersections que l'on obtient en dessinant G dans le plan.*

On peut borner dans le pire cas (pour K_n) ce nombre, avec le théorème suivant du à R. Guy.

Théorème 6.1. $\frac{1}{80}n^4 + O(n^3) \leq \nu(K_n) \leq \frac{1}{64}n^4 + O(n^3)$

Pour les graphes avec suffisamment d'arrêtes Erdos et Guy ont conjecturé une borne inférieure prouvée ensuite par Ajtai et al.

Théorème 6.2. *Soit G un graphe simple.*
Si $e(G) \geq 4n(G)$, alors $\nu(G) \geq \frac{e(G)^3}{64n(G)^2}$

Du point de vue complexité, le calcul général de ν est NP-dur, mais devient polynomial si on cherche à voir si ν plus petit qu'un k fixé.

6.2 Planarité sur d'autre surfaces

La propriété "être planaire" est une propriété topologique, il est intéressant de voir ce qui se passe sur d'autres surfaces topologiques. En fait la propriété dépend du genre de la surface on peut donc parler du problème de planarité sur une surface de genre γ sans ambiguïté. Si $\gamma = 0$ on retrouve la notion de planarité sur la sphère qui est exactement celle du plan.

Sur une surface de genre supérieure on a plus de flexibilité pour plonger le graphe. Par exemple sur une surface de genre 1, typiquement un tore, il est possible de plonger $K_{3,3}$ ou K_5.

Sur une surface S_γ de genre γ, on obtient des résultats du même type que ceux obtenu sur une surface de genre 0. On a par exemple une formule d'Euler généralisée.

Théorème 6.3. *Si G est un graphe γ-planaire, avec n sommets, e arrêtes, alors il aura f face sur une S_γ surface avec*

$$n - e + f = 2 - 2\gamma$$

On a également une borne sur le nombre d'arrêtes.

Théorème 6.4. *Tout graphe γ-planaire avec n sommets a au plus $3(n-2+2\gamma)$ arrêtes.*

Pour ces deux résultats, la preuve est analogue au cas planaire.

Heawood a une formule pour la coloration d'une graphe γ-planaire, pour $\gamma > 0$. En fait la formule est aussi vraie pour $\gamma = 0$, et la preuve suis la même idée i.e. une induction sur le sommet de degré au plus c qui existe par formule d'Euler mais une inégalité ne marche pas de la même façon.

Théorème 6.5. *Si G est γ-planaire avec $\gamma > 0$, alors $\chi(G) \leq E(7+\sqrt{1+48\gamma}/2)$*

Enfin comme la propriété "être γ-planaire" est stable par mineur. On a d'après le théorème des mineurs un théorème de caractérisation à la Wagner, i.e. par une nombre fini de mineurs interdits. Sur une surface de genre 1, il y a plus de 800 mineurs interdits.

7 Conclusion

On a vu les résultats classiques concernant les graphes planaires. De nombreux algorithmes et caractérisations ont été trouvés depuis pour améliorer en pratique la reconnaissance et le dessin. Vu leurs intérêts pratiques les graphes planaires ont été très étudié et sont donc désormais une classe bien comprise de graphe, pour laquelle les problèmes classiques sont résolus et sont souvent assez simples dans leurs énoncés.

Références

[1] John M. Boyer, Pier Francesco Cortese, Maurizio Patrignani, and Giuseppe Di Battista. Stop minding your p's and q's : Implementing a fast and simple dfs-based planarity testing and embedding algorithm. In *Graph Drawing*, pages 25–36, 2003.

[2] John M. Boyer and Wendy J. Myrvold. On the cutting edge : Simplified o(n) planarity by edge addition. *J. Graph Algorithms Appl.*, 8(2) :241–273, 2004.

[3] Hubert De Fraysseix, Patrice Ossona De Mendez, and Pierre Rosenstiehl. Trémaux trees and planarity. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 17 (5) :1017–1029, 2006. Special Issue on Graph Drawing 05C10, 05C85, 05C75.

[4] Georges Gonthier. A computer-checked proof of the four colour theorem. Technical report, Microsoft Research Cambridge, 2005.

[5] Ronald Gould. *Graph Theory.* The Benjamin/Cumming Publishing Compagny, 1988.

[6] Wei-Kuan Shih and Wen-Lian Hsu. A new planarity test. *Theor. Comput. Sci.*, 223(1-2) :179–191, 1999.

[7] Douglas B. West. *Introduction to Graph Theory (2nd Edition).* Prentice Hall, August 2000.