Rapport de Graphe Avancée
Hypergraphes: théorie de Sperner

Iooss Guillaume

19 novembre 2010

1 Introduction

Les hypergraphes sont une généralisation du concept de graphe : on ne contraint plus les arêtes à contenir au plus 2 sommets. Les arêtes deviennent donc des familles de sous-ensemble de X, l'ensemble des sommets de l'hypergraphe. Théoriquement, les hypergraphes sont plus pratique que les graphes car ils permettent parfois de factoriser élégamment plusieurs problèmes de graphes en un seul.

Un hypergraphe peut peut également être considéré comme une famille de sous-ensemble d'un ensemble fini : on se retrouve alors dans le domaine de la combinatoire sur des ensembles finis. Ainsi, tous les théorèmes sur les hypergraphes sont donc traduisibles en théorèmes sur les parties finies d'un ensemble fini, et vice versa. Par la suite, nous allons plutôt nous intéresser aux théorèmes de dénombrements concernant des familles de partie d'un ensemble fini vérifiant des propriétés exprimables en termes d'intersection, union et inclusion.

Dans un premier temps, nous allons introduire les concepts fondamentaux à propos des hypergraphes, avant de présenter puis démontrer le théorème de Sperner pour les hypergraphes. Nous verrons ensuite certaines des nombreuses applications de théorème, en commençant par le théorème d'Erdös-Ko-Rado, ainsi que son application pour démontrer le théorème de Liggett en probabilité. Ensuite, nous verrons une amélioration du théorème de Littlewood-Offord en géométrie. Enfin, nous verrons une version "probabiliste" du théorème de Sperner en essayant de minimiser la probabilité d'inclusion de 2 ensembles l'un dans l'autre.

2 Hypergraphes et théorème de Sperner

2.1 Hypergraphes

Soit $X = x_1, ..., x_n$ un ensemble fini de cardinal n.
Un *hypergraphe sur* X est une famille $H = (E_1, ..., E_m) \in \mathcal{P}(X)^m$ telle que :

- $E_i \neq \varnothing$
- $\bigcup_{i=1}^m E_i = X$

Les x_i sont appelés les *sommets de* H et les E_i sont appelés les *arêtes de H*. Un graphe peut donc être vu comme un hypergraphe dont toutes les arêtes sont de cardinal 2. Le cardinal de l'ensemble X est appelé *ordre de* H et est noté $n(H)$. Le nombre d'arête de H est noté $m(H)$.

Graphiquement, on peut représenter les sommets d'un hypergraphe par des points et les arêtes d'un hypergraphe par :

- Une boucle, si son cardinal est 1
- Une ligne, si son cardinal est 2

– Une patate contenant tous ses extrémités, si son cardinal est supérieur à 2

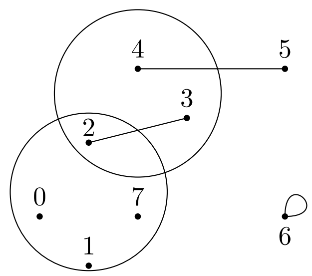

FIGURE 1 – Exemple d'hypergraphe

On appelle *rang d'un hypergraphe* le cardinal maximal de ses arêtes : $r(H) = max|E_j|$. L'*anti-rang* est au contraire le cardinal minimal de ses arêtes : $s(H) = min|E_j|$. Par exemple, un graphe est un hypergraphe de rang 2. Un hypergraphe est dit *uniforme* si son rang et son anti-rang sont égaux, c'est à dire si tous les cardinaux de ses arêtes sont égaux. Il est *r-uniforme* si le cardinal de ses arêtes est r.

On appelle *étoile centrée en x dans H* l'hypergraphe partiel $H(x)$ formé par les arêtes contenant, et est noté $H(x)$. Ainsi, le *degré de x* est défini comme : $d_H(x) = m(H(x))$. Le *degré maximal* de H est noté $\Delta(H) = max(d_H(x))$. Un hypergraphe est dit être *régulier* si tous ses sommets sont de même degré. On a donc un n-uple de degré décroissant pour un hypergraphe H : $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$.

On dit qu'un hypergraphe est *simple* si aucune de ses arêtes en contient une autre. Un tel hypergraphe est aussi appelé *famille de Sperner*.

2.2 Théorème de Sperner

Nous allons nous intéresser au cardinal des arêtes des hypergraphes simples.

Théorème 1 (Théorème de Sperner)**.** *Tout hypergraphe simple H d'ordre n vérifie la relation :*

$$\sum_{E \in H} \frac{1}{\binom{n}{|E|}} \leq 1 \tag{1}$$

De plus, on a :

$$m(H) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \tag{2}$$

– *Si $n = 2h$, on a l'égalité en (2) ssi $H = K_n^h$, l'hypergraphe d'ordre n ayant toutes les arêtes de degré h.*
– *Si $n = 2h + 1$, on a l'égalité en (2) ssi $H = K_n^h$ ou $H = K_n^{h+1}$.*

Démonstration.

• Considérons G le graphe orienté dont les sommets sont les sous-ensembles de X et admettant un arc de A vers B ssi $A \subset B$ et $|A| = |B| - 1$.

Soit $E \in H$ on a $|E|!$ chemins dans G allant de $\emptyset$ à E. Le nombre total de chemin allant de $\emptyset$ à X est donc :

$$n! \geq \sum_{E \in H} (|E|)!.(n - |E|)!$$

En effet, H est simple : on ne peut pas avoir deux arêtes de H sur le même chemin, sans que l'une soit incluse dans l'autre. Un chemin de $\varnothing$ à E ne peut donc jamais passer par 2 arêtes de H.

Ainsi, on obtient l'inégalité (1).

- De plus, on a que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Donc, pour tout $E \in H$, on a $\binom{n}{|E|} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Ainsi, on trouve que :

$$1 \geq \sum_{E \in H} \frac{1}{\binom{n}{|E|}} \geq m(H) . \frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}.$$

D'où l'inégalité (2).

- Si on a l'égalité en (2), alors, pour toute arête E de H, $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{|E|}$.

- Supposons que n est pair ($n = 2h$).
Donc, l'inégalité utilisée pour obtenir (2) était une égalité, ie toutes les arêtes de H sont de cardinal h. Donc, H est h-uniforme et $m(H) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. D'où, $H = K_n^h$.

- Supposons que n est impair ($n = 2h + 1$).
De même, toutes les arêtes de H sont de cardinales soit h, soit $(h+1)$. Soit X_h l'ensemble des sommets du graphe G représentant les arêtes de H de cardinal h. Montrons que soit X_h, soit X_{h+1} est vide.

$(X_h \cup X_{h+1})$ est un stable de G (car H est stable) et $m(H) = |X_h \cup X_{h+1}|$. Le nombre d'arc de G issus de X_h est $|X_h|.(n-h)$ (par construction de G). Considérons ΓX_h = sommets u tel que $x \to u$ et $x \in X_h$. Le nombre d'arc de G arrivant sur ΓX_h est donc $|\Gamma X_h|.(h+1)$. Ainsi, on obtient que :

$$|\Gamma X_h|.(h+1) \geq |X_h|.(n-h)$$

D'où, $|\Gamma X_h| \geq |X_h|$ (car $n = 2h+1$). De plus, cette inégalité est stricte seulement si $X_h \neq \varnothing$ ou $X_h \neq \mathcal{P}_h(X)$.

Or, si l'inégalité est stricte, on a :

$$m(H) = |X_h| + |X_{h+1}| \leq |X_h| + |\mathcal{P}_{h+1}(X) - \Gamma X_h| < |X_h| + \binom{n}{h+1} - |X_h| = \binom{n}{h+1}$$

Il y a donc contradiction. Donc, $X_h = \varnothing$ ou $X_h = \mathcal{P}_h(X)$, ce qui correspond respectivement à $H = K_n^{h+1}$ et $H = K_n^h$.

□

On remarque qu'un hypergraphe peut être vu comme un sous-ensemble de $\mathcal{P}(S)$. Ainsi, les propriétés sur les hypergraphes exprimables en terme d'inclusion, d'union ou d'intersection correspondent à des propriétés sur des familles d'ensemble. Par exemple, un hypergraphe simple (qui n'admet aucune arête contenant une autre) peut être vu comme une *anti-chaîne* (qui est, par définition, une famille d'ensemble $(A_i)_i$ vérifiant : pour tout i et j, $A_i \not\subset A_j$). Le théorème de Sperner devient donc :

Theorème 2 (Théorème de Sperner (version ensembliste))**.** *Soit $\mathcal{A}$ une anti-chaîne composée de sous-ensemble de S, de cardinal n. Alors :*

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

Initialement, le théorème de Sperner était constitué que de la seconde inégalité. La première inégalité a été découverte parallèlement par Lubell (1966), Yamamoto (1954) et Meschalkin (1963) et implique la seconde inégalité. L'idée de la preuve originelle de Sperner est la suivante.

Considérons $\mathcal{A}$ une anti-chaîne de S, avec $|S| = n$. Soit p_i le nombre d'éléments de $\mathcal{A}$ de taille i avec $0 \leq i \leq n$:

- S'il existe un $p_i > 0$ pour un $i < \frac{n-1}{2}$, alors on peut remplacer les p_i ensembles de taille i par p_i ensembles de taille $(i+1)$ tout en conservant la propriété d'anti-chaîne.
- S'il existe un $p_i > 0$ pour un $i > \frac{n}{2}$, alors on peut remplacer les p_i ensembles de taille i par p_i ensembles de taille $(i-1)$ tout en conservant la propriété d'anti-chaîne.

Ainsi, en itérant autant que possible ces 2 transformations, on transforme $\mathcal{A}$ en une anti-chaîne $\mathcal{A}'$ de même cardinal que $\mathcal{A}$ et dont tous les ensembles sont de taille $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Comme il n'y a que $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ ensembles de cardinal $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, on obtient bien l'inégalité de Sperner.

L'étude combinatoire des ensembles finis est appelée *théorie de Sperner* et s'étend aux hypergraphes.

2.3 Une généralisation du théorème de Sperner

Nous allons voir une généralisation du théorème de Sperner due à Bollobas.

Théorème 3. *Soit $H = (E_1, ..., E_m, F_1, ...F_m)$ un hypergraphe d'ordre n avec $2m$ arêtes telles que $E_i \cap F_j = \varnothing$ ssi $i = j$. Alors :*

$$\sum_{j=1}^{m} \binom{|E_j| + |F_j|}{|E_j|}^{-1} \leq 1 \tag{3}$$

L'égalité est atteinte si $r, s \in \mathbb{N}$ avec $r + s = n$ et $(E_1, ..., E_m) = K_n^r$ et $(F_1, ..., F_m) = K_n^s$.

Démonstration. Soit X un ensemble de sommets de H.
Posons $Y = \{(S_j, T_j) | S_j, T_j \subset X, S_j, T_j \neq \varnothing et S_j \cap T_j = \varnothing\}$.
Soit G le graphe non orienté dont les sommets sont Y et tel que l'on ait une arête entre (S_j, T_j) et (S_k, T_k) ssi $S_k \cap T_j = \varnothing$ ou $S_j \cap T_k = \varnothing$.

Soit Π une permutation sur X et $S \subset X$. On note $\bar{S}$ le plus petit intervalle de la séquence $\sigma = [\Pi(1), ..., \Pi(n)]$ contenant S. Posons $Y(\Pi) = \{(S,T) \in Y | \bar{S} \cap \bar{T} = \varnothing, \bar{S} avant \bar{T} dans \sigma\}$: $Y(\Pi)$ est un sous-graphe de G.

Supposons avoir 2 sommets (S_j, T_j) et (S_k, T_k) de $Y(\Pi)$ non adjacents. Alors on a :

$$\begin{cases} \bar{S_j} \cap \bar{T_j} = \varnothing, \\ \bar{S_k} \cap \bar{T_k} = \varnothing, \\ \bar{S_j} \cap \bar{T_k} \neq \varnothing, \\ \bar{S_k} \cap \bar{T_j} \neq \varnothing, \end{cases} \tag{4}$$

ce qui n'est pas possible. Donc, $Y(\Pi)$ est une clique de G.

Dans le graphe G, d'ensemble des sommets Y, on prend p cliques $C_1, ...C_p$ et $S \subset Y$ un stable de G. On peut compter les $(y, C_i) \in \{(S \cap C_i) x \mathcal{P}(G)\}$ de 2 manières :

$$\sum_{y \in S} |\{i | y \in C_i\}| = \sum_{i=1}^{p} |C_i \cap S| \leq p$$

car S est un stable de G et donc que les $|C_i \cap S|$ valent 1.

Or, comme l'ensemble des $(E_j, F_j)_{j=1..m}$ est un stable de G, en appliquant la formule trouvée ci-dessus avec pour C_i les $Y(\Pi)$ (et donc $p = n!$), on obtient :

$$\sum_{j=1}^{m} |\{\Pi | (E_j, F_j) \in Y(\Pi)\}| \leq n!$$

D'autre part, on a que :

$$|\{\Pi | (E, F) \in Y(\Pi), EetFdisjoints\}| = \binom{n}{|E \cup F|}.(n - |E \cap F|)!.|E|!.|F|! = n!.\binom{|E| + |F|}{|E|}^{-1}$$

D'où, l'inégalité (3) □

On remarque que l'on retombe sur la première inégalité du théorème de Sperner en prenant F_j = le complémentaires de E_j.

Par la suite, nous allons voir différentes applications du théorème de Sperner.

3 Théorème de Erdös-Ko-Rado

3.1 Énoncé du théorème EKR

Soit H un hypergraphe. On appelle *famille intersectante de* H un ensemble d'arête ayant 2 à 2 une intersection non vide. En particulier, une arête ne peut en contenir une autre. Un hypergraphe intersectant est donc forcément simple, donc on peut prévoir une borne maximale plus contraignante que celle du théorème de Sperner.

Théorème 4 (Théorème d'Erdös-Ko-Rados (EKR)). *Soit H un hypergraphe simple, intersectant d'ordre n, de rang $r \leq n/2$. Alors :*

$$\sum_{E \in H} \binom{n-1}{|E|-1}^{-1} \leq 1 \tag{5}$$

De plus,

$$m(H) \leq \binom{n-1}{r-1} \tag{6}$$

L'égalité est atteinte en (6) si et seulement si H est une étoile de K_n^r avec $r < n/2$.

La première inégalité constitue une amélioration de ce théorème, faite par Green, Katona et Kleitman. Avant de prouver ce théorème, nous allons d'abord nous concentrer sur le lemme intermédiaire suivant :

Lemme 1 (Greene, Katona, Kleitman). *Soient $x_1, ...x_n$ des points placés dans cet ordre sur un cercle. Soit $\mathcal{A} = (A_1, ..., A_m)$ une famille d'intervalles de points de ce cercle telle que :*

$$\begin{cases} (\forall i \leq m) |A_i| \leq n/2, \\ (\forall i \neq j) A_i \cap A_j \neq \varnothing, \\ (\forall i \neq j) A_i \not\subset A_j. \end{cases} \tag{7}$$

Alors,

$$\begin{cases} m \leq min|A_i|, \\ \sum_{i=1}^{m} |A_i|^{-1} \leq 1. \end{cases} \tag{8}$$

De plus, l'égalité est atteinte si et seulement si $\mathcal{A}$ est une famille de m intervalles circulaires de cardinal m avec un point commun.

Démonstration.

- Supposons que A_1 soit l'ensemble de cardinal minimum de $\mathcal{A}$. On a donc $A_1 \cap A_i \neq \varnothing$ pour $i \neq 1$ et ces $(A_1 \cap A_i)$ sont des intervalles avec une et une seule de leurs extrémités coïncidant avec une extrémité de A_1 (car A_i n'est pas contenus dans A_1). De plus, tous les $(A_1 \cap A_i)$ sont différents. Le nombre d'intervalles possibles sous cette forme est inférieur ou égal à $2(|A_1| - 1)$.

  D'après les deux première hypothèses, les ensembles $(A_1 \cap A_i)$ et $(A_1 \cap A_j)$ pour $i \neq j \neq 1$ ne forment pas une bipartition de A_1. Ainsi, parmi tous les $(A_1 \cup A_i)$ dénombrés précédemment, la moitié de ces possibilités est envisageable, c'est à dire : $m - 1 \leq |A_1| - 1$. D'où, les 2 inégalités de (8).
- Supposons avoir l'égalité dans la dernière inégalité de (8). Alors :

$$1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{|A_1|} \leq \frac{m}{|A_1|} \leq 1.$$

  D'où, pour tout i, $|A_i| = |A_1| = m$. On obtient donc la bonne configuration. □

On revient à la démonstration du théorème :

Démonstration.

- Considérons $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Soit Π une permutation de $\{1, ..., n\}$.
  On pose H_Π = arêtes de H qui sont des intervalles de la séquence circulaire $x_{\Pi_1}, ..., x_{\Pi_n}$. Pour $E \in H$, posons $\beta(H) = |\Pi / E \in H_\Pi|$.
- On applique le lemme précédent : on a donc $\sum_{E \in H_\Pi} \frac{1}{|E|} \leq 1$. D'où :

$$\sum_{E \in H} \frac{\beta(E)}{|E|} = \sum_{E \in H} \sum_{\Pi, E \in H_\Pi} \frac{1}{|E|} = \sum_{\Pi} \sum_{E_\Pi \in H} \frac{1}{|E|} \leq n!$$

- Soit E_0 une arête de H de cardinal h et $x_0 \in E_0$. E_0 est donc une arête de l'hypergraphe $H' = K_n^h(x_0)$ (l'hypergraphe d'ordre n, contenant toutes et seulement les arêtes de cardinal h et contenant x_0). En appliquant le lemme sur cet hypergraphe, comme on se trouve dans le cas d'égalité, on obtient :

$$\frac{\beta(E_0)}{|E_0|} = \frac{1}{m(H')} \sum_{E' \in H'} \frac{\beta(E)}{|E|} = \frac{n!}{m(H')} = n! \binom{n-1}{|E_0| - 1}^{-1}$$

- D'où, en réinjectant cette égalité dans l'inégalité trouvée précédemment :

$$\sum_{E \in H} \binom{n-1}{|E| - 1}^{-1} = \frac{1}{n!} \sum_{E \in H} \frac{\beta(E)}{|E|} \leq \frac{n!}{n!} = 1.$$

D'où (5).

- De plus, pour tout arête $E \in H$, on a $|E| \leq r \leq \frac{n}{2}$. Donc,

$$m(H). \binom{n-1}{r-1}^{-1} \leq \sum_{E \in H} \binom{n-1}{|E| - 1}^{-1} \leq 1 (par (5))$$

D'où (6). □

3.2 Une application probabiliste : le théorème de Liggett

Supposons que $Y_1, ..., Y_n$ soient des variables indépendantes, valant 1 avec probabilité p et 0 avec probabilité $(1-p)$, avec $p \geq 1/2$. Le théorème de Liggett est :

Théorème 5 (Liggett (1977))**.** *Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des réels non négatifs tels que $\sum_i \alpha_i = 1$. Alors, en prenant les Y_i définis ci-dessus, on a que :*

$$P(\alpha_1 Y_1 + ... + \alpha_n Y_n \geq 1/2) \geq p \tag{9}$$

Démonstration. (en utilisant le théorème EKR)

- Supposons qu'aucune somme des α_i ne vaut 1/2 (dans le cas contraire, on modifie très légèrement les α_i pour avoir cette condition).
Posons M_k le nombre de sous-ensembles A de $\{1, ..., n\}$ de taille k tels que $\sum_{i\in A} \alpha_i > 1/2$. Alors, on a $M_k + M_{n-k} = \binom{n}{k}$ (car pour tout ensemble de cardinal k, soit la somme des α_i correspondante est au dessus de 1/2, soit en dessous). On remarque que, pour k fixé, 2 ensemble contribuant à M_k ne peuvent être disjoint (sinon, on aurait une somme totale strictement supérieure à 1). La Famille des ensembles A contribuant à M_k.
D'où, par le théorème EKR, si $k \leq \frac{n}{2}$, on a :

$$M_k \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

- Dans ce cas, on a :

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i \geq \frac{1}{2}\Big) = \sum_{k=1}^{n} M_k p^k (1-p)^{n-k}$$

En posant $k = h + 1$ on obtient donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = p \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n-1}{h} p^h (1-p)^{n-1-h} = p(p+1-p)^(n-1) = p.$$

D'où, en comparant cette expression à la précédente :

$$\begin{aligned}
P\Big(\sum_{i-1}^{n} \alpha_i Y_i \geq \frac{1}{2}\Big) - p &= \sum_{k=1}^{n} p^k (1-p)^{n-k} \Big(M_k - \binom{n-1}{k-1}\Big) \\
&= \sum_{k\leq n/2} p^k (1-p)^{n-k} \Big(M_k - \binom{n-1}{k-1}\Big) + \sum_{j<n/2} p^{n-j} (1-p)^j \Big(M_{n-j} - \binom{n-1}{n-j-1}\Big) \\
&= \sum_{k\leq n/2} p^k (1-p)^{n-k} \Big(M_k - \binom{n-1}{k-1}\Big) + \sum_{j<n/2} p^{n-j} (1-p)^j \Big(\binom{n}{j} - M_j - \binom{n-1}{j}\Big) \\
&= \sum_{k\leq n/2} p^k (1-p)^{n-k} \Big(M_k - \binom{n-1}{k-1}\Big) + \sum_{j<n/2} p^{n-j} (1-p)^j \Big(\binom{n-1}{j-1} - M_j\Big) \\
&\geq \sum_{k<n/2} \big(p^k (1-p)^{n-k} - p^{n-k} (1-p)^k\big)\Big(M_k - \binom{n-1}{k-1}\Big)
\end{aligned} \tag{10}$$

- Il ne nous reste plus qu'à montrer que l'expression de droite est positive ou nulle. On a déjà que $M_k - \binom{n-1}{k-1} \geq 0$ (obtenu via par le théorème EKR), donc il ne reste plus qu'à montrer que $p^k(1-p)^{n-k} \geq p^{n-k}(1-p)^k$, pour tout $k < \frac{n}{2}$, ie $p^{n-2k} \geq (1-p)^{n-2k}$ pour tout $k < \frac{n}{2}$ (qui est vrai vu que $p \geq 1/2$. □

3.3 Généralisation du théorème EKR

On remarque que le théorème EKR est limité par une condition sur le rang r de l'hypergraphe : r doit être inférieur ou égal à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Une généralisation du théorème EKR, supprimant cette hypothèse, a été démontrée en 1976 par Green, Kleitman et Katona :

Théorème 6 (Généralisation de EKR). *Soit H un hypergraphe simple d'ordre n et intersectant. Alors, on a que :*

$$\sum_{E \in H / |E| \leq \frac{n}{2}} \binom{n}{|E|-1}^{-1} + \sum_{E \in H / |E| > \frac{n}{2}} \binom{n}{|E|}^{-1} \leq 1 \tag{11}$$

et que :

$$m(H) \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \tag{12}$$

avec égalité dans (12) pour $H = K_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$.

Démonstration. (cf [2] p12-13) □

4 Théorème de Littlewood-Offord

Nous allons maintenant voir une application du théorème de Sperner à un problème géométrique.

Considérons n nombres complexes $z_1, ..., z_n$ tels que $|z_i| \geq 1$. Combien de sommes $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i z_i$ y a t-il au plus dans tout cercle de rayon r, avec $\epsilon_i \in \{-1; +1\}$? En 1943, Littlewood et Offord ont montré le résultat suivant :

Théorème 7 (Littlewood-Offord). *Le nombre de sommes $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i z_i$ se trouvant dans un cercle de rayon r est inférieur à $\frac{Cr^{2^n}.log(n)}{\sqrt{n}}$, avec C une constante.*

Ce théorème a été amélioré par Erdös : en utilisant le théorème de Sperner, il a pu éliminer le facteur $log(n)$ de la borne.

Lemme 2 (Erdös 1945). *Soient $z_1, ..., z_n$ des nombres réels de normes supérieures ou égales à 1 et J un intervalle de longueur 2 ouvert d'un côté.*
Alors, le nombre de sommes $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i z_i$ ($\epsilon_i \in \{-1; +1\}$) se trouvant dans J est au plus $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que tous les z_i sont positifs. On associe à chaque somme $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i z_i$ dans J l'ensemble $A = \{i / \epsilon_i = 1\}$.
Soient A_1 et A_2 deux de ces ensembles. Alors, $A_1 \not\subset A_2$ (sinon, les sommes correspondants à A_1 et A_2 ne peuvent pas se retrouver dans J en même temps). Donc, l'ensemble des A dont la somme correspondante est dans J est une anti-chaîne. On conclue immédiatement en appliquant le théorème de Sperner à l'ensemble des A. □

Considérons un intervalle J de longueur $2r$ ouvert à une de ses extrémités. On peut le découper en r intervalles de longueur 2 et appliquer le théorème à chacun de ces intervalles. On trouve alors qu'il y a au plus $r\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ sommes contenus dans J. Cette borne n'est pas optimale et peut être améliorée en :

$$\sum_{i=1}^{r} \binom{n}{\lfloor (n+i)/2 \rfloor}. \tag{13}$$

Revenons maintenant au cas complexe : soient $z_1, ..., z_n$ des nombres complexes de normes supérieures ou égales à 1. Alors, le nombre de sommes $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i z_i$ ($\epsilon_i \in \{-1; +1\}$) se trouvant dans un cercle de rayon r et au plus de $\frac{Cr2^n}{\sqrt{n}}$, avec C une constante.

Démonstration.

- Comme $|z_j| \geq 1$ avec $z_j = x_j + i.y_j$, alors soit $x_j \geq 1/2$, soit $y_j \geq 1/2$. Ainsi, parmi tous les z_j, une moitié vérifie la première inégalité et l'autre la seconde. Quitte à remplacer les z_j par des $i.z_j$, on peut supposer que $|x_j| \geq \frac{1}{2}$ pour au moins la moitié des z_j. De plus, on peut supposer que leurs x_j soient positifs, quitte à remplacer certains z_j par des $-z_j$.
  On peut donc supposer que $z_1, ..., z_t$ a une partie réelle $\geq \frac{1}{2}$, avec $t \geq n/2$.
- Considérons les 2^t sommes $\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j z_j$ où les $\epsilon_{t+1}, ..., \epsilon_n$ ont été fixés. On va imposer aux $\sum_{j=1}^{t} \epsilon_j z_j$ d'être dans un cercle de rayon r, donc que les sommes $\sum_{j=1}^{t} \epsilon_j x_j$ se retrouvent dans un intervalle de longueur $2r$.
  En appliquant le théorème ci-dessus aux $2.x_j$ (pour avoir la condition $x_j \geq 1$), on a donc que le nombre de telles sommes est au plus de :
  $$2r.\binom{t}{\lfloor t/2 \rfloor} = \frac{Cr2^t}{\sqrt{t}},$$
  pour une certaine constante C.
- Ainsi, pour un choix de $\epsilon_{t+1}, ..., \epsilon_n$, on a au plus $\frac{Cr2^t}{\sqrt{t}}$ sommes se trouvant dans un cercle de rayon r. Comme il y a 2^{n-t} manières de choisir les $\epsilon_{t+1}, ..., \epsilon_n$, on trouve donc que le nombre de sommes est d'au plus :
  $$\frac{Cr2^t2^{n-t}}{\sqrt{t}} = \frac{Cr2^n}{\sqrt{t}} = \frac{C'r2^n}{\sqrt{n}}$$
  avec $C \leq C' \leq \sqrt{2}.C$ (car $n/2 \leq t \leq n$). □

On obtient donc une borne plus précise que celle donnée par le théorème de Littlewood-Offord.

5 Une version probabiliste du théorème de Sperner

Soit S un ensemble fini de taille n et A, B 2 sous-ensembles de S. Quelle est la probabilité minimale que $A \subseteq B$, pour toute distribution de probabilité ?

Théorème 8. *Quelque soit la distribution de probabilité sous-jacente sur S (de cardinal n), on a toujours l'inégalité :*

$$P(A \subseteq B) > \frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \tag{14}$$

Lemme 3. *Soit $p_1, ..., p_m$ une distribution de probabilité sur un ensemble T de cardinal m. Alors, si X et Y sont deux variables aléatoires vérifiant cette distribution, alors la probabilité que 2 éléments tirés selon cette distribution est $\geq \frac{1}{m}$.*

Démonstration. On veut calculer les $\sum_{i=1}^{m} p_i^2$. On a que :

$$\sum_{i=1}^{m}(p_i - \frac{1}{m})^2 = \sum_{i=1}^{m} p_i^2 - \frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m} p_i + m.\frac{1}{m^2} \geq 0$$

Le lemme se déduit de cette inégalité assez facilement. □

On appelle *ensemble ordonné* $(S, \leq)$ où S est un ensemble muni d'une relation d'ordre $\subseteq$. Une *chaîne* est une suite d'éléments $x_1, ...x_n$, tels que $\forall i < n, x_i < x_{i+1}$. Une *décomposition en chaînes* de S est un partitionnement de S en chaînes. Deux décompositions en chaînes de S sont *orthogonales* si aucune paire d'élément se trouve dans la même chaîne dans ces 2 décompositions.

Lemme 4. *Soit $\{q(x)\}$ une distribution probabiliste d'un ensemble ordonné P. On suppose que l'on a une décomposition en m chaînes de P. Alors, la probabilité que 2 éléments de P tirés selon la distribution Q se retrouvent dans la même chaîne est $\geq \frac{1}{m}$.*

Démonstration. Dans le lemme précédent, on prend T l'ensemble des chaînes de la décomposition de P. On a notamment que $p_i = \sum q(x)$ avec les x dans la ième chaine de décomposition. □

Or, la probabilité que 2 éléments tirés au sort se retrouvent dans la même chaîne de décomposition peut être également écrite comme :

$$\sum_{x \in P} q(x) \big(\sum_{y | x, y \in C} q(y) \big) = \sum_x q^2(x) + 2. \sum_{x<y, x, y \in C} q(x).q(y)$$

On obtient donc que :

$$\sum_x q^2(x) + 2. \sum_{x<y, x, y \in C} q(x).q(y) \geq \frac{1}{m}$$

On suppose avoir 2 décompositions en m chaînes de P qui soient orthogonales. En additionnant l'inégalité ci-dessus de chaque chaînes, et en divisant par 2 le tout, on trouve que : $\sum_x q^2(x) + \sum^* q(x)q(y) \geq \frac{1}{m}$, avec $\sum^*$ la somme sur les x, y avec $x < y$ et x, y dans la même chaîne de l'une des 2 décompositions. En oubliant cette dernière condition sur les x et y, on obtient alors :

$$\sum_x q^2(x) + \sum_{x<y} q(x).q(y) \geq \frac{1}{m}$$

Pour revenir à la démonstration du théorème 8, on suppose avoir 2 décompositions en chaînes orthogonales de S en $m = \binom{n}{\lfloor N/2 \rfloor}$ chaînes, et on applique l'inégalité de ci-dessus. On arrive au résultat souhaité, c'est à dire, avec $q(A)$ la probabilité de choisir A parmi tous les ensembles de S :

$$P(A \subset B) = \sum_A q^2(A) + \sum_{A \subset B} q(A)q(B) \geq \frac{1}{m}$$

Pour finir la preuve, il ne reste plus qu'à montrer qu'il existe bien 2 décompositions en chaînes orthogonales de S en $\binom{n}{\lfloor N/2 \rfloor}$ chaînes. Ce résultat a été prouvé par Shearer et Kleitman en 1979 (cf [1] p42 pour une démonstration complète).

6 Conclusion

Après une brève introduction sur les hypergraphes, nous avons vu le théorème de Sperner, qui donne une borne supérieure au nombre d'arêtes d'un hypergraphe simple, ainsi qu'une de ses généralisation par Bollobas. Puis, nous avons vu 2 applications du théorèmes de Sperner. La première était la démonstration du théorème EKR, qui donne une borne supérieure au nombre d'arêtes d'un hypergraphe intersectant, ce théorème servant pour le théorème de Liggett en probabilité. La seconde application était l'affinement du théorème de Littlewood-Offord, qui est un problème géométrique. Enfin, nous avons vu un résultat probabiliste similaire au théorème de Sperner, concernant la probabilité que l'on ait une inclusion entre 2 sous-ensembles d'un ensemble fini.

Ainsi, la théorie de Sperner a une portée immense du fait de l'importance des sous-ensembles d'un ensemble fini dans de nombreux domaines des mathématiques, dont surtout les probabilités. Ainsi, des résultats anodins sur des anti-chaînes ou sur des hypergraphes vérifiant des propriétés particulières peuvent être d'une importance cruciale dans certains autres problèmes mathématiques, où la corrélation avec les hypergraphes n'est pas triviale. De nombreuses autres applications existent, comme par exemple l'inégalité FKG à propos des treillis (cf [1] p95 pour plus de précision) ou de nombreux résultats de dénombrements sur les hypergraphes.

Références

[1] Ian Anderson. *Combinatorics of Finite Sets*. Oxford University Press, 1989.

[2] C Berge. *Hypergraphes*. Gauthier-Villars, 1987.