Graphes et algèbre (min, +)

Valentin Blot

3 avril 2009

Table des matières

Introduction

Nous travaillons généralement en mathématiques sur des corps ou des anneaux, avec des lois + et $\times$. Dans ces structures, tout élément admet un inverse pour +. Nous étudierons ici une structure où la loi + est remplacée par la loi min et la loi $\times$ est remplacée par la loi +. On appelle cette structure l'algèbre min-plus. Dans cette structure, l'existence d'un inverse est remplacée par l'idempotence : $a+a=a$. Nous allons voir que la théorie des graphes est d'une grande aide pour étudier cette structure et que des liens forts existent entre la vision classique d'un graphe avec arêtes et sommets et la vision en terme de matrice d'adjacence à coefficients dans l'algèbre min-plus. Notamment, si M est la matrice d'un graphe orienté pondéré (avec la convention $(M)_{i,j} = \infty$ s'il n'y a pas d'arête entre les sommets i et j), alors dans l'algèbre min-plus, la matrice M^k représente les poids minimaux des chemins de longueur k. Nous montrerons également que lorsque le graphe est fortement connexe, M admet une unique valeur propre égale au poids moyen minimal des circuits et que cette valeur propre peut être calculée par l'algorithme de Karp que nous verrons également.

1 Approche formelle

Définition 1. Monoïde
Un monoïde est un ensemble E muni d'une loi interne $\oplus$:

- **associative** : $\forall a, b, c \in E, (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$
- possédant un **élément neutre** e : $\forall a \in E, a \oplus e = e \oplus a = e$

Le monoïde est dit **commutatif** si de plus $\forall a, b \in E, a \oplus b = b \oplus a$.

La notion de monoïde est une version faible de la notion de groupe où un élément n'admet pas nécessairement d'opposé.

La loi min ne fait pas de $\mathbb{R}$ un monoïde puisqu'il n'y a pas d'élément neutre. On rajoute donc ∞ qui joue alors le rôle d'élément neutre pour min. On pose donc à partir de maintenant $\mathbb{R}_{min} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et on vérifie aisément que $(\mathbb{R}_{min}, \min)$ est un monoïde commutatif.

On a cependant une propriété supplémentaire :
min est **idempotent** : $\forall a \in E, \min(a, a) = a$

Dans l'algèbre (min,plus), on utilise comme deuxième loi l'addition des réels étendue à ∞, et on vérifie là encore que $(\mathbb{R}_{min}, +)$ est un monoïde commutatif.

Définition 2. Semi-anneau
Un Semi-anneau est un ensemble E muni de deux lois internes $\oplus$ et $\otimes$ d'éléments neutres respectivement $\overline{0}$ et $\overline{1}$ vérifiant :

- $(E, \oplus)$ est un monoïde commutatif
- $(E, \otimes)$ est un monoïde
- $\otimes$ est **distributive** sur $\oplus$: $\forall a, b, c \in E, a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c$
- $\overline{0}$ est absorbant pour $\otimes$: $\forall a \in E, a \otimes \overline{0} = \overline{0} \otimes a = \overline{0}$

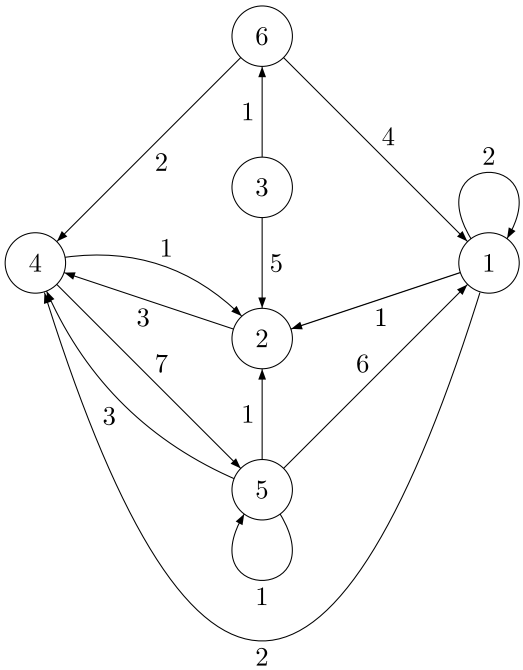
Le semi-anneau est dit **commutatif** si de plus $(E, \otimes)$ est un monoïde commutatif. Le semi-anneau est dit **idempotent** si de plus $\oplus$ est idempotent. Remarquons que les anneaux sont définis comme les semi-anneaux avec en plus l'existence d'opposés pour $\oplus$, ce qui permet de démontrer l'absorbance de $\overline{0}$.

$(\mathbb{R}_{min}, \min, +)$ est alors un semi-anneau commutatif idempotent en posant $\overline{0} = \infty$ et $\overline{1} = 0$. Nous noterons donc à partir de maintenant $\oplus$ la loi min et $\otimes$ la loi $+$.

Nous travaillerons également avec les ensembles $\mathbb{R}^n_{min}$ et $\mathbb{R}^{n \times n}_{min}$ munis des opérations suivantes pour $a \in \mathbb{R}_{min}, X, Y \in \mathbb{R}^n_{min}, A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}_{min}$:

- $(a \otimes X)_i = a \otimes X_i$
- $(X \oplus Y)_i = X_i \oplus Y_y$
- $(a \otimes A)_{i,j} = a \otimes A_{i,j}$
- $(A \oplus B)_{i,j} = A_{i,j} \oplus B_{i,j}$
- $(A \otimes B)_{i,j} = \bigoplus_{1 \leq k \leq n} (A_{i,k} \otimes B_{k,j})$

On prouve facilement la commutativité du produit matriciel grâce à la distributivité de $\otimes$ sur $\oplus$, la commutativité de $\oplus$ et l'associativité de $\oplus$ et $\otimes$.



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 1 & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 6 & 1 & \infty & 3 & 1 & \infty \\ 4 & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

FIG. 1 – Correspondance matrices/graphes

2 Analogie avec les graphes

Soit $G = (V, E, w)$ un graphe orienté pondéré dont on suppose les somets numérotés de 1 à $n = |V|$, on peut lui associer la matrice $A \in \mathbb{R}_{min}^{n \times n}$ telle que :

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, A_{i,j} = \begin{cases} w(ij) \text{ si } (ij) \in E \\ \infty \text{ si } (ij) \notin E \end{cases}$$

De même, à une matrice $A \in \mathbb{R}_{min}^{n \times n}$, on peut associer un graphe $G = (V, E, w)$ tel que :

- $V = \{1..n\}$
- $E = \{(ij) | A_{i,j} \neq \infty\}$
- $\forall (ij) \in E, w(ij) = A_{i,j}$

Il y a donc une correspondance exacte entre les deux notions et nous utiliserons donc alternativement l'une ou l'autre pour énoncer et démontrer des résultats. Nous donnons un exemple de cette correspondance Fig. 1.

En effet, l'opération min est difficile à étudier dans un cadre strictement mathématique et la théorie des graphes nous permet d'obtenir des résultats qui auraient sinon paru tout à fait non triviaux.

3 Interprétation de l'exponentiation de matrices

Dans le cadre de cette correspondance matrices/graphes, nous sommes en mesure de donner une interprétation des plus courts chemins d'un graphe. En effet, nous avons le résultat suivant :

Théorème 1. *Si G est un graphe et si M est sa matrice, le poids minimum d'un chemin du sommet i au sommet j de longueur p (en nombre d'arêtes traversées) est $(M^p)_{i,j}$.*

Démonstration. Nous montrons ce résultat par récurrence sur p :

- **si $p = 0$:** il existe un chemin de i à j de longueur 0 ssi $i = j$, ce qui correspond bien à la matrice $M^0 = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \cdots & \overline{0} \\ \overline{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \overline{0} \\ \overline{0} & \cdots & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \cdots & \infty \\ \infty & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \infty \\ \infty & \cdots & \infty & 0 \end{pmatrix}$
- **si la propriété est vraie pour p donné :**

$$\begin{aligned} \left(M^{p+1}\right)_{i,j} &= (M^p M)_{i,j} \\ &= \bigoplus_{k=1}^{n} \left((M^p)_{i,k} \otimes M_{k,j}\right) \\ &= \min_{k=1}^{n} \left((M^p)_{i,k} + M_{k,j}\right) \end{aligned}$$

Soit maintenant $(i, n_1, n_2, \cdots, n_p, j)$ un chemin de i à j de longueur $p+1$ (en nombre d'arêtes) et de poids minimal, alors :

1. $(i, n_1, n_2, \cdots, n_p)$ est un chemin minimal de i à n_p de longueur p, donc par hypothèse de récurrence :

$$w\left(i, n_1, n_2, \cdots, n_p\right) = (M^p)_{i,n_p}$$

donc :

$$w\left(i, n_1, n_2, \cdots, n_p, j\right) = (M^p)_{i,n_p} + M_{n_p,j}$$

2. de plus, soit k un sommet du graphe, par hypothèse de récurrence, il existe un chemin $(i, n'_1, n'_2, \cdots, k)$ de i à k de longueur p et tel que :

$$w\left(i, n'_1, n'_2, \cdots, k\right) = (M^p)_{i,k}$$

alors :

$$(M^p)_{i,k} + M_{k,j} = w\left(i, n'_1, n'_2, \cdots, k, j\right) \geq w\left(i, n_1, n_2, \cdots, n_p, j\right) = (M^p)_{i,n_p} + M_{n_p,j}$$

donc :

$$\forall 1 \leq k \leq n, (M^p)_{i,n_p} + M_{n_p,j} \leq (M^p)_{i,k} + M_{k,j}$$

donc :

$$\left(M^p\right)_{i,n_p} + M_{n_p,j} = \min_{k=1}^{n} \left\{ \left(M^p\right)_{i,k} + M_{k,j} \right\} = \bigoplus_{k=1}^{n} \left\{ \left(M^p\right)_{i,k} \otimes M_{k,j} \right\} = \left(M^{p+1}\right)_{i,j}$$

Ainsi, le poids minimum d'un chemin de i à j de longueur $p+1$ est $\left(M^{p+1}\right)_{i,j}$

□

Nous définissons maintenant le poids minimum d'un chemin de longueur quelconque de i à j. Ce poids est le minimum sur p des poids minimaux des chemins de i à j de longueur p, soit :

$$\min_{p\in\mathbb{N}} \left\{ \left(M^p\right)_{i,j} \right\} = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} \left(M^p\right)_{i,j}$$

que nous noterons $\left(M^*\right)_{i,j}$. Cependant, cette valeur n'est pas nécessairement bien définie. Plus précisément, $\left(M^*\right)_{i,j}$ n'est pas défini si $\left\{ \left(M^p\right)_{i,j} | p \in \mathbb{N} \right\}$ n'est pas minoré. Ici encore nous avons une interprétation en terme de graphes avec le théorème suivant :

Théorème 2. *M^* est bien définie $\Leftrightarrow$ G n'a pas de cycle de poids strictement négatif.*

Démonstration. Nous allons montrer la contraposée, c'est-à-dire :

$$M^* \text{ non définie } \Leftrightarrow \exists c \text{ cycle tel que } w(c) < 0$$

or :

$$\begin{aligned} M^* \text{ non définie } &\Leftrightarrow \exists i, j, \left\{ \left(M^p\right)_{i,j} | p \in \mathbb{N} \right\} \text{ non minoré} \\ &\Leftrightarrow \exists i, j, \forall a < 0, \exists p \in \mathbb{N}, \left(M^p\right)_{i,j} < a \end{aligned}$$

Montrons donc :

$$\exists i, j, \forall a < 0, \exists p \in \mathbb{N}, \left(M^p\right)_{i,j} < a \Leftrightarrow \exists c \text{ cycle tel que } w(c) < 0$$

1. $\Rightarrow$: Soient i, j tels que :

   $$\forall a < 0, \exists p \in \mathbb{N}, \left(M^p\right)_{i,j} < a$$

   soit :

   $$a = \min_{0 \le k < n} \left(M^k\right)_{i,j}$$

   et soit p minimal tel que :

   $$\left(M^p\right)_{i,j} < a$$

alors $p \geq n$, soit :

$$(n_1 n_2 \cdots n_{p+1})$$

un chemin de longueur p et de poids minimal (égal à $(M^p)_{i,j}$) avec $n_1 = i$ et $n_{p+1} = j$. Ce chemin passe par $p+1 > n$ sommets donc :

$$\exists k < l, n_k = n_l$$

Considérons alors le chemin :

$$(n_1 n_2 \cdots n_k n_{l+1} n_{l+2} \cdots n_{p+1})$$

qui est un chemin de i à j de longueur $p-(l-k)$ (réduit à $(n_1 n_2 \cdots n_k)$ si $l = p+1$). On a donc :

$$w(n_1 n_2 \cdots n_k n_{l+1} n_{l+2} \cdots n_{p+1}) \geq \left(M^{p-(l-k)}\right)_{i,j}$$

On a donc un cycle $(n_k n_{k+1} \cdots n_{l-1} n_l)$ de poids :

$$\begin{aligned} w(n_k n_{k+1} \cdots n_{l-1} n_l) &= w(n_1 n_2 \cdots n_{p+1}) - w(n_1 n_2 \cdots n_k n_{l+1} n_{l+2} \cdots n_{p+1}) \\ &= (M^p)_{i,j} - w(n_1 n_2 \cdots n_k n_{l+1} n_{l+2} \cdots n_{p+1}) \\ &\leq (M^p)_{i,j} - \left(M^{p-(l-k)}\right)_{i,j} \end{aligned}$$

Or $p-(l-k) < p$ donc par définition de p, $\left(M^{p-(l-k)}\right)_{i,j} \geq a > (M^p)_{i,j}$, donc :

$$w(n_k n_{k+1} \cdots n_{l-1} n_l) < 0$$

Et on a un cycle de poids strictement négatif.

2. $\Leftarrow$: Soit $c = (i n_1 \cdots n_{k-1} i)$ un cycle de poids strictement négatif, soit $a < 0$, nous allons montrer que :

$$\exists p \in \mathbb{N}, (M^p)_{i,i} < a$$

Notons :

$$b = w(i n_1 \cdots n_{k-1} i) < 0$$

Soit $p = kq$ avec $q > \frac{a}{b}$, et soit :

$$c_q = (i n_1 \cdots n_{k-1} i n_1 \cdots n_{k-1} i \cdots i)$$

le cycle c répété q fois, qui est donc de longueur $kq = p$. On a alors :

$$\begin{aligned} (M^p)_{i,i} &\leq w(c_q) \\ &\leq q w(c) \\ &\leq q b \\ &< a \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du théorème.

$\square$

Nous avons donc une condition nécessaire et suffisante pour que les chemins de poids minimal d'un graphe soient bien définis.

4 Algorithme de Bellman-Ford

Nous illustrons cette correspondance entre chemins minimaux et puissances de la matrice par l'algorithme de Bellman-Ford. Cet algorithme permet de détecter la présence de cycles de poids strictement négatif, et en cas de non-existence de ces cycles, de calculer, étant donné un sommet s fixé, pour chaque sommet i du graphe le poids du chemin minimal du sommet s au sommet i. Nous supposerons pour simplifier que le graphe est fortement connexe. Le principe est de calculer $\bigoplus_{k=0}^{n} XM^k$ itérativement avec :

$$X = \begin{pmatrix}\overline{0} & \cdots & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \cdots & \overline{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\infty & \cdots & \infty & 0 & \infty & \vdots & \infty\end{pmatrix}$$

où le $\overline{1} = 0$ est en s^e position. On a alors : G est sans cycle de poids strictement négatif $\Leftrightarrow \bigoplus_{k=0}^{n} XM^k \geq \bigoplus_{k=0}^{n-1} XM^k$, et si c'est le cas alors la i^e coordonnée de $\bigoplus_{k=0}^{n} XM^k$ est le poids minimal d'un chemin de s à i.

Ce calcul correspond à n produits matrice-vecteur, chacun d'eux se faisant en temps $O\left(n^2\right)$, l'algorithme s'éxécute donc en $O\left(n^3\right)$. Cependant, une représentation du graphe en listes d'adjacence permet dobtenir un temps d'éxécution en $O\left(nm\right)$ où m est le nombre d'arêtes, mais nous ne détaillerons pas cela ici.

Nous allons maintenant prouver la correction de l'algorithme.

Théorème 3. *G est sans cycle de poids strictement négatif* $\Leftrightarrow \bigoplus_{k=0}^{n} XM^k \geq \bigoplus_{k=0}^{n-1} XM^k$

Démonstration. La preuve est très similaire à celle du théorème 2 donc nous la détaillerons moins. Le principe est là encore que si un chemin de s à un sommet i de longueur n est moins lourd que n'importe quel chemin de s à i de longueur strictement inférieure à n, le chemin de longueur n passe nécessairement deux fois par le même sommet donc on peut en extraire un cycle de poids strictement négatif. Réciproquement, si $\bigoplus_{k=0}^{n} XM^k \geq \bigoplus_{k=0}^{n-1} XM^k$, utilisons le fait que :

$$X \geq Y \Rightarrow XC \geq YC$$

ce qui se montre de la manière suivante :

$$(XC)_i = \bigoplus_{k=1}^{n} X_k \otimes C_{k,i} \geq \bigoplus_{k=1}^{n} Y_k \otimes C_{k,i} = (YC)_i$$

On a donc :

$$\bigoplus_{k=0}^{n} XM^k \geq \bigoplus_{k=0}^{n-1} XM^k$$

$$\left(\bigoplus_{k=0}^{n} XM^k\right) \otimes M \geq \left(\bigoplus_{k=0}^{n-1} XM^k\right) \otimes M$$

$$\bigoplus_{k=1}^{n+1} XM^k \geq \bigoplus_{k=1}^{n} XM^k$$

$$\bigoplus_{k=1}^{n+1} XM^k \oplus XM^0 \geq \bigoplus_{k=1}^{n} XM^k \oplus XM^0$$

$$\bigoplus_{k=0}^{n+1} XM^k \geq \bigoplus_{k=0}^{n} XM^k \geq \bigoplus_{k=0}^{n-1} XM^k$$

Et donc par récurrence :

$$\forall p \geq n, \bigoplus_{k=0}^{p} XM^k \geq \bigoplus_{k=0}^{n-1} XM^k$$

Par conséquent,

$$\forall 1 \leq i \leq n, \forall p \geq n, \bigoplus_{k=0}^{p} \left(M^k\right)_{s,i} \geq \bigoplus_{k=0}^{n-1} \left(M^k\right)_{s,i}$$

Donc $\left\{\bigoplus_{k=0}^{p} \left(M^k\right)_{s,i}\right\}$ est minoré, et donc $(M^*)_{s,i}$ est bien définie, et donc d'après le théorème 2, G est sans cycle de poids strictement négatif. □

Et pour la deuxième partie de la correction, dans le cas où G est sans cycle de poids strictement négatif, on a le résultat suivant :

Théorème 4. *La i^e coordonnée de $\bigoplus_{k=0}^{n} XM^k$ est le poids d'un chemin minimal de s à i*

Démonstration. Puisqu'il n'y a pas de cycle de poids strictement négatif, $(M^*)_{s,i}$ est bien défini d'après le théorème 2 et on a de plus :

$$(M^*)_{s,i} = \bigoplus_{k=0}^{n-1} \left(M^k\right)_{s,i} = \bigoplus_{k=0}^{n} \left(M^k\right)_{s,i}$$

Sinon, tout chemin de poids minimal de s à i serait de longueur au moins n, donc si on en choisit un de longueur minimale, il contient un cycle, et en enlevant le cycle, le poids augmente strictement (car la longueur du chemin diminue strictement), ce qui signifie que le cycle était de poids strictement négatif.

De plus, le vecteur X est la s^e ligne de la matrice identité, donc le vecteur XM^kX est la s^e ligne de la matrice M^k, et donc le vecteur $\bigoplus_{k=0}^n XM^k$ est la s^e ligne de la matrice $\bigoplus_{k=0}^n M^k = M^*$. Donc $\left(\bigoplus_{k=0}^n XM^k\right)_i = (M^*)_{s,i}$ = poids du chemin minimal de s à i. $\square$

Nous remarquons ici que l'interprétation des graphes en tant que matrices à coefficients dans $\mathbb{R}_{min}$ nous permet d'avoir une bonne intuition pour trouver des algorithmes de plus courts chemins dans les graphes.

5 Analyse spectrale

Pour finir, nous nous intéressons aux valeurs propres d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}_{min}$, et à la manière dont les graphes nous permettent d'obtenir des résultats. Nous allons montrer plus précisément que si G est fortement connexe (on dit alors que sa matrice est irréductible), alors sa matrice admet une unique valeur propre égale au poids moyen minimal d'un cycle de G (G contient nécessairement des cycles puisqu'il est fortement connexe).

Tout d'abord, qu'est-ce qu'une valeur propre dans $\mathbb{R}_{min}$? Si λ est une valeur propre et si X est un vecteur propre associé, on a :

$$\forall 1 \leq i \leq n, (M \otimes X)_i = \lambda \otimes X_i$$

$$\forall 1 \leq i \leq n, \min_{k=1}^{n}(M_{i,k} + X_k) = \lambda + X_i$$

Nous définissons également le poids moyen d'un chemin comme :

$$\overline{w}\left(n_1 n_2 \cdots n_p\right) = \frac{w\left(n_1 n_2 \cdots n_p\right)}{p-1}$$

Théorème 5. $\lambda = \min_{c \text{ cycle de } G} \overline{w}\left(c\right)$ *est valeur propre de* M

Démonstration. Considérons la matrice N telle que $\forall i, j, N_{i,j} = M_{i,j} - \lambda$, alors le graphe associé à N ne comporte pas de cycle de poids strictement négatif. En effet, soit c un cycle du graphe associé à N, notons k sa longueur, et soit c' le même cycle dans G. alors $\overline{w}\left(c'\right) \geq \lambda$, donc $w\left(c'\right) \geq k\lambda$, or dans le graphe associé à N, chaque arête a vu son poids diminuer de λ, donc $w\left(c\right) = w\left(c'\right) - k\lambda$, donc $\overline{w}\left(c\right) = \overline{w}\left(c'\right) - \lambda \geq 0$. On sait donc que N^* est bien définie.

De plus, le graphe associé à la matrice N comporte au moins un cycle de poids nul, qui correspond au cycle de poids moyen λ dans G. Soit i un sommet de ce cycle de poids nul, et soit :

$$X = \begin{pmatrix} (N^*)_{1,i} \\ \vdots \\ (N^*)_{n,i} \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\forall j \neq i, \left(N^*\right)_{j,i} &= \left(\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} N^k\right)_{j,i} \\
&= \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \left(N^k\right)_{j,i} \\
&= \infty \oplus \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} \left(N^k\right)_{j,i} \\
&= \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} \left(N^k\right)_{j,i} \\
&= \left(\bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} N^k\right)_{j,i} \\
&= \left(N \otimes \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} N^k\right)_{j,i} \\
&= \left(N \otimes N^*\right)_{j,i}
\end{aligned}$$

Et de plus :

$$\begin{aligned}
\left(N^*\right)_{i,i} &= \left(\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} N^k\right)_{i,i} \\
&= \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \left(N^k\right)_{i,i} \\
&= 0 \oplus \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} \left(N^k\right)_{i,i}
\end{aligned}$$

Mais i appartient à un cycle de poids nul et de longueur non nulle donc $\exists k \in \mathbb{N}^*, \left(N^k\right)_{i,i} = 0$, et donc :

$$\begin{aligned}
0 \oplus \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} \left(N^k\right)_{i,i} &= \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} \left(N^k\right)_{i,i} \\
&= \left(\bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} N^k\right)_{i,i} \\
&= \left(N \otimes \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} N^k\right)_{i,i} \\
&= \left(N \otimes N^*\right)_{i,i}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\forall j, (N \otimes X)_j &= \bigoplus_{k=1}^{n} N_{j,k} \otimes X_k \\
&= \bigoplus_{k=1}^{n} N_{j,k} \otimes (N^*)_{k,i} \\
&= (N \otimes N^*)_{j,i} \\
&= (N^*)_{j,i} \\
&= X_j
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\forall j, (M \otimes X)_j &= \bigoplus_{k=1}^{n} M_{j,k} \otimes X_k \\
&= \bigoplus_{k=1}^{n} (N_{j,k} \otimes \lambda) \otimes X_k \\
&= \lambda \otimes \bigoplus_{k=1}^{n} N_{j,k} \otimes X_k \\
&= \lambda \otimes (N \otimes X)_j \\
&= \lambda \otimes X_j
\end{aligned}$$

Donc $MX = \lambda X$, donc λ est valeur propre de M. □

6 Algorithme de Karp

Nous présentons maintenant un algorithme permettant de calculer effectivement la valeur propre λ qui correspond au poids moyen minimum d'un circuit. Nous nous plaçons là encore dans le cas où G est fortement connexe, ce qui assure l'unicité de λ.

Théorème 6.

$$\lambda = \min_{i=1}^{n} \max_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(M^n)_{s,i} - \left(M^k\right)_{s,i}}{n-k} \right)$$

Démonstration. Plaçons nous tout d'abord dans le cas où $\lambda = 0$. On a alors :

$$\min_{c \text{ cycle de G}} \overline{w}(c) = 0$$

Donc G ne contient pas de cycle de poids strictement négatif, et contient au moins un cycle de poids nul. De plus, d'après la preuve du théorème 4 :

$$\forall 1 \leq i \leq n, (M^*)_{s,i} = \bigoplus_{k=0}^{n-1} \left(M^k\right)_{s,i}$$

donc :

$$\begin{aligned}\forall 1 \leq i \leq n, \max_{k=0}^{n-1} \left(\left(M^n\right)_{s,i} - \left(M^k\right)_{s,i} \right) &= \left(M^n\right)_{s,i} - \min_{k=0}^{n-1} \left(\left(M^k\right)_{s,i} \right) \\ &= \left(M^n\right)_{s,i} - \bigoplus_{k=0}^{n-1} \left(M^k\right)_{s,i} \\ &= \left(M^n\right)_{s,i} - \left(M^*\right)_{s,i}\end{aligned}$$

De plus :

$$\forall 1 \leq i \leq n, \left(M^*\right)_{s,i} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \left(M^k\right)_{s,i} \leq \left(M^n\right)_{s,i}$$

donc :

$$\min_{i=1}^{n} \max_{k=0}^{n-1} \left(\left(M^n\right)_{s,i} - \left(M^k\right)_{s,i} \right) = \min_{i=1}^{n} \left(\left(M^n\right)_{s,i} - \left(M^*\right)_{s,i} \right) \geq 0$$

Soit c un cycle de poids nul, notons l sa longueur, soit $i \in c$,

$$\left(M^*\right)_{s,i} = \bigoplus_{k=0}^{n-1} \left(M^k\right)_{s,i}$$

donc :

$$\exists 0 \leq k \leq n-1, \left(M^*\right)_{s,i} = \left(M^k\right)_{s,i}$$

soit donc $(sx_1 \cdots x_{k-1}i)$ un chemin de poids minimal de s à i de longueur k, soit p minimal tel que $k + pl \geq n$, et considérons le chemin $(sx_1 \cdots x_{k-1}ic^p)$. Il s'agit d'un chemin de s à i, de poids minimal car c est de poids nul. Tronquons ce chemin à la n^e arête et soit j le sommet d'arrivée. Alors, puisque $k < n$, $j \in c$. De plus, le chemin obtenu est un sous-chemin d'un chemin de poids minimal, donc il est lui-même de poids minimal. Ainsi :

$$\left(M^n\right)_{s,j} = \left(M^*\right)_{s,j}$$

Donc :

$$\min_{i=1}^{n} \max_{k=0}^{n-1} \left(\left(M^n\right)_{s,i} - \left(M^k\right)_{s,i} \right) = \min_{i=1}^{n} \left(\left(M^n\right)_{s,i} - \left(M^*\right)_{s,i} \right) = 0$$

donc :

$$\min_{i=1}^{n} \max_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\left(M^n\right)_{s,i} - \left(M^k\right)_{s,i}}{n-k} \right) = 0$$

Nous avons donc démontré le théorème dans le cas où $\lambda = 0$

Plaçons-nous maintenant dans le cas général. Considérons le graphe G avec une nouvelle fonction de poids :

$$w'(x) = w(x) - \lambda$$

Soit c un cycle de G, alors :

$$w'(c) = w(c) - |c|\,\lambda = |c|\,\overline{w}\,(c) - |c|\,\lambda \geq |c|\,\lambda - |c|\,\lambda = 0$$

Soit maintenant c un cycle de G de poids moyen minimal λ, alors :

$$w'(c) = w(c) - |c|\,\lambda = |c|\,\overline{w}\,(c) - |c|\,\lambda = |c|\,\lambda - |c|\,\lambda = 0$$

ainsi,

$$\min_{c \text{ cycle de G}} \overline{w'}\,(c) = 0$$

et on se retrouve dans le cas précédent. En appelant N la matrice associée à w', on a donc :

$$\min_{i=1}^{n} \max_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(N^n)_{s,i} - \left(N^k\right)_{s,i}}{n-k} \right) = 0$$

Mais on a également :

$$\forall k \in \mathbb{N}\, \left(N^k\right) = \left(\left(M\left(\lambda^{-1}\right)\right)^k \right) = \left(M^k\right)\left(\lambda^{-k}\right)$$

Soit avec les notations usuelles de l'algèbre :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall 1 \leq i,j \leq n, \left(N^k\right) = \left(M^k\right) - k\lambda$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\min_{i=1}^{n} \max_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(N^n)_{s,i} - \left(N^k\right)_{s,i}}{n-k} \right) &= \min_{i=1}^{n} \max_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\Big((M^n)_{s,i} - n\lambda\Big) - \Big(\left(M^k\right)_{s,i} - k\lambda\Big)}{n-k} \right) \\
&= \min_{i=1}^{n} \max_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(M^n)_{s,i} - \left(M^k\right)_{s,i}}{n-k} - \lambda \right) \\
&= \min_{i=1}^{n} \max_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(M^n)_{s,i} - \left(M^k\right)_{s,i}}{n-k} \right) - \lambda
\end{aligned}$$

Donc on obtient le résultat de notre théorème :

$$\lambda = \min_{i=1}^{n} \max_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(M^n)_{s,i} - \left(M^k\right)_{s,i}}{n-k} \right)$$

□

L'algorithme est du coup évident : On calcule tous les $\left(M^k\right)_{s,i}$ pour $0 \leq k \leq n$ par l'algorithme de Bellman-Ford, puis on calcule :

$$\min_{i=1}^{n} \max_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\left(M^n\right)_{s,i} - \left(M^k\right)_{s,i}}{n-k} \right)$$

avec une double boucle. L'algorithme s'éxécute donc en $O\left(\left(n^3\right)\right.$. Mentionnons tout de même qu'avec une représentation du graphe sous forme de listes d'adjacence, au prix de quelques optimisations, on obtient un algorithme en $O(nm)$ où m désigne le nombre d'arêtes.

7 Conclusion

Nous avons présenté ici une structure algébrique exotique (notamment à cause de l'idempotence de $\oplus$), difficilement étudiable en mathématiques pures, mais dont le parallèle avec les graphes orientés pondérés permet d'obtenir des résultats très théoriques, notamment l'existence d'une unique valeur propre dans le cas d'un graphe fortement connexe. De plus, les preuves obtenues dans ce formalisme nous permettent d'obtenir des algorithmes sur les graphes, notamment l'algorithme de Bellman-Ford permettant de calculer les chemins de poids minimal dans un graphe, ainsi que l'algorithme de Karp permettant de calculer le poids moyen minimal d'un cycle d'un graphe.

8 bibliographie

Références

[1] T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, C. Stein, Introduction to Algorithms, MIT Press (2001)

[2] J. Bang-Jensen, G. Gutin, Digraphs : theory, algorithms and applications, Springer (2002)

[3] F. Baccelli, G ; Cohen, G. Olsder, J.-P. Quadrat, Synchronization and Linearity, Wiley (1992)

[4] G. Cohen, S. Gaubert, J.P. Quadrat, L'algèbre des sandwichs, Pour la Science (Février 2005)

[5] J. Cochet-Terrasson, G. Cohen, S. Gaubert U, M. Mc Gettrick, J.-P. Quadrat, Numerical computation of spectral elements in max-plus algebra, Proc. IFAC Conf. on Syst. Structure and Control (1998)

[6] RM. Karp, A characterization of the minimum cycle mean in a digraph, Discrete mathematics (1978)

[7] A Dasdan, RK Gupta, Faster maximum and minimum mean cycle algorithms forsystem-performance analysis, IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems (1998)