Beaux ordres et graphes

Hugo Feree

1er décembre 2010

1 Introduction

Nous abordons ici le sujet des beaux ordres en nous appuyant sur [1] et [2]. La section 2 aborde quelques définitions, caractérisations, résultats et exemples généraux, notamment le lemme de Higman sur les ensembles. Nous étudions ensuite, dans la section 3 quelques ordres sur les graphes. Nous démontrerons entre autres que l'ordre induit par la relation de mineur topologique est un bel ordre sur l'ensemble des arbres, ce qui constitue le théorème de Kruskal. Enfin, nous énoncerons le théorème des mineurs, et montrerons en quoi il est lié au fait que la relation de mineur est un bel ordre.

2 Beaux ordres

2.1 Définitions et propriétés

Définition 1 (Bel ordre)**.** Un bel ordre $\prec$ sur un ensemble X est un ordre partiel sur X (*i.e.* une relation réflexive, antisymétrique et transitive) tel que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe des indices $i < j$ tels que $x_i \prec x_j$.

Définition 2 (Mauvaise suite, bonne paire)**.** Une mauvaise suite pour $(X, \prec)$ est une suite de X telle que $\forall i < j, x_i \not\prec x_j$.

Une bonne paire est au contraire un couple d'indices $i < j$ tel que $x_i \prec x_j$.

En d'autres termes, un ordre partiel est beau si et seulement s'il n'induit pas de mauvaise suite.

Ces deux petites propriétés sont simples, mais nous allons les utiliser implicitement plusieurs fois par la suite.

Lemma 1. *Soit $\prec$ un bel ordre sur X.*

– *Si $Y \subseteq X$ alors $\prec$ est aussi un bel ordre sur Y.*
– *Si $\prec'$ est une relation d'ordre sur X telle que $\prec \subseteq \prec'$, alors $\prec'$ est un bel ordre sur X.*

Démonstration. Ces propriétés se montrent trivialement : une mauvaise suite dans $(Y, \prec)$ (resp. dans $(X, \prec')$) est aussi une mauvaise suite dans $(X, \prec)$. □

Nous allons maintenant donner une caractérisation des beaux ordres. Pour cela, nous aurons besoin d'une version simplifiée du théorème de Ramsey :

Lemma 2 (Ramsey)**.** *Si l'ensemble des paires d'un ensemble infini X est colorié (i.e. partitionné) avec c couleurs ($0 < c$), alors il existe un ensemble infini $Y \subseteq X$ (appelé sous-ensemble chromatique infini) tel que toutes les paires de Y sont coloriées de la même couleur.*

Démonstration. On construit par récurrence des ensembles infinis $X_i \subseteq X$ et des éléments $x_i \in X_i$ tels que :

1. $X_{i+1} \subseteq X_i \setminus \{x_i\}$
2. les paires $\{x_i, x\}$ avec $x \in X_{i+1}$ on toutes la même couleur, et on associe cette couleur à x_i

On commence avec $X_0 = X$ et on choisit x_0 quelconque dans X. Si on a construit X_i et x_i, on colore $X_i \setminus \{x_i\}$ en donnant à x la couleur de la paire $\{x, x_i\}$. Une des couleurs apparait un nombre infini de fois dans cet ensemble, et on choisit alors X_{i+1} comme le sous-ensemble (infini, donc) avec cette couleur. On a bien par construction les conditions 1 et 2.

Nous avons donc construit la suite x_i, et associé à chaque élément une couleur. Il existe une couleur apparaissant un nombre infini de fois dans cette suite, et on pose alors Y l'ensemble des x_i de cette couleur. Par la condition 2, les arêtes entre ces éléments sont de la même couleur. □

Remarque 1. Le théorème de Ramsey, plus général, énonce ce théorème pour les sous-ensembles ordonnés de taille $k \in \mathbb{N}$ de X (au lieu des paires, *i.e.* $k = 2$). La preuve est similaire et se fait par récurrence sur k.

Définition 3 (Antichaîne)**.** Une antichaîne est un ensemble dont les éléments sont deux à deux incomparables (pour un ordre partiel donné).

Propriété 1. *Un ordre partiel est un bel ordre si et seulement si il ne contient ni antichaîne infinie, ni suite strictement décroissante.*

Démonstration. Si X contient une antichaîne infinie, on peut en extraire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les éléments sont incomparables deux à deux, et alors $\prec$ n'est pas un bel ordre. De même, si X contient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante, par transitivité, $\forall i < j, x_j \prec x_i$, et par antisymétrie, $\forall i < j, x_i \not\prec x_j$, et $\prec$ n'est pas un bel ordre sur X.

La réciproque se montre en utilisant le lemme 2 : soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X et considérons la coloration des paires d'entiers suivante :
- si $i < j$, (i, j) est de couleur 0 si $x_i \prec x_j$
- si $i < j$, (i, j) est de couleur 1 si $x_j \prec x_i$
- si $i < j$, (i, j) est de couleur 2 si x_i et x_j sont incomparables

Le théorème de Ramsey nous dit qu'il existe un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$ dont les arêtes sont de la même couleur, ce qui correspond à une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant l'un de ces trois cas :
- $\forall i < j, x_{\phi(i)} \prec x_{\phi(j)}$, *i.e.* c'est une sous-suite croissante, et alors $x_{\phi(0)} \prec x_{\phi(1)}$.
- $\forall i < j, x_{\phi(j)} \prec x_{\phi(i)}$, *i.e.* c'est une sous-suite décroissante, ce qui est impossible par hypothèse.
- $\forall i, j$, $x_{\phi(i)}$ et $x_{\phi(j)}$ sont incomparables, *i.e.* $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une antichaîne infinie de X, ce qui est aussi impossible par hypothèse.

□

Corollaire 1. *Un bel ordre est un ordre partiel tel que de toute suite infinie, on peut extraire une sous-suite croissante.*

Démonstration. Si de toute suite infinie on peut extraire une sous-suite croissante, alors les deux premiers indices i et j de cette sous-suite vérifient trivialement $x_i \prec x_j$. La réciproque est donnée par la preuve de la propriété 1. □

Lemma 3 (Higman). *Si $(X, \prec)$ est un ensemble muni d'un ordre partiel, alors on peut définir la relation $A \sqsubset B$ sur l'ensemble des parties finies de X (noté $[X]^{<\omega}$) par : il existe $f : A \to B$ injective telle que $\forall a \in A, a \prec f(a)$. Dans ce cas, si $\prec$ est un bel ordre sur X, alors $\sqsubset$ est un bel ordre sur $[X]^{<\omega}$.*

Démonstration. Cette relation est bien un ordre partiel :
- réflexivité : en utilisant la fonction identité
- transitivité : en composant les injections
- antisymétrie : si $A \sqsubset B \sqsubset A$, il existe des injections $f : A \to B$ et $g : B \to A$ vérifiant les propriétés précédentes. Alors $g \circ f$ est une bijection de A dans A, et de telles bijections forment un groupe d'ordre $!|A|$, et alors $(g \circ f)^{!|A|} = id_A$. On a alors $\forall a \in A, a = (g \circ f)^{!|A|}(a) \prec (g \circ f)(a) \prec f(a) \prec a$. Donc par antisymétrie de $\prec$, $\forall a \in A, a = f(a)$, donc $A = f(A) \subseteq B$. De même, $B \subseteq A$, donc $A = B$.

Supposons qu'il existe une mauvaise suite pour $\sqsubset$. Alors on peut construire par récurrence une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une mauvaise suite commençant par $A_0, A_1, \ldots A_n$, et A_n est tel que pour si A tel que $A_0, A_1, \dots A_{n-1}, A$ est le début d'une mauvaise suite, alors $|A_n| \leq |A|$. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une mauvaise suite. Prenons un élément a_n dans chaque A_n. D'après le corollaire 1, on peut en extraire une sous-suite croissante indexée par ϕ. On pose alors $B_n = A_n \setminus a_n$. La suite $A_0, \dots A_{\phi(0)-1}, B_{\phi(0)}, B_{\phi(1)} \dots$ ne peut alors pas être mauvaise, par minimalité de $|A_{\phi(0)}|$. Donc il existe $i < j$ et une paire $A_i \prec A_j$ ou $A_i \prec B_{\phi(j)}$ ou $B_{\phi(i)} \prec B_{\phi(j)}$. Le premier cas est impossible, tout comme le second, car trivialement, $B_{\phi(j)} \sqsubset A_{\phi(j)}$ et par transitivité, on aurait $A_i \sqsubset A_{\phi(j)}$. Donc $B_{\phi(i)} \sqsubset B_{\phi(j)}$, mais alors on peut étendre une injection de $B_{\phi(i)}$ à $B_{\phi(j)}$ vérifiant la propriété définissant $\sqsubset$ en une injection de $A_{\phi(i)}$ dans $A_{\phi(i)}$ en envoyant $a_{\phi(i)}$ sur $a_{\phi(j)}$, et alors $A_{\phi(i)} \sqsubset A_{\phi(i)}$, ce qui donne une contradiction. □

Le théorème de Higman existe aussi sur les mots finis :

Lemma 4. *Si Σ est un alphabet muni d'un bel ordre $\prec$, on peut l'étendre aux mots finis (Σ^*) : $u_1 \dots u_n \sqsubset v_1 \dots v_p$ si il existe une fonction strictement croissante*[1] *$f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, p\}$ telle que : $\forall i, u_i \prec u_{f(i)}$. Cette relation définit un bel ordre sur Σ^*.*

Démonstration. Ce résultat peut s'obtenir facilement à partir du lemme de Higman sur les ensembles, et inversement : Tout s'abord, en utilisant des arguments similaires à ceux de la preuve précédente, cette relation est bien un ordre partiel. A partir d'un bel ordre $\prec$ sur Σ, on peut définir un ordre partiel sur $\Sigma \times \mathbb{N}$: $(a, i) \prec (b, j)$ si $a \prec b$ et $i < j$. C'est l'ordre produit sur $\prec$ et $\leq$, qui est un bel ordre, d'après la propriété 2, démontrée plus loin (sans utiliser ce résultat, bien entendu). On a alors : si $\{(u_1, 1), \dots (u_n, n)\} \sqsubset \{(v_1, 1), \dots (v_p, n)\}$ (où $\sqsubset$ désigne l'ordre sur $[\Sigma \times \mathbb{N}]^{<\omega}$), alors $u_1 \dots u_n \sqsubset v_1 \dots v_p$.

L'ordre ainsi défini est alors inclus dans l'ordre sur les mots finis, et comme il est beau (d'après le lemme de Higman versions ensembliste), l'ordre sur les mots finis est beau.

Inversement, on aurait pu déduire la version ensembliste de ce lemme à partir de la version mots : Si on choisit un ordre sur les éléments de tout ensemble fini de X, alors on peut considérer la relation d'ordre $\sqsubset'$ sur les ensembles finis, définie de la même manière que $\sqsubset$, en ajoutant que l'injection f préserve l'ordre (que l'on vient de choisir) dans l'ensemble fini. À chaque ensemble fini on associe le mot sur X dont les lettres sont dans l'ordre de A. Dans ce cas, l'ordre sur les mots définis sur l'alphabet X à partir de l'ordre $\prec$ est un bel ordre (si l'on admet la version mots finis du lemme de Higman), et est inclus dans l'ordre sur $[X]^{<\omega}$, ce qui achève la preuve.

1. Dans le sujet, cette fonction est seulement injective, et alors la relation définie n'est pas antisymétrique : si $a \prec b$, on a $ab \sqsubset ba \sqsubset ab$

□

2.2 Exemples simples

Exemple 1. $(\mathbb{N}, \leq)$ est un bel ordre.

Ceci découle d'un axiome de Péano : tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Donc une suite dans $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément, et alors celui-ci est plus petit que le suivant.

On peut étendre l'ordre naturel sur les entiers à l'ordre produit sur $\mathbb{N}^k$, qui est aussi un bel ordre.

Plus généralement :

Propriété 2. *Si $(X, \prec_X)$ et $(Y, \prec_Y)$ sont des ensembles munis de beaux ordres, alors $X \times Y$ muni de l'ordre produit $\prec$, défini par $(x, y) \prec (x', y') \Leftrightarrow x \prec_X x' et y \prec_X y'$, est un bel ordre sur $X \times Y$.*

Démonstration. Prenons une suite dans $X \times Y$. En la projetant sur sa première composante, on obtient une suite de X. D'après le corolaire 1, on peut en extraire une sous-suite croissante. Considérons la sous-suite de la suite initiale avec la même fonction d'extraction. En la projetant de même sur sa deuxième composante, on obtient une suite dans Y, dont on peut extraire une sous-suite croissante. La suite de $X \times Y$ correspondante est donc croissante pour l'ordre produit, et le même corollaire permet de conclure que l'ordre produit est un bel ordre. □

Par induction sur k, on peut ainsi montrer que l'ordre produit sur N^k est un bel ordre.

3 Beaux ordres sur les graphes

Nous allons maintenant nous intéresser à différents ordres sur les graphes ou certaines classes de graphes.

3.1 Un ordre simple : inclusion

L'ordre le plus simple sur les graphes est l'inclusion (à isomorphisme près). C'est trivialement un ordre partiel. Cependant, ce n'est pas un bel ordre, même seulement sur la classe des arbres. Par exemple, la suite d'arbres suivante est mauvaise : aucuns de ces arbres ne sont comparables.

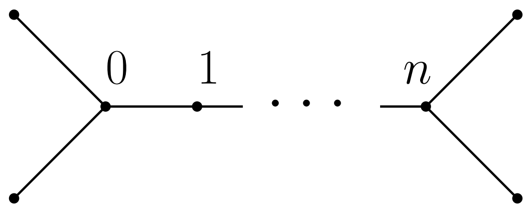

FIGURE 1 – L'arbre d'indice n d'une mauvaise suite pour l'inclusion.

3.2 L'ordre induit par la relation de mineur topologique

Avent d'étudier la relation de mineur, définissons une notion plus large : celle de mineur topologique.

Définition 4 (Subdivision)**.** Si G est un graphe et que l'on peut obtenir G' à partir de G en remplaçant les arêtes de G par des chemins de longueur plus grande que 1, on dit que G' est une subdivision de G.

Définition 5 (Mineur topologique)**.** Un graphe G est un mineur topologique d'un graphe G' si il existe un sous-graphe de G' isomorphe à une subdivision de G.

Exemple 2. La figure 2 fournit un exemple de construction de mineur topologique.

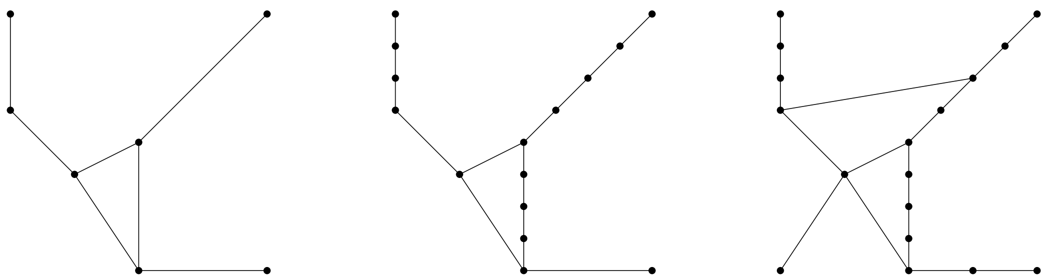

FIGURE 2 – G (au centre) est une subdivision de X (a gauche) et un sous-graphe de Y (à gauche), donc X est un mineur topologique de Y.

Notez que décider si un graphe est mineur d'un autre est $\mathcal{N}P$-complet. Par exemple, le problème du cycle hamiltonien revient à décider si un graphe de taille n a pour mineur topologique le cycle de taille n.

Propriété 3. *La relation de mineur topologique est un ordre partiel sur les graphes.*

Démonstration.

- La réflexivité est immédiate.
- Transitivité : supposons que X est un mineur topologique de Y et Y un mineur topologique de Z. Après avoir subdivisé X, on peut effectuer les subdivisions d'arêtes (pour passer de Y à Z) qui étaient déjà dans Z. Si une subdivision concerne une arête qui n'est pas dans X, alors on peut ajouter directement l'arête subdivisée à l'étape suivante (voir figure 3).

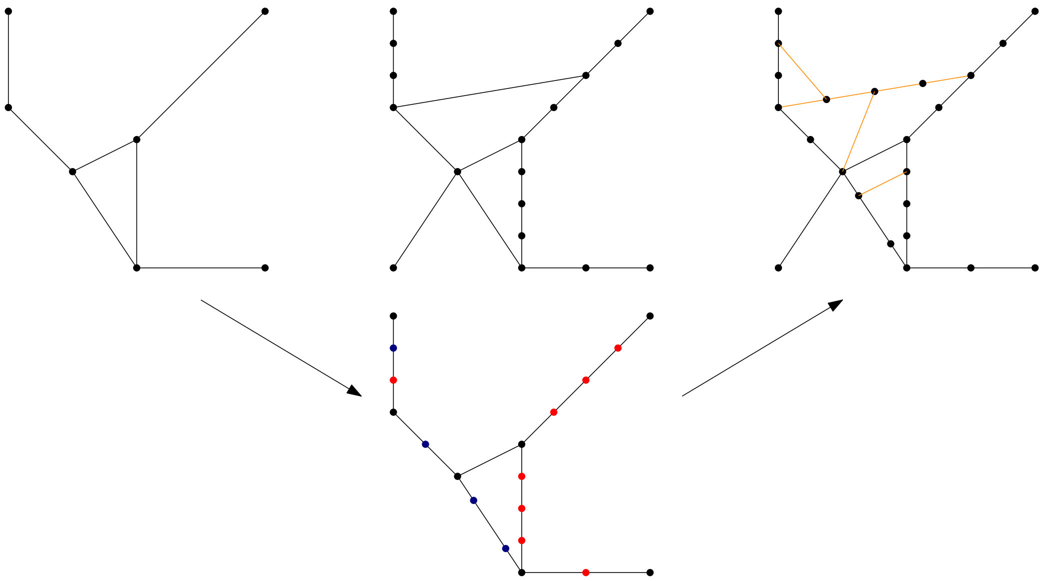

FIGURE 3 – Illustration de la preuve de transitivité : en haut, de gauche à droite : X, Y et Z. En bas : un sous-graphe de Z obtenu en subdivisant X (en rouge : subdivisions pour passer de X à Y et en bleu celles pour passer de Y à Z).

- Antisymétrie : on remarque que X est un mineur topologique de Y si on peut obtenir X en enlevant des sommets et des arêtes à Y, puis en contractant certaines arêtes (très exactement des arêtes dont les extrémités sont de degré 2, *i.e.* des arêtes dans des chemins induits de longueur au moins 2). Il est alors immédiat qu'un mineur strict d'un graphe a strictement moins de nœeds ou de sommets que celui-ci, ce qui prouve l'antisymétrie.

□

Propriété 4. *Si X est un mineur topologique de Y alors X est aussi un mineur de Y.*

Démonstration. Ceci découle directement du dernier point de la propriété précédente : un mineur s'obtient par contractions d'arêtes et suppressions de nœuds et d'arêtes. Un mineur topologique s'obtient de la même façon, seulement les suppressions doivent être effectuées avant les contractions, et celles-ci sont restreintes à certaines arêtes seulement. □

Théorème 1 (Kruskal)**.** *La relation de mineur topologique est un bel ordre sur l'ensemble des arbres finis.*

Démonstration. Nous allons en fait montrer un résultat plus fort : la relation de mineur topologique sur les arbres enracinés est un bel ordre. C'est à dire qu'un arbre enraciné est un mineur topologique d'un autre si c'en est un mineur topologique au premier sens et que sa racine correspond (après subdivision et inclusion) à la racine du second. Ceci ne change en fait rien à la définition, mais permet une démonstration assez simple, similaire à celle du lemme de Higman (lemme 3).

Supposons par l'absurde qu'il existe une mauvaise suite pour cet ordre. Construisons alors une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout n, il existe une mauvaise suite commençant par $T_0, \dots T_n$ telle que T_n est un arbre de taille minimale. Cette suite est elle même une mauvaise suite. Notons r_n la racine de T_n. Soit A_n l'ensemble des arbres de la forêt $T_n \setminus \{r_n\}$ (les éléments de A_n sont enracinés en un fils de r_n). Montrons que cet ordre est un bel ordre sur l'ensemble $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Soit T'_n une suite dans cet ensemble. Posons $n(i)$ le plus petit entier tel que $T'_{n(i)} \in A_i$. Soit k un entier avec $n(k)$ minimal. Alors la suite $T_0, \dots T_{n(k)-1}, T'_k, T'_{k+1}, \dots$ est une bonne suite, par construction de $T_{n(k)}$ (car $|T'_k| < T_{n(k)}$ puisqu'il en est un sous-arbre strict). Il y a donc une bonne paire d'indices dans cette suite. Elle ne peut être de la forme $T_i \prec T_j$ car alors la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne serait pas une mauvaise suite. On ne peut pas non plus avoir $T_i \prec T'_j$, car $T'_j \prec T_{n(j)}$ et par transitivité $T_i \prec T_{n(j)}$. Or $i < n(k) \leq n(j)$ par minimalité de $n(k)$, ce qui contredirait alors que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est mauvaise.

A est donc bien ordonné par $\prec$, et alors le lemme de Higman affirme que $[A]^{<\omega}$ est bien ordonné pour l'extension de $\prec$ aux ensembles finis. Cela signifie qu'il y a une bonne paire $i < j$ dans la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il y a donc, par définition, une injection $f : A_i \to A_j$ associant à chaque arbre fils de T_i un arbre fils de T_j tel que le premier soit un mineur topologique du second et la racine du premier est associée à la racine du second. En reformant ainsi les arbres originaux, on prouve que T_i est un mineur topologique de T_j, ce qui achève la preuve par une contradiction. □

Remarquez que les preuves des résultats précédents ne sont pas constructives : étant donné une suite, elles ne permettent pas d'expliciter une bonne paire d'indices.

Cependant, ce résultat n'est pas valable sur l'ensemble des graphes :

Théorème 2. *La relation de mineur topologique n'est pas un bel ordre sur l'ensemble des graphes.*

Démonstration. Pour prouver ce résultat, il nous suffit d'un contre exemple. La suite de graphes (notez que ce ne peut être une suite d'arbres d'après le résultat précédent) décrite par la figure 4 est en effet une mauvaise suite. L'intuition est que pour obtenir un tel graphe de taille inférieure, il faut

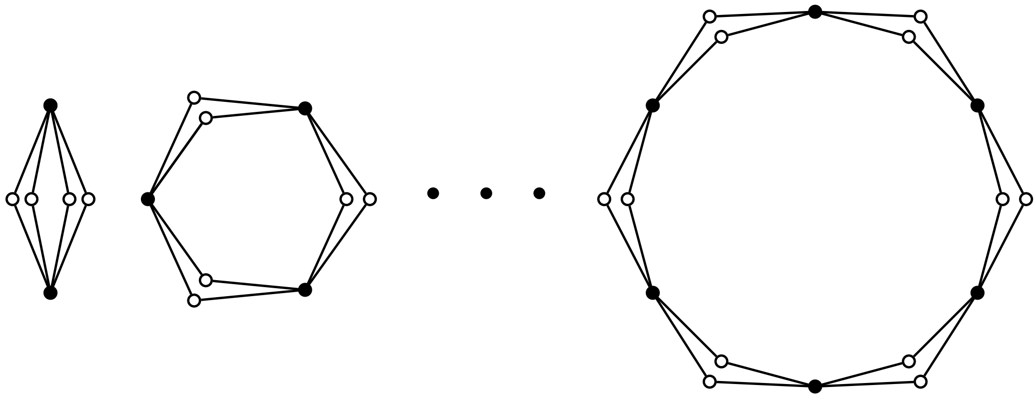

FIGURE 4 – Une mauvaise suite pour la relation de mineur topologique sur l'ensemble des graphes.

contracter et supprimer les arêtes entre deux nœuds pleins (voir figure 5), ce qui est possible pour former un mineur, mais pas pour former un mineur topologique.

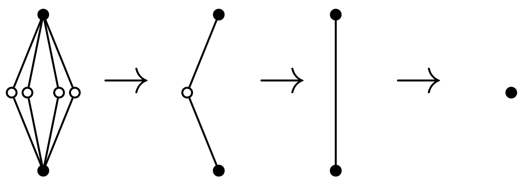

FIGURE 5 – Les opérations de mineur (suppressions d'arêtes et de nœuds, puis contractions successives de deux arêtes) pour réduire un graphe de la figure 4 au graphe d'indice inférieur.

□

4 L'ordre induit par la relation de mineur et le théorème des mineurs

4.1 Sur les graphes finis

Théorème 3. *La relation de mineur est un bel ordre sur l'ensemble des graphes finis.*

Nous n'allons pas prouver ce résultat, qui nécessite des décompositions complexes et qui, comme nous allons le voir, implique directement le théorème des mineurs.

Théorème 4 (Théorème des mineurs, Robertson et Seymour)**.** *Toute classe de graphes close par mineurs peut être caractérisée par un nombre fini de mineurs interdits.*

Démonstration. La réciproque à ce théorème est immédiate. Soit $\mathcal{C}$ une classe de graphes close par mineurs. Soit $\mathcal{C}'$ l'ensemble des graphes qui ne sont pas dans $\mathcal{C}$, mais dont tous les mineurs stricts y sont. On remarque que cet ensemble est exactement l'ensemble minimal des mineurs interdits de $\mathcal{C}$. Le théorème des mineurs affirme que cet ensemble est fini. Si l'on suppose qu'il ne l'est pas, alors on peut l'écrire comme une suite infinie, et le théorème 3 affirme quelle contient deux éléments tels que l'un est mineur de l'autre, ce qui est impossible par définition de $\mathcal{C}'$. □

Ce théorème est fondamental dans la théorie des graphes, et permet notamment de démontrer que toute classe de graphes close par mineurs est décidable en temps polynomial.

4.2 Sur les graphes infinis

On peut généraliser la notion de mineur aux graphes infinis.

La conjecture de Seymour affirme que tout graphe infini dénombrable est un mineur strict de lui-même. Cela signifie intuitivement qu'à partir d'un graphe infini, il existe un nombre infini, non nul d'opérations de mineur (contraction d'arête, suppression d'arête ou de nœud) tel que le graphe infini obtenu après transformation est isomorphe au graphe initial.

Une définition plus précise [5] définit H isomorphe à un mineur de G par : il existe une application α qui associe à chaque nœud de H un sous-graphe connexe de G (et $v \neq v' \Rightarrow \alpha(v) \cap \alpha(v') = \emptyset$), et à chaque arête de H une arête de G (incluse dans aucun des sous-graphes précédents, et $e \neq e' \Rightarrow \alpha(e) \neq \alpha(e')$) joignant les sous-graphes associés à ses extrémités.

C'est un mineur strict si au moins l'un des $\alpha(v)$ est de cardinal strictement plus grand que 1.

Propriété 5. *La conjecture de Seymour implique le théorème des mineurs (sur les graphes finis).*

Démonstration. Plus exactement, elle implique le théorème 3. Nous allons le montrer dans le cas simple des graphes connexes. Si on a une suite de graphes connexes (que l'on peut supposer de taille croissante, puisqu'on peut en extraire une sous-suite de taille croissante), on peut construire le graphe infini de leur union. Il existe un de ces graphes G pour lequel l'un des sommets v est tel que $1 < |\alpha(v)|$. L'image par α de G est un sous-graphe connexe de G et est donc incluse dans un autre des graphes finis. Par définition de α, c'en est un mineur strict (donc différent de lui même), et comme on a supposé que la suite était croissante, on obtient une bonne paire dans cette suite. $\square$

Remarque 2.
- Cette conjecture a été invalidée dans le cas des graphes infinis [3].
- Cette conjecture a été démontrée dans le cas des arbres infinis [4].
- Le cas général est toujours un problème ouvert.

5 Conclusion

Après une brève étude des beaux ordres, nous avons observé les ordres naturels sur les graphes, notamment ceux induits par les relations de mineurs topologiques et de mineur. La définition de bel ordre n'a a priori pas grand chose à voir avec les problèmes de graphes usuels, d'autant que peu de preuves sont constructives, *i.e.* permettent d'en extaire des algorithmes (certaines utilisent même l'axiome du choix dénombrable). Cependant, nous avons vu que la propriété de bel ordre de la relation de mineur est à la base du théorème fondamental des mineurs. La majeure partie des problèmes ouverts sur le sujet concerne surtout les ordres sur les graphes infinis, notamment la conjecture de Seymour.

Références

[1] R. Diestel. *Graph decompositions : a study in infinite graph theory.* Oxford University Press, USA, 1990.

[2] L. Lovász. Graph minor theory. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 43(1) :75–86, 2006.

[3] B. Oporowski. A counterexample to Seymour's self-minor conjecture. *Journal of Graph Theory*, 14(5) :521–524, 1990.

[4] J. Pott. The self-minor conjecture for infinite trees. *Preprint*, 2009.

[5] N. Robertson, PD Seymour, and R. Thomas. Excluding infinite minors. *Discrete Math*, 95 :303–319, 1991.