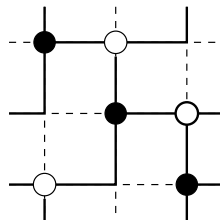


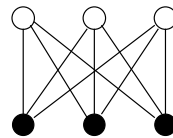
Examen de graphes M2 - Correction 2010/2011

Exercice 1 - QCM (6 pts)

- 1** Pas de graphe (sans arêtes multiples, ni boucles) avec les degrés 4,2,2,2 : le sommet de degré 4 nécessite 4 voisins.
- 2** Pas de graphe avec les degrés 3,3,2,1 : tout graphe a un nombre pair de sommets de degrés impairs.
- 3** Il existe un graphe avec les degrés 3,2,2,1 : une feuille attachée à un triangle.
- 4** Tout graphe sur n sommets avec strictement plus de $n - 1$ arêtes contient un cycle, donc il faut enlever au moins $m - n + 1$ arêtes pour devenir acyclique. Considérer un arbre couvrant du graphe initial, il contient $n - 1$ arêtes, on suffit donc d'enlever $m - n + 1$ arêtes pour devenir acyclique. Par conséquent le nombre minimum d'arêtes à enlever pour devenir acyclique vaut $m - n + 1$ et se calcule en temps constant, et un ensemble solution d'arêtes à enlever peut être obtenu comme le complémentaire d'un arbre couvrant (qui peut se calculer en temps linéaire par un parcours quelconque).
- 5** Le domino est parfait car c'est un graphe biparti : $\chi(G) = \omega(G) = 2$ et tout sous-graphe induit reste biparti. Le cycle C_5 n'est pas parfait : $\chi(G) = 3 \neq 2 = \omega(G)$. Le graphe de Petersen n'est pas parfait : il contient C_5 comme sous-graphe induit.
- 6** La classe des *graphes d'intersection de rectangles* n'est pas incluse dans la classe des graphes parfaits : on peut facilement construire les cycles impairs, qui ne sont pas des graphes parfaits.
- 7** Proposition vraie : c'est le théorème des mineurs de Robertson et Seymour.
- 8** On peut facilement vérifier que les graphes qui n'admettent pas $K_{1,3}$ comme mineur sont les graphes dont les sommets sont de degré au plus 2, c'est à dire des unions disjointes de cycles et chemins. Ils sont reconnaissables en $\mathcal{O}(n)$ si on a les listes d'adjacence en entrée : vérifier que chaque sommet a au plus deux voisins.
- 9** Proposition vraie : une classe caractérisée par une famille infinie de mineurs interdits est clairement stable par mineurs, et donc grâce au théorème des mineurs (cf. question 7), caractérisée par une famille *finie* de mineurs interdits.
- 10** Le graphe de Petersen n'est pas planaire : en contractant les 5 arêtes entre les sommets du cycle extérieur et les sommets intérieurs, on obtient un K_5 comme mineur. L'icosaèdre tronqué est plongeable sur la sphère avec un dessin sans croisement d'arêtes (cf. le dessin), et donc aussi dans le plan. Le tore $n \times n$, $n \geq 3$, n'est pas planaire : en contractant des arêtes, il contient toujours le tore 3×3 comme mineur, or ce tore contient $K_{3,3}$ comme mineur (cf. l'illustration ci-dessous, où les arêtes enlevées sont en pointillé et les chemins de longueur 2 contractés en une arête pour obtenir le $K_{3,3}$ à droite).



Tore 3X3



$K_{3,3}$

11 Si A et B sont des modules quelconques de $G = (V, E)$, alors $A \cap B$ reste un module de G . Considérer un sommet hors de $A \cap B$, il est dans $(V \setminus A) \cup (V \setminus B)$. S'il est hors du module A , il voit soit tout A (et donc tout $A \cap B$), soit pas du tout A (et donc pas du tout $A \cap B$). S'il est hors du module B , idem par rapport à $A \cap B$. Un sommet hors de $A \cap B$ voit donc soit tout $A \cap B$, soit pas du tout $A \cap B$, c'est une caractérisation des modules.

Pour se convaincre que les deux autres constructions, $A \cup B$ et $A \setminus B$, ne donnent pas toujours un module, on peut facilement trouver des contre-exemples particuliers ou faire le raisonnement suivant : sachant que pour tout $v \in V$, $\{v\}$ est un module (resp. $\{v\}$ et V sont des modules), si $A \cup B$ (resp. $A \setminus B$) restait toujours un module, alors toute partie de V serait un module. Ce n'est clairement pas le cas en général.

12 cf. cours

Exercice 2 - Calcul de ω pour des classes particulières (5 pts)

1 - Le calcul de $\omega(G)$ pour G quelconque est NP-dur.

2 - Description d'un algorithme glouton prenant en entrée un arbre T de décomposition modulaire (pas forcément le canonique) du cographe G :

- 1** - Associer un poids $w(x)$ à chaque noeud x (interne ou feuille) de T .
- 2** - Calculer les poids en partant des feuilles et en remontant vers la racine r avec les règles suivantes :
 - ▷ Si x est une feuille, alors $w(x) \leftarrow 1$.
 - ▷ Si x est un noeud interne de type série (S), alors $w(x) \leftarrow \sum_{y \text{ fils de } x} w(y)$.
 - ▷ Si x est un noeud interne de type parallèle (P), alors $w(x) \leftarrow \max_{y \text{ fils de } x} w(y)$.
- 3** - Retourner $w(r)$.

Proposition : l'algorithme ci-dessus calcule le cardinal maximum d'un clique du cographe G , en temps $\mathcal{O}(n)$.

Preuve : Correction - soit x un noeud de l'arbre de décomposition, le sous-graphe de G induit par les feuilles sous x est noté $G(x)$. C'est un cographe dont un arbre de décomposition est le sous-arbre de T enraciné en x . On montre alors par induction que pour tout noeud x , $w(x) = \omega(G(x))$. Si x est une feuille, c'est vrai. Si x est un noeud interne, c'est une conséquence des propriétés suivantes : $\omega(G_1 + \dots + G_p) = \sum_{i=1}^p \omega(G_i)$ et $\omega(G_1 \cup \dots \cup G_p) = \max_{i=1}^p \omega(G_i)$ où $+$ est l'opération série et \cup l'opération parallèle. Ces deux propriétés sont évidentes. Au final, on a bien $w(r) = \omega(G(r))$ avec $G(r) = G$.

Complexité - la complexité est clairement en $\mathcal{O}(\text{nombre de noeuds de } T)$ car chaque poids entre uniquement dans le calcul du poids de son père avec un coût $\mathcal{O}(1)$. Or le nombre de noeuds d'un arbre de décomposition modulaire est toujours en $\mathcal{O}(n)$. \square

3 - Description d'un algorithme glouton prenant en entrée un graphe chordal G donné par ses listes d'adjacence et par une séquence d'élimination simpliciale v_1, \dots, v_n (pour rappel on note $N(v)$ le voisinage de v) :

- 1** - Associer un poids $w(v)$ à chaque sommet v de G , et conserver un maximum courant *MaxClique*.
- 2** - Suivre la séquence simpliciale dans l'ordre de construction (ordre inverse de l'élimination) pour calculer les poids :
 - ▷ Initialiser avec $w(v_n) \leftarrow 1$ et *MaxClique* $\leftarrow 1$.
 - ▷ Pour i de $n - 1$ à 1 , faire $w(v_i) \leftarrow |N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\}| + 1$ et *MaxClique* $\leftarrow \max(\text{MaxClique}, w(v_i))$.
- 3** - Retourner *MaxClique*.

Proposition : l'algorithme ci-dessus calcule le cardinal maximum d'une clique du graphe

chordal G , en temps $\mathcal{O}(n + m)$.

Preuve : Correction - On montre par récurrence sur le nombre de sommets traités que : à la sortie de chaque boucle, c'est-à-dire quand $w(v_i)$ vient d'être calculé et $MaxClique$ mis à jour, (a). le poids $w(v_i)$ est le cardinal maximum d'une clique contenant v_i dans $G[v_i, \dots, v_n]$ et (b). $MaxClique$ est le cardinal maximum d'une clique dans $G[v_i, \dots, v_n]$, où $G[v_i, \dots, v_n]$ est le sous-graphe induit par v_i, \dots, v_n . Le premier point (a) est évident car la séquence simpliciale assure que $N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\}$ est une clique pour tout $1 \leq i \leq n$. Vérifions le deuxième point (b). Initialement il est vrai. Puis considérer une clique K de cardinal maximum de $G[v_i, \dots, v_n]$. Par hypothèse de récurrence, $MaxClique$ avant sa mise à jour est le cardinal maximum de $G[v_{i+1}, \dots, v_n]$. Si K contient v_i , $|K| \geq MaxClique$ (avant mise à jour) et $|K| = w(v_i)$ d'après (a), donc $MaxClique$ (après mise à jour) est bien le cardinal max d'une clique de $G[v_i, \dots, v_n]$. Si K ne contient pas v_i , $|K| \geq w(v_i)$ et K est une clique de cardinal max de $G[v_{i+1}, \dots, v_n]$, c'est-à-dire de cardinal $MaxClique$ (avant mise à jour), donc $MaxClique$ (après mise à jour) est bien le cardinal max d'une clique de $G[v_i, \dots, v_n]$. Au final, l'algorithme retourne donc bien la valeur cherchée.

Si on veut, on peut aussi présenter les choses en disant que pour toute clique K maximale (pour \subseteq), $|K| = w(v_k)$ où $k = \min\{i, v_i \in K\}$. Mais attention on n'a pas en général l'égalité $|K| = \max_{v \in K} w(v)$.

Complexité - le calcul de $|N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\}|$ peut s'effectuer en $\mathcal{O}(|N(v_i)|)$ en balayant la liste $N(v_i)$ et en travaillant avec un tableau de bits indicé par V qui met à 1 les sommets présents dans $\{v_{i+1}, \dots, v_n\}$ et à 0 les autres. Au total, on obtient une complexité en $\mathcal{O}(\sum_i |N(v_i)|) = \mathcal{O}(n + m)$. \square

4 - Description d'un algorithme "force brute" prenant en entrée un graphe G avec $tw(G) \leq 5$ et une décomposition arborescente (T, \mathcal{V}) de largeur au plus 5 :

- 1** - Pour chaque patate de la décomposition, calculer le cardinal maximum d'une clique dans le sous-graphe induit par la patate.
- 2** - Retourner le maximum sur toutes les patates.

Proposition : l'algorithme ci-dessus retourne le cardinal maximum d'une clique du graphe G dont on a une décomposition arborescente de largeur au plus 5 avec t patates, en temps $\mathcal{O}(t)$ si le graphe est donné par sa matrice d'adjacence, ou en temps $\mathcal{O}(nt)$ si le graphe est donné par ses listes d'adjacence.

Preuve : Correction - on sait que toute clique de G est entièrement incluse dans l'une des patates, ce qui assure la correction. **Complexité** - par définition de $tw(G)$ les patates sont de cardinal au plus $5 + 1 = 6$. Trouver une clique de cardinal maximum dans un graphe induit par au plus 6 sommets peut se faire en testant toutes les combinaisons de sommets, soit $\binom{6}{6} + \binom{6}{5} + \binom{6}{4} + \binom{6}{3} + \binom{6}{2}$ combinaisons. Tester si 6 sommets donnés forment une clique requiert un temps $\mathcal{O}(1)$ avec la matrice d'adjacence (accès direct) et $\mathcal{O}(n)$ avec les listes d'adjacence (balayage de 6 listes de taille a priori $\mathcal{O}(n)$). Idem pour les combinaisons de 5 sommets, de 4 sommets ... La complexité est donc $\mathcal{O}(1)$ ou $\mathcal{O}(n)$ pour chaque patate. Remarque qu'il peut y avoir de l'ordre de $\mathcal{O}(n^6)$ patates, voire plus si on autorise des patates dupliquées, mais pas si on se restreint à une décomposition sans redondance : on peut toujours se ramener à une décomposition arborescente telle que aucune patate n'est incluse dans une autre et dans ce cas, on montre qu'il y a au plus n patates. \square

Exercice 3 - La galerie d'art (4 pts)

1 - L'énoncé ne dit pas clairement si on autorise des graphes outerplanar ayant des points d'articulation. Montrons qu'on peut se restreindre au cas des graphes 2-connexes (c'est-à-dire tels que $n \geq 3$ et sans point d'articulation). Supposons l'énoncé vrai pour les graphes 2-connexes et raisonnons par récurrence sur le nombre de points d'articulation. Si G n'a pas

de point d'articulation, soit il est 2-connexe et c'est ok avec l'hypothèse prise, soit $n \leq 2$ et c'est ok car G est bien sûr 2-colorable. Maintenant soit G un graphe qui admet un point d'articulation v . Soit V_1, \dots, V_k les composantes connexes de $G - v$. Chaque sous-graphe induit par $V_i \cup \{v\}$ reste outerplanar et son nombre de points d'articulation est strictement inférieur à celui de G . Par récurrence il est 3-coloriable. Dans chacune des colorations de ces sous-graphes, quitte à renommer les couleurs, on peut imposer la couleur 1 à v . On peut alors recoller en $\{v\}$ ces sous-graphes induits en gardant leur coloration pour obtenir une 3-coloration de G .

On raisonne donc maintenant uniquement sur les outerplanars 2-connexes. Preuve par récurrence sur le nombre n de sommets (on peut aussi raisonner par récurrence sur le nombre d'arêtes). Pour $n = 3$, G est forcément un C_3 , donc 3-colorable. Soit G un graphe outerplanar 2-connexe avec $n \geq 4$ sommets. On considère un dessin de G avec les n sommets sur la face externe qui forment un cycle $C = \{v_1, \dots, v_n\}$. Si G n'admet pas de corde (arête qui n'est pas sur la face externe), alors G est un cycle C_n qui est 2-colorable ou 3-colorable (selon la parité de n). Si G admet une corde $v_i v_j$, considérer les deux chemins différents C' et C'' allant de v_i à v_j sur le cycle C , ainsi que les graphes G' et G'' induits par C' et C'' . En conservant le dessin initial de G on vérifie que G' et G'' restent tout deux outerplanar 2-connexes, avec strictement moins de n sommets. Par récurrence, ils admettent tout deux une 3-coloration. Ces deux graphes ont uniquement en commun les sommets v_i, v_j et l'arête $v_i v_j$. Quitte à renommer les couleurs dans G'' , on peut s'arranger pour que les couleurs de v_i et v_j dans G'' soient les mêmes que dans la 3-coloration de G' . On a bien alors une 3-coloration de G car toutes les arêtes de G sont dans G' ou dans G'' .

2 - Pour montrer le théorème de la Galerie d'Art, considérer les murs de la galerie comme un cycle dont les arêtes sont les n murs et les sommets sont les changements de direction des murs (il y en a donc n). Utiliser le lemme géométrique pour ajouter des cordes qui sont des segments, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de face interne avec plus de 3 arêtes. On construit ainsi un graphe outerplanar dont la face externe est constitué des murs initiaux et toutes les faces internes sont des triangles (on parle de *triangulation* de la figure géométrique). D'après la question 1, ce graphe est 3-colorable. Prendre une 3-coloration de ce graphe. Parmi les trois couleurs utilisées $\{1, 2, 3\}$, il y a forcément une couleur qui apparaît moins de $\lfloor n/3 \rfloor$ fois (pour s'en convaincre, faire un petit raisonnement par l'absurde). Supposons que la couleur 1 est dans ce cas, placer alors un gardien à chaque sommet qui a la couleur 1. Vérifions que cet ensemble de gardiens surveille toute la galerie : chaque point de la galerie appartient à l'une des faces de la triangulation, or chaque face est un triangle dont la coloration des sommets utilise nécessairement les trois couleurs, le sommet de couleur 1 a un gardien qui voit toute la face en question.

Remarque : cette preuve très simple pour auteur Fisk (1978), la première preuve avait été donnée par Chvatal (1973). On pourrait imaginer pleins de décompositions différentes de la surface de la galerie pour ensuite placer des gardiens. Une caractéristique de la preuve de Fisk est de restreindre les raisonnements géométriques (parfois risqués) au minimum (juste le lemme fourni pour assurer l'existence d'une triangulation) et de se concentrer sur la combinatoire. Pour une présentation de la preuve avec des dessins, voir le livre "Proofs from the Book" ("Raisonnements divins") de Aigner et Ziegler.