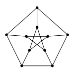
NOM Prénom : .... 30 mai 2007

Examen de graphes - 3 heures

Notations : dans les exercices suivants, le mot *complexité* désignera la complexité en temps dans le pire des cas. Pour un graphe, on notera n son nombre de sommets et m son nombre d'arêtes (cas non orienté) ou d'arcs (cas orienté). Pour les questions algorithmiques, on suppose que les graphes sont donnés par leurs listes d'adjacence (N dans le cas non orienté, N^+ dans le cas orienté). Les notes et documents de cours sont autorisés.

Exercice 1 - QCM sur le cours et les exposés (6 pts)

Mode d'emploi : Pour chacune des questions, entourer la (ou les) réponse(s) justes (il peut éventuellement y en avoir plusieurs ou aucune de juste). Le terme $\mathcal{O}(n^\omega)$ désigne la meilleure complexité connue à ce jour pour multiplier deux matrices $n \times n$.

	QUESTION	**REPONSE**
1	Considérer la classe des *graphes d'intersection de rectangles* : les sommets sont des rectangles du plan et deux sommets sont adjacents si et seulement si l'intersection de leurs rectangles est non vide. Est-ce que cette classe est incluse dans la classe des graphes parfaits ?	OUI NON
2	La proposition suivante est-elle vraie : *toute classe caractérisée par une famille infinie de mineurs interdits peut aussi être caractérisée par une famille finie de mineurs interdits* ?	OUI NON
3	Quelle est la complexité du problème consistant à enlever le minimum de sommets à un graphe non orienté pour qu'il devienne acyclique ?	P NP-dur
4	Donner la meilleure complexité avec laquelle on sait calculer le cardinal max d'un indépendant pour les graphes de clique-width ≤ 5.	$\mathcal{O}(n)$ $\mathcal{O}(n^2)$ $\mathcal{O}(n^5)$ NP-dur
5	Avec quelles complexités sait-on résoudre le problème de fermeture transitive d'un graphe orienté ?	$\mathcal{O}(n^\omega)$ $\mathcal{O}(n^\omega \log n)$ $\mathcal{O}(n^2)$ $\mathcal{O}((m+n)n)$
6	Est-ce que le graphe de Petersen ci-dessous est planaire ? 	OUI NON
7	Soit $G = (V, E)$ non orienté. Parmi les deux familles suivantes, lesquelles sont des matroïdes ? $\mathcal{A} = \{A \subseteq E \mid G_A = (V, A) \text{ est sans cycle}\}$ $\mathcal{B} = \{B \subseteq E \mid G_B = (V, B) \text{ a au moins un cycle}\}$	$\mathcal{A}$ $\mathcal{B}$
8	Dans le modèle d'Erdös-Renyi avec probabilité $\frac{1}{2}$ d'avoir une arête pour chaque paire de sommets, quand $n \to +\infty$, quel est en moyenne le diamètre d'un graphe à n sommets ?	2 π $\Theta(\sqrt{n})$ $\Theta(n)$
9	Soit G un graphe biparti à 10 sommets ayant un indépendant de cardinal maximum avec 6 sommets, quel est le cardinal maximum d'un couplage ?	4 6 ça dépend
10	Quelle est la meilleure complexité avec laquelle on sait vérifier si deux arbres à n sommets (non enracinés) sont isomorphes ?	$\mathcal{O}(n)$ $\mathcal{O}(n \log n)$ $\mathcal{O}(n^2)$ NP-dur
11	Avec quelle complexité sait-on calculer un cycle de longueur minimum dans un graphe non orienté ?	$\mathcal{O}(n)$ $\mathcal{O}(n(n+m))$ NP-dur
12	Si on sait effectuer la multiplication dans l'algèbre $(\min, +)$ de deux matrices $n \times n$ en $\mathcal{O}(n^\alpha)$, avec quelle complexité sait-on calculer les distances pour tout couple de sommets dans un graphe orienté pondéré (sans cycle de poids strictement négatif) ?	$\mathcal{O}(n^\alpha)$ $\mathcal{O}(n^\alpha \log n)$ $\mathcal{O}(n^{\alpha+1})$
13	Est-ce qu'on peut exprimer l'existence d'une 4-coloration d'un graphe avec une formule du langage logique τ_1 (quantification sur les sommets et les ensembles de sommets, tests d'appartenance et d'adjacence, opérations logiques de base) ?	OUI NON

Exercice 2 - Coloration de graphes particuliers (6 pts)

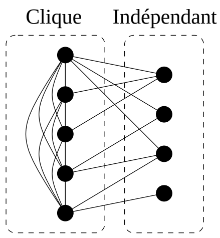
On rappelle qu'une technique pour calculer une coloration valide des sommets d'un graphe consiste prendre une séquence des sommets, puis colorer les sommets dans l'ordre de la séquence en donnant comme couleur le plus petit entier pas utilisé parmi les voisins déjà colorés (*coloration goutonne*).

$\boxed{\mathbf{1}}$ - Si G est un cographe, montrer que pour n'importe quelle séquence des sommets, la coloration gloutonne est optimale (càd. utilise exactement $\chi(G)$ couleurs).

$\boxed{\mathbf{2}}$ - Si G est triangulé, monter qu'il existe une séquence des sommets telle que la coloration gloutonne est optimale.

Exercice 3 - Une nouvelle espèce pour le Zoo des Graphes (4 pts)

Un graphe $G = (V, E)$ est *divisible* s'il existe une partition des sommets $V = I \cup K$, $I \cap K = \emptyset$, telle que I soit un indépendant et K une clique, et telle que tout sommet de K a au moins un voisin dans I, et aucun des sommets de I n'est relié à tous les sommets de K. La figure ci-dessous donne un exemple.



$\boxed{\mathbf{1}}$ - Est-ce que la classe des divisibles peut être caractérisée par une famille de mineurs interdits ? Est-ce que la classe des divisibles est incluse dans la classe des cographes ? Et dans la classe des graphes triangulés ?

$\boxed{\mathbf{2}}$ - Donner un algorithme de reconnaissance des divisibles, avec la meilleure complexité que vous pouvez. Justifier la correction de votre algorithme.

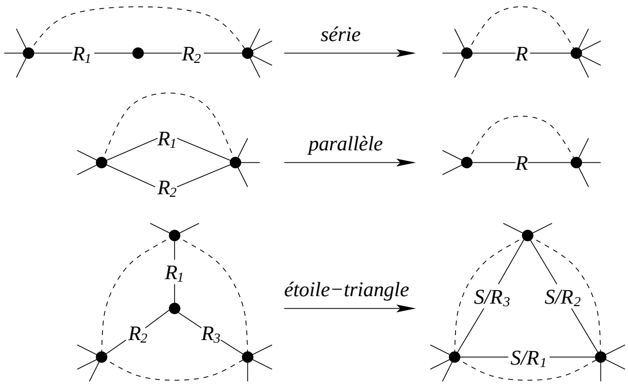
Exercice 4 - Calcul de résistance dans les réseaux électriques (4 pts)

Vous avez sûrement déjà été amenés à calculer la *résistance équivalente* entre deux points s et t, $s \neq t$, d'un réseau électrique qui est un graphe non orienté $G = (V, E)$ où chaque arête xy porte une résistance $R_{xy} > 0$. Le mot *graphe* désignera éventuellement un multigraphe s'il y a des résistances en parallèle entre deux sommets.

Pour rappel, entre s et t, un tel réseau composé uniquement de résistances se comporte comme une unique résistance dont on cherche la valeur. Une manière de résoudre le problème est d'introduire les variables i_{xy} (*intensité*) et u_{xy} (*tension*) pour $xy \in E$, et d'écrire un nombre suffisant d'équations à partir de la loi d'Ohm ($u_{xy} = R_{xy} i_{xy}$) et des lois de Kirchhoff (loi des nœuds, loi des mailles). On peut ainsi se ramener à la résolution d'un système d'équations linéaires dont on tire la résistance équivalente.

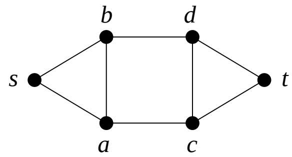
Une autre méthode consiste à réaliser une suite de transformations locales qui remplacent chaque fois un morceau du réseau par un nouveau morceau au comportement équivalent mais de taille plus petite. La figure ci-dessous présente trois règles classiques de transformation, avec respectivement $R = R_1 + R_2$ (*réduction série*), $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ (*réduction parallèle*) et $S = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1$ (*réduction étoile-triangle*). Les pointillés indiquent la présence éventuelle d'autres arêtes (qui elles ne sont pas modifiées).

Ces réductions suppriment une arête et/ou un sommet à chaque fois. Pour avoir la résistance équivalente entre s et t, il faut réussir à appliquer ces transformations jusqu'à



ce que le graphe soit réduit à une seule arête st.

$\boxed{\mathbf{1}}$ - Montrer pour le graphe ci-dessous qu'on peut appliquer les trois règles jusqu'à obtenir le graphe réduit à l'arête st (les valeurs des résistances sont omises car ne jouant aucun rôle dans le succès ou pas de la méthode). Est-ce que les trois règles présentées permettent toujours de se ramener à une unique arête st, pour tout graphe connexe et tout couple $s \neq t$ de sommets ?



$\boxed{\mathbf{2}}$ - Démontrer le théorème suivant pour $G = (V, E)$ et $s, t \in V$, en supposant que $G' = (V, E \cup \{st\})$ est 2-connexe :

Pour les trois règles présentées, il existe une suite de réductions transformant G en l'arête st si et seulement si $G' = (V, E \cup \{st\})$ est de largeur arborescente ≤ 3.

Indication : Utiliser la caractérisation $tw(G') = \min\{\omega(H) - 1 \mid H$ surgraphe triangulé de $G'\}$. Pour le sens $\Rightarrow$, construire un bon surgraphe de G qui soit triangulé. Pour le sens $\Leftarrow$, construire la suite en travaillant sur un surgraphe triangulé de G.

Remarque : dans le cas général, plutôt que de générer puis résoudre de gros systèmes linéaires, les meilleurs algorithmes utilisent la théorie des graphes.

Question subsidiaire - Une dernière classe pour la route (1 pt)

En relachant les conditions sur la classe des *divisibles*, on définit la classe des *splits* : $G = (V, E)$ est un *split* s'il existe une partition des sommets $V = I \cup K$, $I \cap K = \emptyset$, telle que I soit un indépendant et K une clique. Donner une caractérisation des splits par une famille finie de sous-graphes induits interdits.

Remarque : exceptionnellement pas de justification demandée pour cette dernière question, vous pouvez juste donner votre proposition.