Master 1 d'informatique fondamentale
École Normale Supérieure de Lyon

Rapport de cours de recherche
Vincent DELAITRE

3 Avril 2009

Hypergraphes et matroïdes

Cours de graphes

Table des matières

1 Introduction

Les hypergraphes généralisent la notion de graphe en introduisant la notion d'hyperarête étendant la notion d'arêtes de graphe en n'imposant pas de restriction sur le nombre de sommets. Ce relâchement sur les contraintes permet de généraliser des résultats de la théorie des graphes et l'étude de certaines classes d'hypergraphes, comme par exemple les familles de Sperner ou les matroïdes, permet même de factoriser certains théorèmes sur les graphes.

Les hypergraphes sont donc en général préférés aux graphes pour leur plus grande généralité. Cependant, cette flexibilité n'est qu'une facette d'une médaille dont le revers serait une augmentation de la complexité des algorithmes sur les hypergraphes par rapport à leur pendant sur les graphes.

Afin d'illustrer ce pouvoir de généralisation, nous introduirons tout d'abord les concepts de bases communs aux graphes et hypergraphes pour ensuite évoquer un aspect des liens entre graphes et hypergraphes via la notion de graphe représentatif. Puis nous aborderons le problème NP-complet de la 2-colorabilité pour les hypergraphes.

Nous continuerons ensuite avec une classe bien précise d'hypergraphes : les matroïdes. Nous insisterons sur leur lien avec les hypergraphes et présenterons enfin un exemple de théorème ayant en corollaire plusieurs théorèmes connus des graphes.

2 Hypergraphes

2.1 Une extension des graphes

La théorie des hypergraphes se propose de généraliser la théorie des graphes en introduisant le concept d'hyperarête. Outre la définition des hypergraphes, nous présentons dans cette partie les concepts communs aux graphes et hypergraphes.

Définition 1 (Hypergraphe)**.** Soit $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ un ensemble fini. Un **hypergraphe** sur X est une famille $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ de parties de X avec :

$$\begin{aligned} & E_i \neq \emptyset \qquad (i = 1, 2, \cdots, m) \\ & \bigcup_{i=1}^{m} E_i = X \end{aligned}$$

Les éléments de X sont les **sommets** et les $E_1, E_2, \cdots, E_m$ sont les **arêtes** de l'hypergraphe. Remarquons qu'avec cette définition, il ne peut y avoir de sommet isolé, c'est-à-dire n'appartenant à aucune arête. Cette contrainte permet de définir sans problème le dual d'un hypergraphe, comme nous le verrons par la suite.

Définition 2 (Hypergraphe simple)**.** Un **hypergraphe simple** sur X est un hypergraphe $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ dont aucune arête n'en contient une autre :

$$E_i \subseteq E_j \Rightarrow i = j$$

Ainsi, la définition des hypergraphes englobe celle des graphes. En effet, un graphe simple est un hypergraphe simple dont toutes les arêtes sont de cardinalité 2 et un multigraphe est un hypergraphe dont les arêtes sont de cardinalité au plus 2.

Définition 3 (Hypergraphe partiel et sous-hypergraphe)**.** Soit $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ un hypergraphe sur X.

On appelle **hypergraphe partiel** de H engendré par un ensemble $J \subseteq \{1, 2, \cdots, m\}$ la famille :

$H_J = (E_j / j \in J)$.

On appelle **sous-hypergraphe** de H induit par un ensemble $A \subseteq X$ la famille :

$H_A = (E_j / E_j \subseteq A \text{ pour } 1 \leq j \leq m)$.

Lorsque les arêtes de H sont de cardinalité au plus 2, nous retrouvons les définitions familières des graphes. Notons cependant qu'il existe une autre définition de sous - hypergraphe induit par A où H_A vaut $H_A = (E_j \cap A / 1 \leq j \leq m, E_j \cap A \neq \emptyset)$.

Définition 4. Pour un hypergraphe H sur X, on définit les notations suivantes :
- L'**ordre** de H est le nombre de ses sommets, noté $\mathbf{n(H)} = |X|$.
- Le **nombre d'arêtes** de H, noté $\mathbf{m(H)} = |H|$.
- Le **rang** de H, noté $\mathbf{r(H)} = \max_j |E_j|$
- L'**anti-rang** de H, noté $\mathbf{s(H)} = \min_j |E_j|$

On dit que H est **uniforme** si $r(H) = s(H)$. On dit que H est **r-uniforme** si H est simple uniforme de rang r.

Définition 5 (Hypergraphe complet)**.** On dit que H est **r-complet** si H est l'ensemble des parties de X de cardinalité r. Pour $n = |X|$, H est noté K_n^r.

Pour $r = 2$, nous retrouvons la notion de graphe complet.

Définition 6 (Degré)**.** Pour $x \in X$, on appelle étoile centrée en x l'hypergraphe partiel de H formé des arêtes contenant x, que l'on note $H(x)$. On définit le degré d'un sommet x comme étant $d_H(x) = m(H(x))$.

Théorème 1 (Théorème de Sperner - 1928)**.** Tout hypergraphe simple H d'ordre n vérifie :

$$\sum_{E \in H} \binom{n}{|E|}^{-1} \leq 1$$

De plus, le nombre d'arêtes vérifie :

$$m(H) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

Démonstration. Soit E une partie de X et π une permutation de $\{1, 2, \cdots, |X|\}$ dans les éléments de X. On dit que π débute par E si $E = \{\pi(j)/1 \leq j \leq |S|\}$. Une même permutation π ne peut débuter par deux parties E_i et E_j distinctes car H est un hypergraphe simple. Ainsi, toutes les permutations débutant par E sont distinctes, il y en a $|E|!(n - |E|)!$. Étant donné que le nombre total de permutations de X est $n!$, on a :

$$\sum_{E \in H} |E|!(n - |E|)! \leq n!$$

D'où la première inégalité en divisant par $n!$:

$$\sum_{E \in H} \binom{n}{|E|}^{-1} \leq 1$$

D'autre part, $\binom{n}{|E|} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ pour tout $E \in H$ donc :

$$|H|\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}^{-1} \leq \sum_{E\in H}\binom{n}{|E|}^{-1} \leq 1$$

D'ou la deuxième inégalité. Notons que cette borne est optimale et peut être atteinte en prenant $H = K_n^h$ si $n = 2h$, ou soit $H = K_n^h$ soit $H = K_n^{h+1}$ si $n = 2h+1$. $\square$

Nous retrouvons grâce à la première inégalité de ce théorème une propriété bien connue des graphes :

Corollaire 2. Soit G un graphe sans boucle ni arête multiple. Alors $m(G) \leq \binom{n(G)}{2}$.

2.2 Graphe représentatif

Nous allons maintenant aborder un aspect de la théorie des hypergraphes faisant intervenir les graphes.

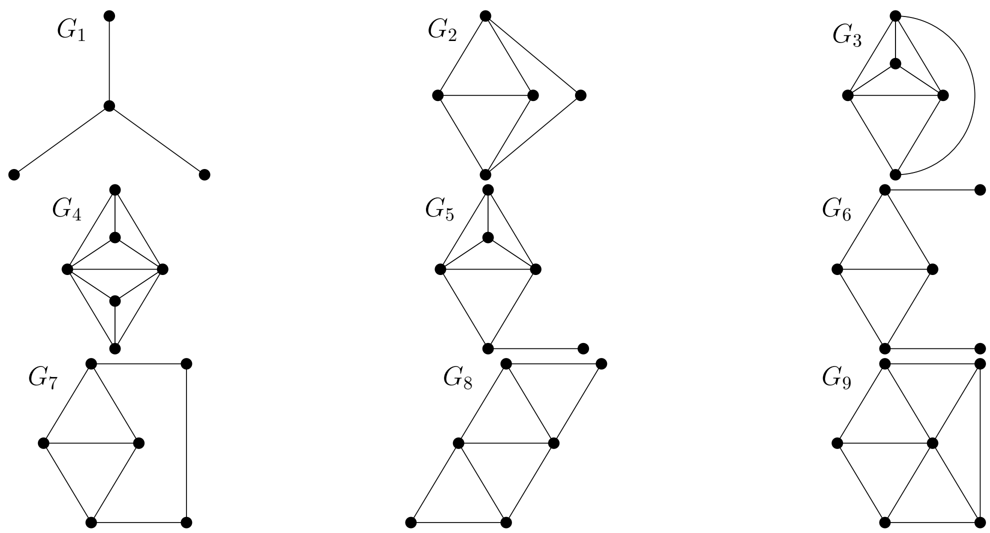
Définition 7 (Graphe représentatif)**.** Étant donné un hypergraphe $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ sur X, son **graphe représentatif** noté $L(H)$ est le graphe dont les sommets sont des points $e_1, e_2, \cdots, e_m$ représentant respectivement les arêtes de H et tels que e_i est relié à e_j si et seulement si $E_i \cap E_j \neq \emptyset$.

Il s'avère que nous avons le résultant suivant :

Théorème 3. Tout graphe est graphe représentatif d'un hypergraphe linéaire (c'est-à-dire, dont les arêtes sont d'intersection non vide deux-à-deux).

On sait par exemple caractériser le graphe représentatif d'un graphe simple :

Théorème 4 (Graphe représentatif d'un graphe simple - Beineke - 1968)**.** Un graphe est le graphe représentatif d'un certain graphe simple s'il ne contient aucun des sous-graphes induits suivants :



Pour finir, nous allons illustrer le lien entre le graphe représentatif d'un hypergraphe et son dual. Ce sera aussi l'occasion d'introduire quelques notions supplémentaires sur les hypergraphes.

Définition 8 (Dual)**.** Le **dual** d'un hypergraphe $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ sur $X = x_1, x_2, \cdots, x_n$ est l'hypergraphe $H* = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ dont les sommets $e_1, e_2, \cdots, e_m$ correspondent aux arêtes de H et tel que :

$$X_i = \{e_j / x_i \in E_j \text{dans H}\}$$

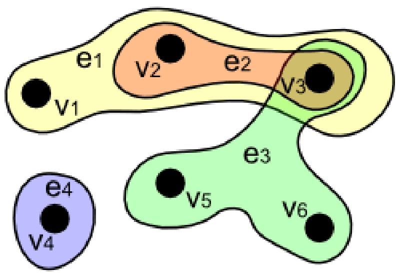


Fig. 1: Un hypergraphe...

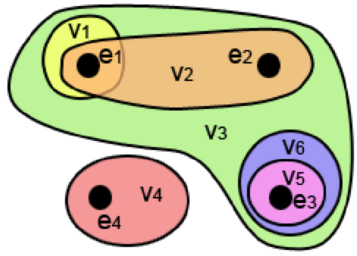


Fig. 2: ...et son dual !

Définition 9 (k-section)**.** Soit H un hypergraphe sur X. La **k-section** de H est l'hypergraphe noté $[H]_k$ dont les arêtes sont les ensembles $F \subseteq X$ vérifiant :
- soit $|F| = k$, et $F \subseteq E$ pour un $E \in H$
- soit $|F| < k$, et $F = E$ pour un $E \in H$

Théorème 5. Le graphe représentatif d'un hypergraphe H est la section $[H^*]_2$.

2.3 Coloration d'un hypergraphe

Intéressons-nous maintenant à la coloration d'hypergraphes. Nous allons notamment montrer que décider si un hypergraphe est 2-coloriable est NP-complet.

Définition 10 (k-coloration)**.** Soit $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ un hypergraphe et $k \geq 2$. Une **k-coloration** des sommets est une partition $(S_1, S_2, \cdots, S_k)$ de l'ensemble des sommets en k classes telle que chaque arête qui n'est pas une boucle rencontre au moins deux classes de la partition, ie :

$$\forall E \in H, |E| > 1 \Rightarrow E \nsubseteq S_i \text{ pour } 1 \leq i \leq k$$

On dit qu'un sommet est de couleur i s'il appartient à S_i. Le **nombre chromatique** $\chi(H)$ est le plus petit entier k pour lequel H admet une k-coloration.

Définition 11 (Stable)**.** Soit H un hypergraphe sur X et $S \subseteq X$. S est un **stable** de H s'il ne contient aucune arête E avec $|E| \geq 1$.

Ces définitions concordent avec celles des graphes. De plus, en notant $\alpha(H)$ la taille maximum d'un stable de H, nous avons encore la propriété suivante pour les hypergraphes :

Lemme 6. Si H est un hypergraphe d'ordre n, on a $n/\alpha(H) \leq \chi(H) \leq n + 1 - \alpha(H)$.

Comme nous l'avons vu, les hypergraphes permettent de généraliser des théorèmes sur les graphes. Nous verrons d'autres exemples par la suite. Cependant, une fois de plus, ce que nous gagnons à un endroit, nous le perdons à un autre endroit. Ainsi, certains algorithmes ont des complexités plus grandes pour les hypergraphes que pour les graphes.

Par exemple, nous ne connaissons pas d'algorithme polynômial pour le problème de 2-colorabilité pour les hypergraphes. Il s'avère d'ailleurs que celui-ci est NP-complet.

En effet, décider si un hypergraphe H défini sur X est 2-coloriable revient à trouver une partition X_1, X_2 de X telle que pour toute arête E_i de l'hypergraphe, $E_i \cap X_1 \neq \emptyset$ et $E_i \cap X_2 \neq \emptyset$. C'est exactement le problème NP-complet Set-Splitting. Nous pouvons effectuer une réduction à partir de 3-SAT pour le montrer.

Ainsi, considérons une instance de 3-SAT, ie un ensemble de variables V et une formule ϕ dont chaque clause est formée de trois littéraux de V. Posons alors $X = \{F\} \cup V \cup \{\overline{v}, v \in V\}$ avec F une variable fraiche. X correspond à l'ensemble des sommets de l'hypergraphe. Nous définissons aussi $E = \bigcup_{v\in\phi} E_v \bigcup_{c\in\phi} E_c$ avec $E_v = \{v, \overline{v}\}$ pour toute variable v de ϕ et $E_c = \{X, Y, \overline{Z}, F\}$ pour toute clause $c = X \vee Y \vee \overline{Z}$ de ϕ. E correspond à l'ensemble des arêtes de l'hypergraphe. Il ne reste plus qu'à montrer que la connaissance d'une solution sur l'une des instances de chaque problème entraîne la connaissance de la solution pour l'autre problème.

3 Matroïdes

Nous allons maintenant étudier une classe spécifique d'hypergraphes : les matroïdes. Nous illustrerons le pouvoir de généralisation de cette classe d'hypergraphes à travers quelques théorèmes.

3.1 Premières définitions

Définition 12 (Famille héréditaire)**.** Une **famille héréditaire** ou **idéal F** est une collection d'ensembles telle que tout sous-ensemble d'un ensemble de F appartient à F.

Un **système héréditaire M** sur E est un idéal $\mathbf{I_M}$ de sous-ensemble de E. Les éléments de I_M sont les **indépendants** de M. Les autres sous-ensembles de E sont les **dépendants**, notés $\mathbf{D_M}$.

On note $\mathbf{B_M}$ les indépendants maximaux de M, appelés **bases** de M. On note $\mathbf{C_M}$ les dépendants minimaux de M, appelés **circuits** de M.

Le **rang** d'un ensemble X de E est le cardinal d'un indépendant maximum de X. On définit la **fonction de rang** $r_M(X) = max\{|Y|/Y \subseteq X, Y \in I_M\}$.

Les **sur-bases** S_M sont les ensembles contenant une base. Les **sous-bases** H_M sont les ensembles maximaux ne contenant aucune base.

Nous pouvons montrer que pour définir entièrement un système héréditaire M, il suffit de spécifier l'un des B_M, I_M, D_M, S_M ou H_M. D'autre part, une famille héréditaire définit un hypergraphe. En effet, la famille des bases d'un système héréditaire est un hypergraphe de rang le cardinal maximal d'une base. Voyons maintenant ce qu'est un matroïde.

Définition 13 (Matroïde)**.** Un **matroïde** est un système héréditaire M sur E satisfiant la propriété suivante, dite propriété d'augmentation : pour tout $I_1, I_2 \in I_M$, si $|I_2| > |I_1|$ alors il existe $e \in I_2 - I_1$ tel que $I_1 \cup \{e\} \in I_M$.

Lemme 7 (Sous-modularité)**.** Soit M un matroïde sur E.

Pour tout $X, Y \subseteq E$, $r(X \cap Y) + r(X \cup Y) \leq r(X) + r(Y)$.

Il existe de nombreuses manières de définir un matroïde à partir d'un graphe. Parmi celles-ci, mentionnons le matroïde de cycle et le matroïde de partition.

Définition 14 (Matroïde de cycle)**.** Le **matroïde de cycle** $M(G)$ d'un graphe $G = (V, E)$ est le système héréditaire sur E dont les circuits sont les cycles de G. On dit qu'un système héréditaire M est un **matroïde graphique** s'il existe un graphe G tel que $M = M(G)$.

Les indépendants d'un matroïde de cycle M d'un graphe G sont les forêts de G, les bases sont les forêts maximales.

Définition 15 (Matroïde de partition)**.** Le **matroïde de partition** sur E induit par une partition $E_1, E_2, \cdots, E_k$ est défini par $I = \{X \subseteq E / \forall i, |X \cap E_i| \leq 1\}$.

Pour un graphe biparti G de sommets (U,V) et d'arêtes E, avec $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ on définit le matroïde de partition par $E_i = \{e \in E / u_i \in e\}$.

Remarquons alors qu'un ensemble d'arêtes $X \subseteq E$ est un couplage de G si et seulement si X est un indépendant commun aux matroïdes de partition induits par U et par V.

3.2 Dual et mineur d'un matroïde

Définition 16 (Dual)**.** Le **dual** d'un système héréditaire M sur E est le système héréditaire M^* dont les bases sont les complémentaires des bases de M. Les ensembles B_{M^*}, C_{M^*}, I_{M^*}, r_{M^*} sont respectivement les cobases, cocircuits, coidéaux et corang.

Les définitions suivantes sur les matroïdes correspondent aux notions de mineurs d'un graphe. Cela va nous permettre de raisonner par récurrence dans la démonstration du théorème d'intersection des matroïdes ci-dessous.

Définition 17 (Restrictions et contractions)**.** Pour un système héréditaire M sur E, la **restriction** de M à $F \subseteq E$, notée **M|F**, est définie par $I_{M|F} = \{X \subseteq F / X \in I_M\}$. La **contraction** de M à $F \subseteq E$, notée **M.F**, est définie par $I_{M.F} = \{X \subseteq F / X \cup \overline{F} \in S_M\}$.

Dans le cas où M est le matroïde de cycle d'un graphe G, les opérations de restriction ou de contraction à F pour le matroïde correspondent aux opérations de suppression et de contraction des arêtes de $\overline{F}$ pour G.

Lorsque $F = E - e$ pour un certain $e \in E$, on note $M|F \equiv M - e$ et $M.F \equiv M.e$.

Lemme 8. Lors d'une suppression ou contraction d'une arête e d'un graphe G, le matroïde de cycle associé se comporte comme suit :

$$\begin{array}{ll} M(G-e) = M(G) - e & M^*(G-e) = M^*(G).e \\ M(G.e) = M(G).e & M^*(G.e) = M^*(G) - e \end{array}$$

Théorème 9. Étant donné un $F \subseteq E$ et M un matroïde sur E, $M|F$ et $M.F$ sont des matroïdes sur F. Les fonctions de rang associées sont $r_{M|F} = r_M(X)$ et $r_{M.F}(X) = r_M(X \cup \overline{F}) - r_m(\overline{F})$.

Les théorèmes suivants et les corollaires qui en découlent permettent d'illustrer les relations entre matroïdes et graphes :

Théorème 10 (Whitney - 1933a)**.** Un graphe G est planaire si et seulement si le dual de son matroïde de cycle $M^*(G)$ est graphique.

3.3 Intersection de matroïdes

Définition 18. Étant donné des systèmes héréditaires M_1, M_2 sur E, l'**intersection** de M_1 et M_2 est le système héréditaire dont l'ensemble des indépendants est $\{X \subseteq E/X \in I_1 \cap I_2\}$.

Théorème 11 (Edmonds - 1970 - Théorème d'intersection des matroïdes)**.** Étant donné des matroïdes M_1 et M_2 sur E, la taille du plus grand indépendant commun satisfait l'égalité suivante :

$$\max\{|I|/I \in I_1 \cap I_2\} = \min_{X\subseteq E}\{r_1(X) + r_2(\overline{X})\}$$

Démonstration. Soit $I \in I_1 \cap I_2$ et $X \subseteq E$.
$I \cap X$ et $I \cap \overline{X}$ sont encore des indépendants de M_1 et M_2, et, par définition du rang, on a l'inégalité $|I| = |I \cap X| + |I \cap \overline{X}| \leq r_1(X) + r_2(\overline{X})$.

Montrons par induction sur $|E|$ que l'on a en fait l'égalité du théorème. Pour $|E| = 0$, l'égalité est trivialement vérifiée puisqu'on a 0 de part et d'autre.

Supposons maintenant que $|E| > 0$. Si tout élément de E est une boucle (c'est-à-dire un circuit de taille 1) de M_1 ou M_2, alors l'unique indépendant de M_1 et M_2 est l'ensemble vide. Encore une fois, on a $|I| = 0 = r_1(X) + r_2(\overline{X})$ et l'égalité est vérifiée.
Sinon, il existe $e \in E$ qui n'est une boucle ni dans M_1 ni dans M_2. On pose $F = E - e$ et on considère les matroïdes $M_1|F$, $M_2|F$, $M_1.F$ et $M_2.F$.

On pose $k = \min_{X\subseteq E}\{r_1X + r_2(\overline{X})\}$. On cherche un indépendant de taille k commun à M_1 et M_2. On raisonne par l'absurde en supposant qu'ils n'en n'ont pas. Alors $M_1|F$ et $M_2|F$ n'ont pas d'indépendant commun de taille k (sinon, on aurait I un tel indépendant et d'après le théorème 9, $r_{M_1|F}(I) = r_{M_1}(I) = k$ et $r_{M_2|F}(I) = r_{M_2}(I) = k$, c'est-à-dire I indépendant de M_1 et de M_2 de taille k, absurde).

De même, $M_1.F$ et $M_2.F$ n'ont pas d'indépendant commun de taille $k-1$. En effet, dans le cas contraire, soit I un tel indépendant. Toujours d'après le théorème 9, on aurait alors $r_{M_1.F}(I) = r_{M_1}(I \cup \{e\}) - r_{M_1}(\{e\})$. Comme e n'est pas une boucle, e est un indépendant de M_1, donc $r_{M_1}(\{e\}) = 1$. Ainsi $r_{M_1}(I\cup\{e\}) = (k-1)+1$. Ainsi $I\cup\{e\}$ est un indépendant de M_1. Il en est de même pour M_2, si bien que I est un indépendant commun de M_1 et M_2 de taille k, absurde encore une fois.

On n'a donc pas d'indépendant commun de tailles respectives k et $k-1$. On applique alors l'hypothèse d'induction aux matroïdes ($M_1|F$, $M_2|F$) et ($M_1.F$,$M_2.F$), et grâce à l'inégalité démontrée en début de preuve, on a :

$$\begin{aligned} r_1(X) + r_2(F - X) &\leq k - 1 \quad \text{pour un certain } X \subseteq F \\ r_1(Y \cup \{e\}) - 1 + r_2(F - Y \cup \{e\}) - 1 &\leq k - 2 \quad \text{pour un certain } Y \subseteq F \end{aligned}$$

Étant donné que $(F - Y) \cup \{e\} = \overline{Y}$ et $F - X = \overline{X + e}$, on obtient en sommant les deux inégalités :

$$r_1(X) + r_2(\overline{X \cup \{e\}}) + r_1(Y \cup \{e\}) + r_2(\overline{Y}) \leq 2k - 1$$

On va maintenant appliquer l'hypothèse de sous-modularité (lemme 7) pour r_1 et r_2. On pose $U = X \cup \{e\}$ et $V = Y \cup \{e\}$, ce qui donne :

$$r_1(X \cup V) + r_1(X \cap V) + r_2(\overline{Y} \cup \overline{U}) + r_2(\overline{Y} \cap \overline{U}) \leq 2k - 1$$

Étant donné que $\overline{Y} \cap \overline{U} = \overline{X \cup V}$ et que $\overline{Y} \cup \overline{U} = \overline{X \cap V}$, si on pose $Z_1 = X \cup V$ et $Z_2 = X\cap V$, on a $r_1(Z_1)+r_2(\overline{Z_1})+r_1(Z_2)+r_2(\overline{Z_2}) \leq 2k-1$. Mais comme pour tout $Z \subseteq E$

on a $k \leq r_1(Z) + r_2(\overline{Z})$ (démontré au début de la preuve), alors on obtient $2k \leq 2k - 1$, ce qui est absurde. Ainsi, M_1 et M_2 ont un indépendant commun de taille k, d'où l'égalité du théorème. □

Ce théorème sur les matroïdes regroupe en fait plusieurs théorèmes sur les graphes, notamment le célèbre théorème de König et celui de Gallai-Milgram.

Corollaire 12 (König - 1931)**.** Dans un graphe biparti, un couplage maximal et une couverture par sommet minimale ont la même taille.

Démonstration. Soit G un graphe biparti de sommets U_1, U_2. L'idée est de raisonner sur les matroïdes de partition M_1 et M_2 induits par U et V. Comme on l'a vu dans la définition des matroïdes de partition, un couplage de G est un idéal commun de M_1 et M_2. Un idéal maximal est de taille $\max\{|I|/I \subseteq I_1 \cap I_2\}$.

D'autre part, il faut remarquer qu'étant donné X_1 et X_2 tels $X_1 \cup X_2 = E$, on a une couverture par sommet de taille $r_1(X_1) + r_2(X_2)$ en utilisant les sommets de U_1 pour couvrir X_1 et ceux de U_2 pour couvrir X_2. On peut montrer que toute couverture par sommet peut se ramener à cette forme si bien que la taille minimum d'une couverture par sommet est $\min_{X \subseteq E} \{r_1(X) + r_2(\overline{X})\}$.

Le théorème d'intersection des matroïdes nous donne l'égalité des deux. □

Corollaire 13 (Gallai-Milgram)**.** Soit un graphe G. Pour toute orientation acyclique de G, les sommets peuvent être couvert par au plus $\alpha(G)$ chemins disjoints, où $\alpha(G)$ est le cardinal maximal d'un indépendant de G.

4 Conclusion

À travers ce petit tour d'horizon de la théorie des hypergraphes, nous avons pu constater que celle-ci partageait de nombreuses notions avec la théorie des graphes. Ces notions, étendues aux hypergraphes, débouchent sur des résultats plus généraux. Ainsi, nous pouvons par exemple mentionner, en plus de ce que nous avons déjà vu, tout une série de famille d'hypergraphes qui généralise les résultats sur les graphes bipartis (cf hypergraphes unimodulaires, etc...).

Nous avons aussi abordé les matroïdes, une classe particulière d'hypergraphes. Il en existe d'autres, citons par exemple les familles de Sperner qui correspondent exactement aux hypergraphes simples. Concernant les matroïdes, de nombreux autres exemples du lien entre graphes, hypergraphes et matroïdes existent, comme par exemple un théorème sur la jonction d'hypergraphes et le rang du matroïdes associé, qui donne en corollaire des propriétés sur le nombre d'indépendants d'un matroïde, elles même redonnant plusieurs résultats des graphes, connus par ailleurs mais démontrés de manière bien plus compliquée.

Ainsi, la théorie des hypergraphes est fertile en formalisation et reformulation de théorèmes sur les graphes et permet d'aborder certains problèmes avec un point de vue différent. Mais elle est aussi auto-suffisante et ne s'inscrit en rien sous une forme de dépendance vis-à-vis des graphes, ce qui en fait un outils général et puissant.

Références

[1] C. Berge and Gauthier-Villars, “Hypergraphes, combinatoires des ensembles finis”, 1987.

[2] D. West and Prentice Hall, “Introduction to graph theory”, 2001.

[3] Michael Garey and David S. Johnson, “Computers and intractability - a guide to NP-completeness”, 1979.

[4] I. Anderson, “Combinatorics of finite sets”, 1989.