

Théorie des graphes - Master d'informatique fondamentale  
Ecole Normale Supérieure de Lyon

Professeurs : Eric Thierry et Christophe Crespelle

# Réseaux de Pétri et modèles proies-prédateurs

---

Audrey LUSTIG

Lyon, le 8 décembre 2010

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Le modèle de Lotka-Volterra</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>RdP places/transitions généralisés</b>	<b>4</b>
3.1	Définitions formelles . . . . .	4
3.2	Comportement d'un RdP . . . . .	5
3.3	Formalisme algébrique . . . . .	6
3.4	Ecriture du modèle sous forme de RdP . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Propriétés des RdP</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Algèbre tropicale</b>	<b>11</b>
5.1	Définitions formelles . . . . .	12
5.2	Propriétés spectrales de la matrice . . . . .	13
5.3	Equations de récurrence des RdP . . . . .	14
5.4	Modèle de Lotka-Volterra . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>16</b>

## 1 Introduction

Dans le cadre du module "théorie des graphes", il m'a été proposé de travailler sur un problème de stabilité d'un système proie-prédateur. L'article de Zvi Retchkiman Konigsberg [4] a constitué le point de départ de cette étude. Il propose de combiner les théories de stabilité de Lyapunov et d'algèbres tropicales afin de résoudre un problème de stabilité d'un modèle de type Lotka-Volterra, traité comme un système à événements discrets et modélisé à partir de réseaux de Petri (RdP). Ce présent rapport a pour but premier de détailler les différentes notions présentées dans l'article en accordant une importance toute particulière aux RdP et leurs propriétés.

## 2 Le modèle de Lotka-Volterra

C'est durant la première moitié du XXe siècle, que l'étude de la dynamique de plusieurs espèces en interaction connue un essor considérable. C'est à cette époque appelée "*l'âge d'or de l'écologie théorique*" [3] que furent développés les premiers modèles basés sur des comportements de type compétition entre deux espèces. La paternité du premier modèle conçu pour transcrire ce genre d'interactions revient à Alfred J. Lotka et Vito Volterra.

Considérant deux espèces, la première, la proie  $x(t)$ , aurait si elle était seule une croissance exponentielle. La seconde, le prédateur  $y(t)$ , se nourrit exclusivement de la première et en l'absence de proie s'épuise et disparaît progressivement. La mise en équation de la fonction représentant la prédation repose sur les hypothèses suivantes :

- pour qu'il y ait prédation, il faut qu'il y ait rencontre entre les deux espèces et le nombre de rencontres est proportionnel au nombre des individus,
- la prédation de la proie est équivalente à la croissance du prédateur.

Ceci aboutit au célèbre modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra [3] :

$$(\mathcal{S}) = \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \gamma xy \\ \frac{dy}{dt} = -\beta y + \delta xy \end{cases} \quad (1)$$

où  $\alpha$  représente le taux de croissance de la population proie en l'absence de prédateurs,  $\gamma$  le taux de prédation des prédateurs sur les proies,  $\beta$  le taux de mortalité des prédateurs en l'absence de proies et  $\delta$  le taux de croissance des prédateurs du fait de leur prédation.

Une étude qualitative du système  $\mathcal{S}$  permet de prédire des oscillations pour la population de proie et celle des prédateurs [5] : les prédateurs prospèrent lorsque les proies sont nombreuses, mais finissent par épuiser leurs ressources et déclinent. Lorsque la population de prédateur a suffisamment diminué, les proies profitant du répit se reproduisent et leur population augmente de nouveau. Cette dynamique se poursuit en un cycle de croissance et déclin. On parle d'équilibre neutre du système.

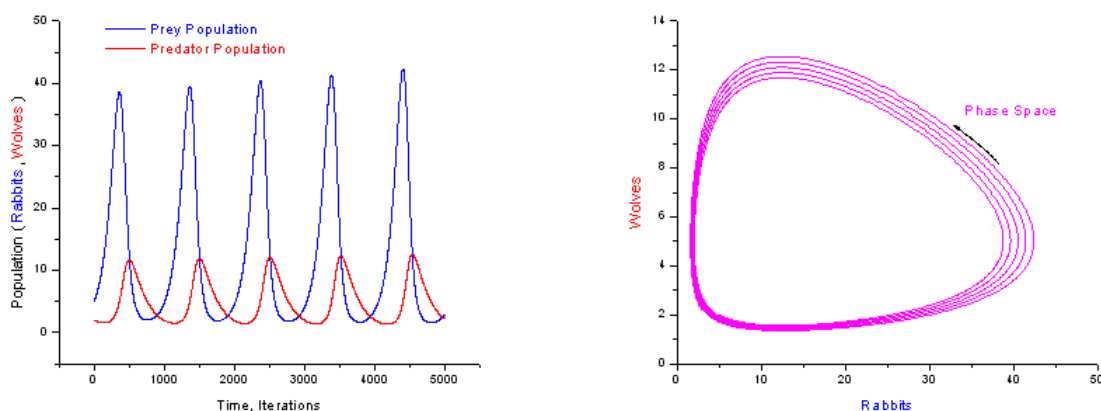


FIG. 1 – Modèle de Lotka-Voterra simulé

Ce modèle idéal et simplifié, bien qu'il est fait l'objet, dans de nombreux ouvrages et articles, de critiques lui reprochant son manque de réalisme, est devenu dans l'étude des systèmes dynamiques non-linéaires une sorte de référence. A l'heure actuelle, le seul exemple d'écosystème prédateur-proie présentant une évolution cyclique est la célèbre statistique de l'Hudson's Bay Company portant sur des lièvres et des lynx au Canada [2].

L'article étudié revisite ce modèle en proposant une nouvelle approche qui consiste à considérer ce système proie-prédateur comme un système à évènements discrets. Pour cela les interactions proies-prédateurs ont été modélisées à l'aide d'un RdP places/transitions temporisé.

### 3 RdP places/transitions généralisés

Historiquement, les RdP ont été introduit par Carl Adam Petri en 1962 dans le cadre de la théorie des automates. Depuis les années 70, les travaux sur les RdP ont connu un essor considérable. Aujourd'hui, la littérature sur les RdP est fort riche, et comprend en particulier de nombreux résultats analytiques. Ici nous ne présenterons que les RdP de type places/transitions généralisés qu'à des fins de modélisation.

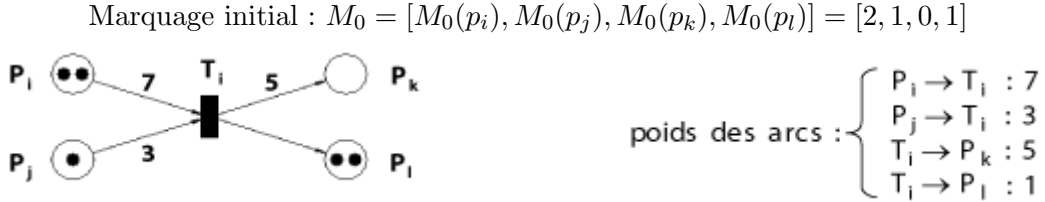
#### 3.1 Définitions formelles

**Définition 1 (RdP places/transitions généralisé).** *Un RdP places/transitions PN est un quadruplet  $(P, T, F, W)$  défini par la donnée :*

- d'un ensemble fini non vide de **places**  $\mathbb{P} = P_1, \dots, p_m$ , où  $|P|$  est le nombre de places ;
- d'un ensemble fini non vide de **transitions**  $\mathbb{T} = t_1, t_2, \dots, t_n$ , où  $|T|$  est le nombre de transitions, avec  $\mathbb{P} \cap \mathbb{T} = \emptyset$  et  $\mathbb{P} \cup \mathbb{T} \neq \emptyset$  ;
- d'un ensemble d'**arcs**  $\mathbb{F} \subset (\mathbb{P} \times \mathbb{T}) \cup (\mathbb{T} \times \mathbb{P})$  ;
- d'une **relation d'incidence**  $W : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{N}_1^+$ , où  $\mathbb{N}_{n_0}^+ = \{n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + k, \dots\}$ .

**Définition 2 (RdP marqué).** Un RdP places/transitions marqué se définit par un couple  $(PN, M_0)$  dans lequel  $PN$  est un RdP places/transitions et  $M_0 : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{N}$  est une application appelée marquage de  $PN$ , qui associe à toute place  $p_i \in \mathbb{P}$  un entier positif  $M_0(p_i)$  appelé marquage initial de la place  $p_i$ .

Ce marquage peut être représenté graphiquement par des jetons. On associe alors un nombre de jetons à une place.



$$\text{poids des arcs : } \begin{cases} P_i \rightarrow T_i : 7 \\ P_j \rightarrow T_i : 3 \\ T_i \rightarrow P_k : 5 \\ T_i \rightarrow P_l : 1 \end{cases}$$

### 3.2 Comportement d'un RdP

Le marquage des places d'un RdP représente l'état du système modélisé à un instant donné. Ce marquage peut être modifié au cours du temps par le franchissement de transitions. Pour pouvoir être franchie, une transition doit être validée. Informellement, une transition est validée lorsque le nombre de jetons dans chacune des places d'entrée est supérieur ou égal au poids de l'arc qui la relie à la transition.

**Définition 3 (Franchissabilité d'une transition).** Soit  $PN = (P, T, F, W, M_0)$  un RdP marqué. Soit  $M_k(p_i)$  le nombre de jetons à la place  $p_i \in P$  au temps  $k$ . La transition  $t_i \in T$ , est dite franchissable à partir de  $M_k(p_i)$  si et seulement si :

$$M_k(p_i) \geq W(p_i, t_i) \quad (2)$$

On note alors  $M_k(t_i) >$ .

Lorsque cette condition est satisfaite, le franchissement consiste à enlever de chacune des places d'entrée, un nombre de jetons égal au poids de l'arc qui relie la place à la transition et à déposer, dans les places de sortie, un nombre de jetons égal au poids de l'arc qui relie la transition aux places de sortie.

**Définition 4 (Franchissement d'une transition).** Soit  $PN = (P, T, F, W, M_0)$  un RdP marqué et  $t_j \in T$  une transition franchissable à partir de  $M_k(p_i)$ . Le franchissement de  $t_j$  engendre la création d'un nouveau marquage  $M_{k+1}(p_i) \in PN$  à partir de  $M_k(p_i)$ , défini par :

$$M_{k+1}(p_i) = M_k(p_i) + W(t_j, p_i) - W(p_i, t_j) \quad (3)$$

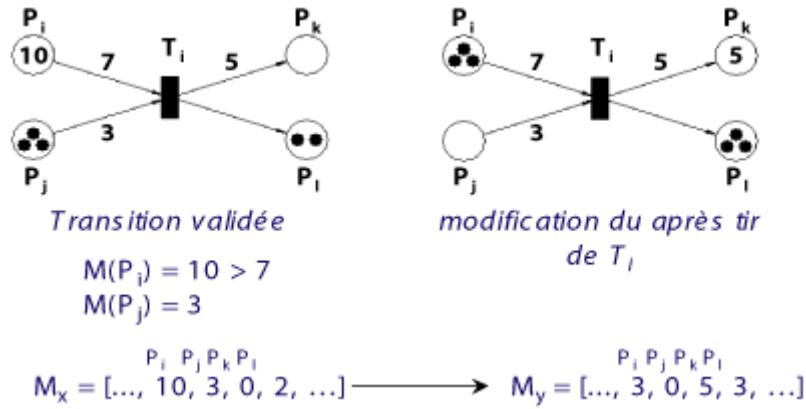


FIG. 4 – Franchissement d’une transition

Jusqu’à présent aucune durée n’est liée au franchissement des transitions et/ou au temps de séjour des marques dans les places. Cependant il y a beaucoup de systèmes à événements discrets dont l’évolution dépend du temps. La nécessité de modéliser et d’étudier de tels systèmes a donné naissance aux RdP temporisés. Ces réseaux ont été introduit par Ramchandani, dans sa thèse de 1974 [8].

**Définition 5 (RdP P-temporisé).** Soit  $TPN = \{P, T, F, W, M_0, V\}$  un RdP temporisé où  $\{P, T, F, W, M_0\}$  est défini comme précédemment et  $V = \{V_i : p_i \in P\}$  est une structure de temps.  $V$  est une application de temps d’indisponibilité, assignant à chaque marque  $k$  dans la place  $p_i$  une durée  $v_{i,k}$ .  $v_{i,k}$  est la durée qui reste à la marque  $k$  pour terminer son temps de séjour minimal dans la place  $p_i$ .

### 3.3 Formalisme algébrique

La définition mathématique d’un RdP permet de reformuler les définitions précédentes sous la forme d’équations d’algèbre linéaire. Dans la suite, on notera  $|P| = n$  le nombre de places et  $|T| = m$  le nombre de transitions.

**Définition 6 (Vecteur Canonique).** Le vecteur canonique  $\vec{u}_{t_i}$  associé à une transition  $t_i$  est le vecteur  $\mathbb{N}^n$  dont la  $i^{ime}$  composante vaut 1 et les autres sont nulles :  $\vec{u}_{t_i} = [\delta_1^i, \delta_2^i, \dots, \delta_n^i]^T$ .

**Définition 7 (Vecteur de Marquage).** A chaque temps  $k$ , on associe au réseau un vecteur de marquage  $M_k$  défini par  $M_k = [M_k(p_1), M_k(p_2), \dots, M_k(p_m)]^T$ , où  $M_k(p_i)$  est le nombre de jetons contenu à la place  $p_i \in P$  à l’instant  $k$ .

**Définition 8 (Matrices d’incidence).** Les matrices d’incidence arrière  $A^-(n \times m)$ , d’incidence avant  $A^+(n \times m)$  et d’incidence  $A(n \times m)$  sont définies par :

$$- \forall p_i \in P, \forall t_j \in T, A^-(p_i, t_j) = a_{ij}^- \Leftrightarrow W(p_i, t_j) = a_{ij}^-;$$

- $\forall p_i \in P, \forall t_j \in T, A^+(p_i, t_j) = a_{ij}^+ \Leftrightarrow W(t_j, p_i) = a_{ij}^+$ ;
- $\forall p_i \in P, \forall t_j \in T, A(p_i, t_j) = a_{ij}^+ - a_{ij}^-$ .

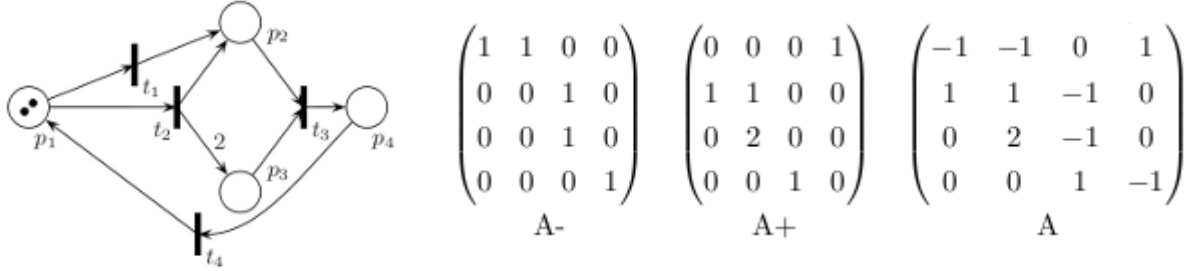


FIG. 5 – Un réseau de Petri et ses matrices d'adjacence

**Equation d'état :** Ces notations nous permettent alors de redéfinir les équation (2) et (3) de la façon suivante :

$$\forall p_i \in P, t_i \in T \text{ est franchissable si et seulement si : } a_{ij}^- \leq M_k(p_j) \quad (4)$$

$$M_{k+1} = M_k + Au_k \quad (5)$$

On généralise les équations précédentes aux tirs de séquences de transitions franchissables. Pour cela, on définit le vecteur de Parikh associé à une séquence de tirs comme suit :

**Définition 9 (Vecteur de Parikh).** Soit  $PN = (P, T, F, W, M_0)$  un RdP. Soit  $u = u_0, u_1, \dots, u_{d-1}$  une suite de  $d$  transitions de  $T$ . Le vecteur de Parikh  $\vec{u}$  est le vecteur dont la  $j^{\text{ème}}$  composante est égale au nombre d'occurrences de la transition  $t_j \in T$  dans la séquence  $u : u = \sum_{k=0}^{d-1} u_k$ .

En utilisant le vecteur de Parikh et les notations algébriques précédentes, on obtient une propriété classique des RdP.

**Proposition 1 (Équation d'état ou équation fondamentale).** Soit  $(PN, M_0)$  un RdP. Si la suite de  $d$  transitions  $u = u_0, u_1, \dots, u_{d-1}$  est franchissable depuis le marquage  $M$  et donne le marquage  $M'$ , on a :

$$M' = M + Au \quad (6)$$

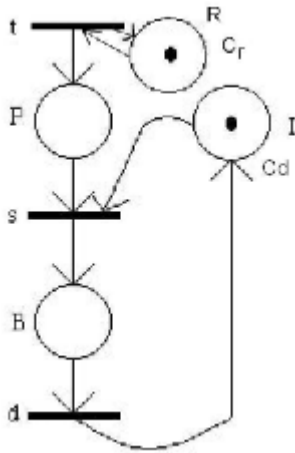
**Preuve.** On raisonne par récurrence sur le nombre de transitions utilisées dans la séquence  $u$ . Pour une séquence vide, le résultat est immédiat. Le pas de la récurrence s'obtient par la définition du franchissement d'une transition.

**Remarque :** L'équation fondamentale (6) traduit la dynamique de fonctionnement du RdP.

### 3.4 Ecriture du modèle sous forme de RdP

Considérons à nouveau le modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra. Les états caractéristiques du système (ou places) sont les suivant :  $R$  : les proies sont au répit,  $P$  : les

proies sont en danger,  $B$  : les proies sont dévorées,  $I$  : les prédateurs sont rassasiés. Le passage d'un état à un autre ne s'effectue qu'à un moment significatif traduisant un changement dans le comportement des populations. Ce sont les transitions du système :  $t$  : les prédateurs menacent les proies,  $s$  : les prédateurs attaquent les proies,  $d$  : les prédateurs partent rassasiés. Les transitions ne peuvent être franchies que lorsqu'un certains nombres de conditions sont remplies. Par exemple, les prédateurs ne pourront pas attaquer les proies avant d'avoir digéré la chasse précédente. Les prédateurs sont donc confinés dans la place  $I$  durant un temps  $Cd$ . Enfin, les proies sont aux répités durant un temps  $Cr > Cd$ . On considère deux jetons associés à la population de proie et à la population de prédateur.



La matrice d'adjacence associée à ce système s'écrit sous la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

FIG. 6 – Ecriture du modèle de Lotka-Volterra en terme de réseau de Petri

On s'intéresse à l'évolution de la dynamique des populations, i.e. on voudrait comprendre comment le RdP va évoluer au cours du temps. L'un des principaux intérêts des RdP est de proposer une représentation compacte pour définir des comportements qui peuvent contenir un nombre infini d'états ou d'événements. Leurs capacités de modélisation leur permettent ainsi d'être un support particulièrement intéressant pour la vérification d'un large éventail de propriétés de ces systèmes. Nous présentons dans cette section les propriétés les plus significatives.

## 4 Propriétés des RdP

**Définition 10 (Marquage Accessible).** Soient  $PN$  un RdP et  $M, M'$  deux marquages.  $M'$  est dit accessible à partir de  $M$  si et seulement s'il existe une séquence de franchissements  $u = u_0, u_1, \dots, u_{d-1} \in T(PN, M)$  telle que :

$$M(u_1 > M_2(u_2 > \dots(u_d > M' \tag{7}$$

Dans ce cas  $M'$  est accessible à partir de  $M$  grâce à  $u$ , on écrit  $M'(u > M$ . L'ensemble des marquages accessibles à partir de  $M$  est noté  $\mathcal{A}(PN, M)$ .



**Définition 11 (Quasi-vivacité).** Une transition  $t$  est dite quasi-vivante s'il existe un marquage accessible  $M \in PN(M_0)$  telle que  $M(t >$ . Le réseau  $(PN, M_0)$  est dit quasi-vivant si toutes les transitions sont quasi-vivantes.

Une quasi-vivacité d'une transition désigne la probabilité de franchir au moins une fois cette transition depuis un marquage initial. En d'autres termes, toutes les actions peuvent être exécutées au moins une fois. Dans le cas contraire cela signifie qu'il existe des fonctionnalités du système auxquelles on n'a pas accès. Un réseau sera qualifié de vivant si on peut garantir qu'aucune action ne peut devenir définitivement inaccessible.

**Définition 12 (Réseau borné).** Un réseau marqué  $(PN, M_0)$  est borné si le nombre de marquage accessible est fini, i.e. l'ensemble  $\mathcal{A}(PN, M_0)$  est fini.

**Proposition 2.** Soit  $PN$  un réseau marqué. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. Le réseau est borné.
2.  $\exists k \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall M \in \mathcal{A}(PN, M_0)$  et  $\forall p \in P, M(p) \leq k$ .

**Preuve.**

a. Supposons  $\mathcal{A}(PN, M_0)$  fini.

Soit  $k = \max\{M(p) | p \in P \text{ et } M \in \mathcal{A}(PN, M_0)\}$ . Comme cet ensemble est fini,  $k$  existe dans  $\mathbb{N}$ . Et on a, par définition de  $k$ , le point 2.

b. Supposons le point 2 vérifié. Dans ce cas  $\mathcal{A}(PN, M_0) \subseteq \{M \in \mathbb{N}^{|P|} | \forall p \in P, 0 \leq M(p) \leq k\}$ , et cet ensemble est fini.

**Définition 13 (Réseau sans blocage).** Un réseau marqué places/transitions est sans blocage si à partir de tout marquage accessible, il existe au moins une transition franchissable :  $\forall M \in \mathcal{A}(PN, M_0), \exists t \in T | M(t >$ .

Il s'agit ici de garantir que, quelque soit l'évolution du système, il ne se bloquera jamais.

**Définition 14 (Problème d'accessibilité).** Soient  $PN$  un RdP marqué et  $M, M'$  deux marquages. Le problème qui consiste à décider si  $M' \in \mathcal{A}(PN, M)$  est appelé problème d'accessibilité des RdP.

Nous avons énoncés les principales propriétés généralement étudiées dans les RdP. La question suivante est de déterminer des techniques permettant de décider de chacune d'entre elles. Nous présentons ici celle fondée sur l'examen des états du système.

**Définition 15 (Graphe des marquages).** On appelle graphe des marquages du réseau  $(PN, M_0)$  le graphe étiqueté tel que :

- Le sommet initial est étiqueté par  $M_0$
- si  $v$  est un sommet d'étiquette  $M$  et si  $t$  est une transition telle que  $M(t >$ , avec  $M(t > M'$ , alors il existe un sommet  $v'$  d'étiquette  $M'$  et un arc  $M \xrightarrow{t} M'$ .

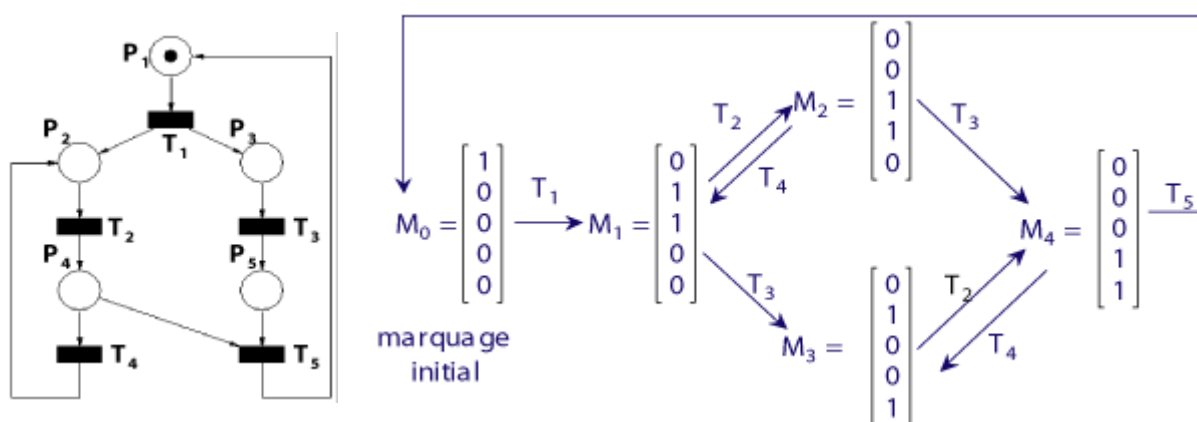


FIG. 7 – Un RdP et son graphe des marquage

Si le graphe des marquages accessibles est fini, c'est la situation la plus favorable. Mais l'arbre peut-être infini si le réseau n'est pas borné. On définit alors une quantité arbitrairement grande de jetons  $\omega$  qui possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\omega + n &= \omega \\ \omega - n &= \omega \\ n &\leq \omega \\ w &\leq \omega\end{aligned}$$

Cependant l'introduction d'une telle notation s'accompagne d'une perte d'information.

Si l'on se place dans le cadre des réseaux bornés. On a alors :

**Proposition 3.** *Un réseau  $(PN, M_0)$  admet une séquence infinie si et seulement si le graphes des marquages possède un circuit.*

**Preuve**

- Soit  $u$  une séquence infinie. Nous savons que le réseau est borné, donc que  $\mathcal{A}(PN, M_0)$  est fini. Par suite, si l'on considère les marquages successifs rencontrés lors du tir de  $u$ , il y en a au moins deux qui sont égaux. On peut par conséquent écrire  $u = u_0 \cdot u_1 \cdot u'$ ,  $u_0$  et  $u_1$  étant des séquences finies et  $M_0(u_0) > M(u_1) > M' = M$ . Le graphe contient donc un circuit d'étiquette  $u_1$ .
- si le graphe contient un circuit  $M \xrightarrow{*} M$ , d'étiquette  $u$ . Soit  $u_0$  l'étiquette du chemin allant de  $M_0$  à  $M$ . Alors  $u_0 \cdot u^\infty$  est une séquence infinie du réseau.

**Proposition 4.** *Le réseau  $(PN, M_0)$  admet un blocage si et seulement si le graphe des marquages contient un sommet sans successeur.*

**Proposition 5.** *Un réseau marqué  $(PN, M_0)$  est quasi-vivant si et seulement si, pour toute transition  $t$ , il existe dans le graphe des marquages un arc d'étiquette  $t$ .*

Ces deux propositions sont des conséquences directes des définitions.

**Proposition 6.** *Un réseau marqué  $(PN, M_0)$  est vivant si et seulement si pour toute transition  $t$ , toute composante fortement connexe terminale du graphe des marquages contient un arc d'étiquette  $t$ .*

Une composante fortement connexe est terminale si les seuls sommets accessibles depuis un quelconque sommets de la composante sont ceux de la composante elle-même.

**Preuve**

- Supposons le réseau vivant. Soit  $t$  une transition. Soit une composante fortement connexe terminale  $\mathcal{C}$  : tout chemin issu de l'un des sommets de cette composante conduit à un sommet de cette composante. Soit  $M$  l'étiquette d'un nœud de  $\mathcal{C}$ . Le réseau étant vivant, il existe une séquence  $u$  telle que  $M(u) > M'$ . Et, comme  $\mathcal{C}$  est terminale,  $M'$  appartient à  $\mathcal{C}$ , ainsi que tous les marquages intermédiaires. Par suite le chemin est tout entier dans  $\mathcal{C}$ , qui contient donc un arc d'étiquette  $t$ .
- Supposons que pour toute transition  $t$ , toute composante fortement connexe terminale du graphe des marquages contient un arc d'étiquette  $t$ . Soit  $M$  un marquage. C'est l'étiquette d'un sommet du graphe. Il existe un chemin de  $M$  à une composantes fortement connexes terminales du graphe des marquages, soit  $\mathcal{C}$  cette composante. Soit  $u$  telle que  $M(u_0) > M'$ , avec  $M' \in \mathcal{C}$ . Puisque c'est une composante fortement connexe, et qu'elle contient un arc d'étiquette  $t$ , il existe donc au moins une séquence  $u_1$  telle que  $M'(u_1 \cdot t) >$ . Donc on a  $M'(u_0 \cdot u_1 \cdot t)$ . Le réseau est donc vivant.

**Définition 19 (Equilibre d'un RdP).** *Soit  $PN$  un RdP.  $PN$  est dit stable s'il existe une séquence de transition  $u$  franchissable telle que le système reste borné. On a alors la propriété suivante :*

$$\Delta\nu = Au \leq 0 \tag{8}$$

On dit que le réseau est structurellement borné.

## 5 Algèbre tropicale

Les algèbres max-plus et min-plus, sont le cadre naturel pour décrire les systèmes à événements discrets. Nous nous intéresserons que très brièvement à leur construction étant donné qu'un précédent exposé n'est consacré qu'à cette thématique. D'autre part, la démarche d'analyse proposée par Retchkiman Konigsberg étant relativement compliquée à comprendre, seul les principes généraux seront exposés dans la suite.

On considère ici l'algèbre max-plus  $\mathcal{R}_{max} = (\mathbb{R}_{max}, \oplus, \otimes, \epsilon, e)$ , où  $\oplus$  représente l'opérateur *max* d'élément neutre  $\epsilon = -\infty$  et  $\otimes$  désigne l'addition usuelle d'élément neutre  $e=0$ . Les opérations  $\oplus$  et  $\otimes$  sont associatives, la première est commutative et la seconde est distributive par rapport à la première. On forme ainsi un semi-anneau idempotent, *i.e.* lorsque

$a \oplus b = a \oplus c$  on ne peut pas en conclure que  $b = c$ . On peut construire de manière analogue une somme et produit matriciel max-plus défini par  $(A \oplus B)_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij})$  et  $(A \otimes B)_{ik} = \bigotimes_{j=1}^l (a_{ij} \otimes b_{jk})$ , où  $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ . On définit la matrice  $\epsilon$  dont tous les éléments sont égaux à  $\epsilon$  et la matrice  $E$  dont les éléments de la diagonale valent  $e$  et tous les autres  $\epsilon$ .

Un RdP peut être considéré comme un graphe orienté pondéré  $G = (\mathcal{N}, \mathcal{D})$  muni d'une fonction de pondération  $W$ .  $\mathcal{N}$  est l'ensemble des nœuds du RdP (places  $P$  et transitions  $T$ ),  $\mathcal{D}$  l'ensemble des arcs orientés et  $W(i \rightarrow j)$  est le poids de l'arrête  $(i, j) \in \mathcal{N}$ .

### 5.1 Définitions formelles

**Définition 20 (Puissance de matrice).** Soient  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$  et  $k \in \mathbb{N}$ . La puissance  $k$  de la matrice  $A$  est alors notée  $A^{\otimes k}$  et est définie par :  $A^{\otimes k} = A \otimes A \otimes A \dots \otimes A$ , ( $k$  fois) et  $A^{\otimes 0} = E$ .

**Définition 21. (Graphe de précédence).**  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ . On appelle graphe de précédence de la matrice  $A$ , le graphe  $G(A)$  formé d'un ensemble  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  de sommets et des arcs  $(i, j) \in S^2$ . On associe à chaque arc du graphe  $j \rightarrow i$  le poids  $a_{ij}$  (coefficient non nul de la matrice  $A$ ). Si  $a_{ij} = \epsilon$ , alors il n'existe aucun arc liant les deux nœuds  $i$  et  $j$ .

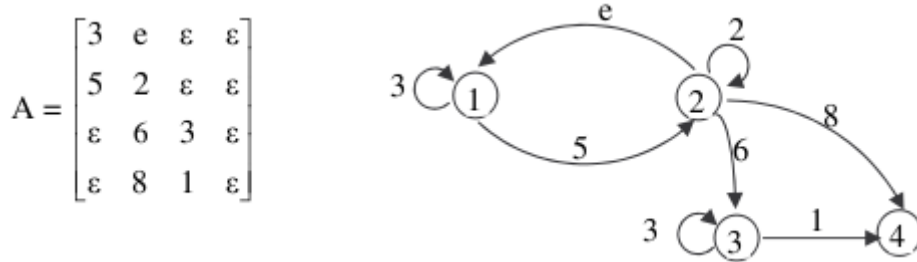


FIG. 8 – Graphe de précédence

**Définition 22 (Chemin de longueur m).** On appelle chemin de longueur  $m$  d'un nœud  $i = n_1$  à un nœud  $j = n_{m+1}$  une suite de  $(n_1, \dots, n_{m+1})$  sommets de  $\mathcal{N}$  et  $\forall k \in \{1, \dots, m+1\}$ ,  $n_k \rightarrow n_{k+1}$  une arrête. Le poids du chemin  $p \in P(i, j, m)$  noté  $|p|_w$  est égale à la somme des poids des arrêtes  $\sum_{k=1}^m W(n_k \rightarrow n_{k+1})$ . Cette somme peut alors être normalisée de la manière suivante  $\frac{|p|_w}{|p|_1}$ , où  $|p|_1 = m$ .

**Théorème 1 :** Soient  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Alors  $\forall k \geq 1 : [A^{\otimes k}]_{ji} = \max\{|p|_w : p \in P(i, j, k)\}$  où  $[A^{\otimes k}]_{ji} = \epsilon$  dans le cas où  $P(i, j, k)$  est vide.

Le fait essentiel pour la suite est que les puissances de matrice s'interprètent simplement en terme de chemin. La matrice  $A$  correspond à un chemin de longueur 1, la matrice  $A^2$  à un chemin de longueur 2... Le produit matriciel correspond à la sélection des chemins les

plus lourds.

**Définition 23 (Étoile de Kleene).** Soient  $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Soit  $A^* \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$  définie telle que  $A^* = \bigotimes_{k=1}^{\infty} A^{\otimes k}$ , connue sous le nom d'étoile de Kleene. L'élément  $[A^+]_{ij}$  donne le poids maximal de tous les chemins d'un nœud  $i$  à un nœud  $j$ .

Les coefficients de  $A^*$  représentent l'ensemble des chemins du graphe associé à la matrice  $A$  : cela permet de relier un point de vue combinatoire (chemins) à un point de vue algébrique (l'étoile de Kleene).

Dans le cas où le coefficient  $a_{ij}$  est non nul, on dit que  $i$  communique avec  $j$  et note  $i \rightarrow j$  le chemin reliant  $i$  à  $j$ . On définit une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  sur l'ensemble  $S$  par :

$$i\mathcal{R}j \Leftrightarrow i \rightarrow j \text{ et } j \rightarrow i \quad (9)$$

Les classes d'équivalence pour la relation  $\mathcal{R}$  seront appelées classes ou composantes fortement connexes du graphe.

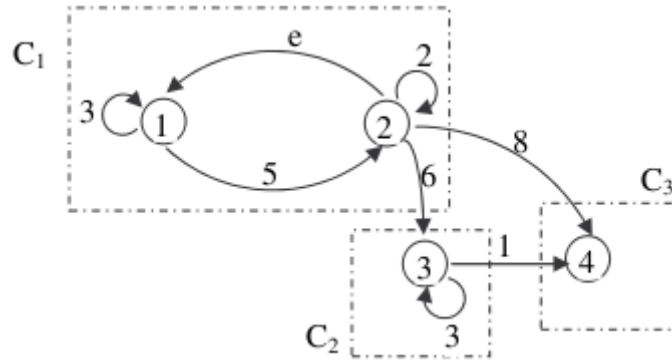


FIG. 9 – Classe de la matrice  $A$  (cf. figure 9)

## 5.2 Propriétés spectrales de la matrice

La recherche des éléments propres d'une matrice carrée  $A$  revient à la recherche d'un couple  $(\lambda, \nu)$ , où  $\nu$  est un  $n$ -vecteur non nul et  $\lambda$  est un scalaire, qui vérifie le système suivant :

$$A \otimes \nu = \lambda \otimes \nu \quad (10)$$

**Définition 24 (Valeur propre)**  $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$  est dite irréductible si son graphe de précedence  $G(A)$  est fortement connexe. Une matrice irréductible admet une unique valeur propre  $\rho(A)$  et donnée par :

$$\rho(A) = \bigoplus_{k=1}^n (tr A^{\otimes k})^{\otimes (\frac{1}{k})} \quad (11)$$

En relation avec son graphe  $G(A)$ , l'unique valeur propre d'une matrice  $A$  peut s'exprimer, en fonction des poids et des longueurs des circuits qui constituent  $G(A)$ , par :

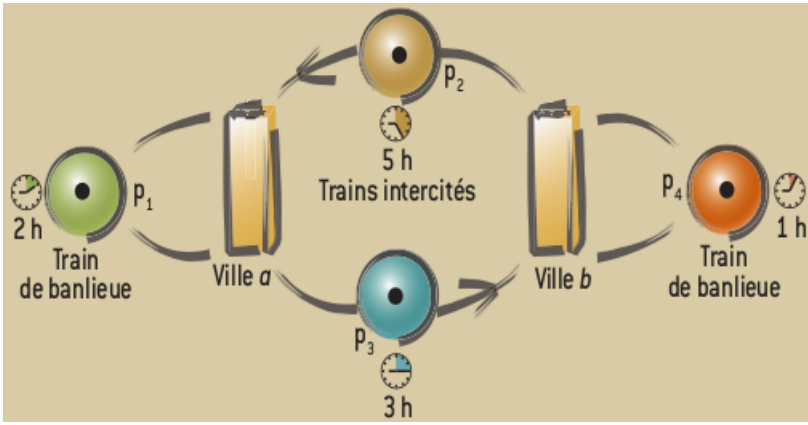
$$\rho(A) = \bigoplus_C |p|_w^{\otimes (\frac{1}{m})} \quad (12)$$

### 5.3 Equations de récurrence des RdP

Afin d'illustrer les différentes notions abordées, nous reprendrons tout au long de ce paragraphe l'exemple donné par Guy Cohen et Co. dans *l'Algèbre des sandwiches* [7].

Deux villes  $a$  et  $b$  sont reliées par des trains. Le trajet de  $a$  vers  $b$  dure 3 heures, le trajet retour, s'effectuant sur une autre voie en travaux, dure 5 heures. Chacune des deux villes est desservie par un train de banlieue. Le premier décrit une boucle qui le ramène à la gare de la ville  $a$  toutes les 2 heures, tandis que le deuxième passe toutes les heures en gare dans la ville  $b$ . Ce modèle de réseau de transport est un système à événements discrets dans le sens où les correspondances dans les villes  $a$  et  $b$  ne peuvent s'effectuer que si les trains de banlieue et les trains de grandes lignes sont tous les deux en gare.

Le modèle peut alors s'écrire sous forme de RdP comme suit :



On définit  $\check{A}$  la matrice caractérisant les temps de trajet en les deux gares  $a$  et  $b$  :

$$\check{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

FIG. 10 – Modèle de trafic modélisé sous forme de RdP-T

Intuitivement pour qu'une correspondance est lieue dans la ville  $a$ , il faut que le train partant de la ville  $b$  parte 5 heures plus tôt et que donc la correspondance dans la ville  $b$  est lieue 5 heures plus tôt. De même, il faut que le train de banlieue est quitter la gare  $a$  3 heures auparavant pour arriver à temps à la prochaine correspondance. La date à laquelle peut avoir la  $n$ -ième correspondance, notée  $a(n)$  dans la ville  $a$  est donc est donc celle du plus tardif de ces événements, c'est-à-dire le maximum des dates  $b(n-1) + 5$  et  $a(n-1) + 2$ . Dans l'algèbre *max-plus* cette équation revient à écrire :  $a(n) = 5 \otimes b(n-1) \oplus a(n-1) \otimes 2$ .

En raisonnant de la même manière sur la ville  $b$  on peut écrire caractérisé le réseau sous forme matricielle :  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} (n) = \check{A} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} (n-1)$ .

Par récurrence, on détermine l'équation d'état du système :

$$X(n) = \check{A}.X(n-1) = \check{A}^2.X(n-2) = \dots = \check{A}^n.X(0) \quad (13)$$

En somme, à partir d'un état initial, on peut connaître à l'avance l'évolution dans le temps du système, qualifié à juste titre de déterministe.

Remarque :  $\check{A}^2 = \begin{pmatrix} \max(2+2, 5+3) & \max(2+5, 5+1) \\ \max(3+2, 1+3) & \max(3+5, 1+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ ,  $\check{A}^3 = \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$ ,  
 $\check{A}^4 = \begin{pmatrix} 16 & 15 \\ 13 & 16 \end{pmatrix} = 8 \otimes \check{A}^2$ ,  $\check{A}^5 = 8 \otimes \check{A}^3$ , ...

On détermine ainsi le régime périodique du système, toutes les huit heures passent exactement deux trains.

**Définition 25. (Equation de récurrence).** Soit  $\check{A} \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$  et  $0 \leq m \leq M$  et  $x(k) \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$  pour  $-M \leq k \leq -1$ . On définit l'équation de récurrence d'ordre M de la manière suivante :

$$x(k) = \bigoplus_{m=0}^M \check{A}_m \otimes x(k-m) \quad (14)$$

Cette équation peut se réécrire sous la forme d'un équation de premier ordre :

$$x(k+1) = \bigoplus_{m=0}^M \check{A} \otimes x(k) \quad (15)$$

La démonstration est présentée dans [6] et s'appuie sur les propriétés de l'étoile de Kleene qui n'ont pas été développées dans ce présent rapport.

Un RdP est dit stable si toutes les transitions sont activés avec la même proportion, soit  $\frac{x_i(k)}{k} = q$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Konigsberg démontre alors dans son article que pour la relation de récurrence considérée ci-dessus on a :  $\frac{x_i(k)}{k} = \lambda$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Soit lorsque le réseau est dans un état correspondant à un vecteur propre de a matrice, le passage à létat suivant, consiste à activer toutes les transitions un nombre de fois égale à la valeur propre de A.

## 5.4 Modèle de Lotka-Volterra

En appliquant les différents résultats énoncés dans ce rapport on peut montrer dans un premier temps que le RdP associé au modèle proie-prédateur peut se stabiliser. En effet si l'on applique les propriétés de l'équation (8) on peut démontrer que pour un vecteur  $u=[k,k,k]$ ,  $k>0$  on obtient  $Au \leq 0$ . Si l'on considère le RdP temporisé on peut alors définir la matrice suivante (cf. exemple de l'algèbre des sandwiches) :

$$\check{A} = \begin{pmatrix} Cr & \epsilon & \epsilon \\ Cr & \epsilon & Cd \\ \epsilon & \epsilon & Cd \end{pmatrix} \quad (16)$$

L'équation 12 nous donne  $\rho(A) = \max Cr, Cd = Cr$ . Ce qui d'après le paragraphe précédent nous indique que pour que le réseau soit oscille à une fréquence fixe toutes les transitions doivent être franchies à la même vitesse.

## **6 Conclusion**

Au cours de ce rapport, nous avons revisité un modèle de dynamique des populations de type Lotka-Volterra que nous considérons comme un système à événements discrets. Le système a été modélisé à l'aide de RdP dont nous avons énoncé les principales caractéristiques. Le dernier paragraphe s'intéresse plus brièvement au méthode d'analyse par les algèbres tropicales. Nous avons cherché à présenter les notions importantes utiles à l'analyse des propriétés des RdP et RdP temporisé. Enfin un bref paragraphe présente les résultats de Königsberg concernant le système proie-prédateur.



## Références

- [1] Cohen, G., Gaubert, S., et Quadrat, J.P., "L'algèbre des sandwichs", Pour la Science, pp.56-63, (2005)
- [2] Edelstein-Keshet, L., "Mathematical Models in Biology", reprinted by SIAM under the "classics" editions, (2005 ; originally 1988)
- [3] Ginoux, J.M., "Le paradoxe du modèle prédateur-proie de Vito Volterra", (2006)
- [4] Konigsberg, Z.R., "Stability Problem for a Predator-Prey System", Part I, LNCS 6145, pp.1-10, (2010)
- [5] Murray, J.D., "Mathematical Biology : I. An Introduction", Third Edition, Springer (2002)
- [6] NAIT-SIDI-MOH, A., "Contribution à la Modélisation, à l'Analyse et à la Commande des Systèmes de Transport Public par les Réseaux de Petri et l'Algèbre (Max, Plus)", (2003)
- [7] Petri, C.A., "Communication with automata", Supplement 1 to technical report RADCTR-65-377, Vol 1, (1966), Translated from "Kommunikation mit Automaten" PhD Bonn 1962
- [8] Ramchandani, C. : "Analysis of Asynchronous Concurrent Systems by Petri Nets". Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, États Unis d'Amérique, 1974. TR-120.