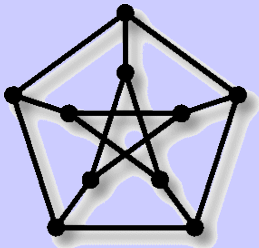


Théorie des graphes – Master IF

- Théorèmes et algorithmes de décomposition (modulaire, arborescente, en cliques, ...)
- Invariants de graphes et leurs complexités (colorabilité, connexité, cyclicité, ...)
- Classes de graphes et leurs caractérisations (planaires, parfaits, motifs interdits ou imposés,...)
- ➔ Premiers pas vers les grandes questions de graphes (conjectures de Berge, de Wagner, de Hadwiger, ...)
- ➔ Applications à l'optimisation combinatoire et à l'analyse d'autres modèles discrets.

Théorie des graphes – Master IF

- Cours de Recherche : Eric Thierry + participation de Christophe Crespelle (eric.thierry@ens-lyon.fr)
- Séances de cours, puis mémoires et exposés par les étudiants sur des articles ou des sujets de synthèse.
- Prérequis : connaissances de base en graphes et en algorithmique.
- Exemple de lecture recommandée : chapitres sur les graphes de « Introduction à l'algorithmique » de Cormen, Leiserson, Rivest, Stein.

Théorie des graphes – Master IF

- Des informations sur la page web du cours :

  perso.ens-lyon.fr/eric.thierry/Graphes2010

- Petite bibliographie :
  - « Introduction to Graph Theory » de D. West.
  - « Graph Theory » de R. Diestel.
  - « Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs » de M. Golumbic.

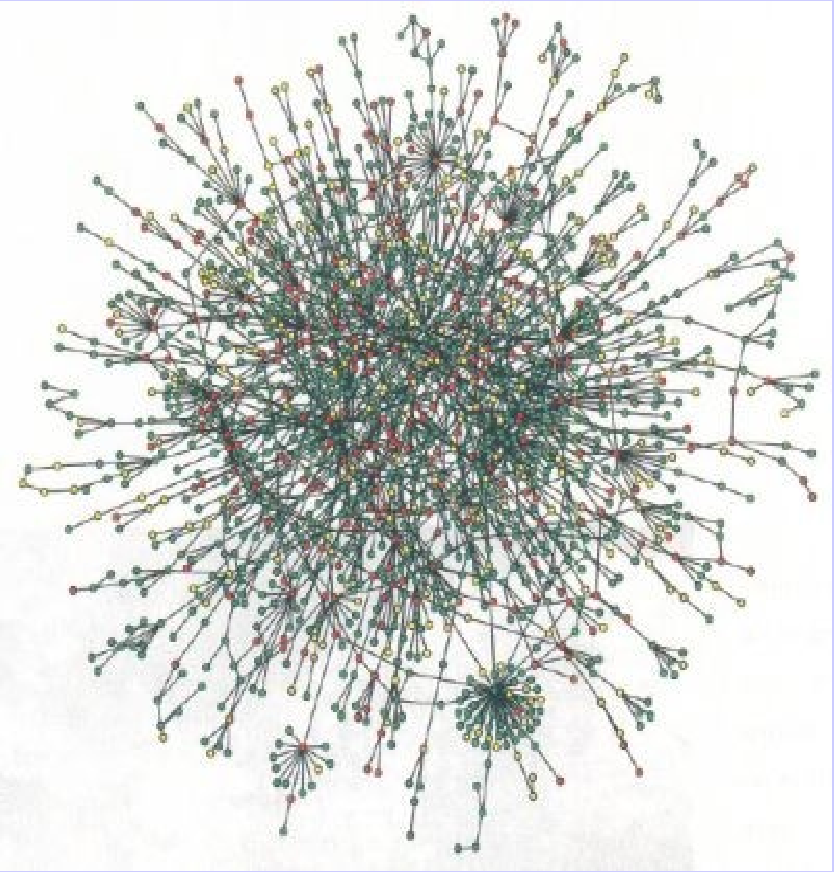
Graphes : mini historique

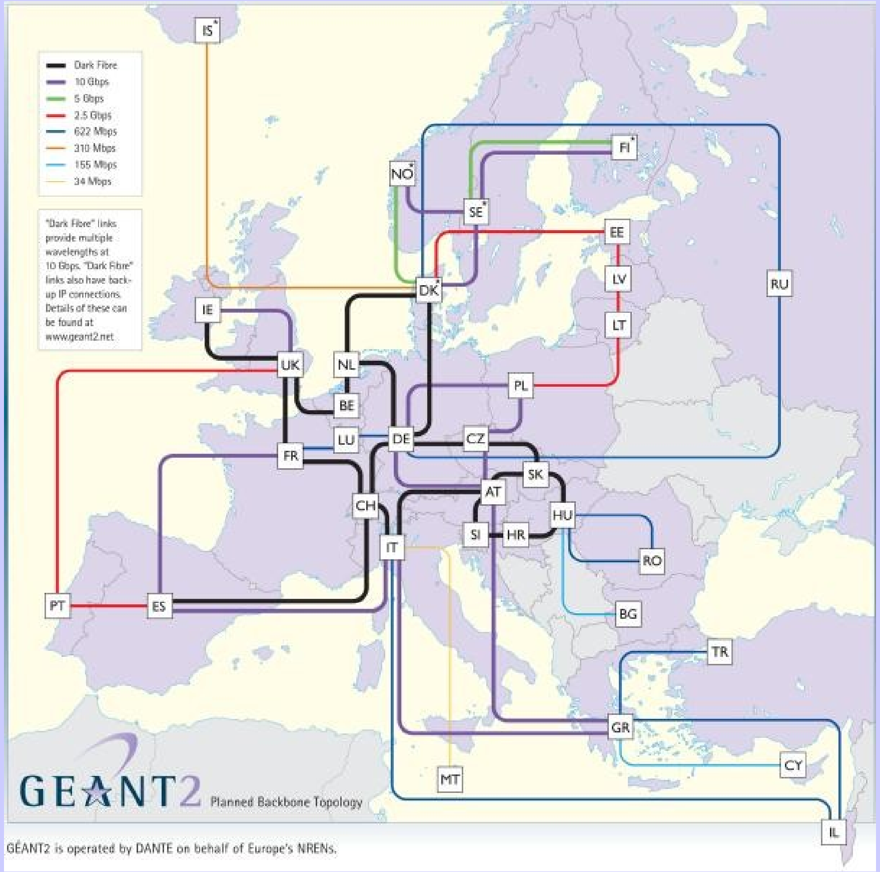
- 1736 : Résolution du problème des ponts de Königsberg par Euler.
- 1852 : Enoncé du problème des 4 couleurs par Guthrie.
- 1878 : Introduction du terme « graphe » par Sylvester en référence à de la chimie.
- 1936 : Premier livre sur les graphes « Theorie der endlichen und unendlichen Graphen » par König.

Théorie des graphes

- Une branche des mathématiques discrètes / de la combinatoire (beaucoup de preuves constructives $\rightarrow$ des algorithmes).
- Algorithmique des graphes (composantes connexes, plus courts chemins, arbres couvrants, voyageur de commerce, flots ...).
- Utile dans de nombreuses modélisations : informatique, télécom, physique, chimie, biologie, économie, sciences sociales ...

Modélisations par des graphes

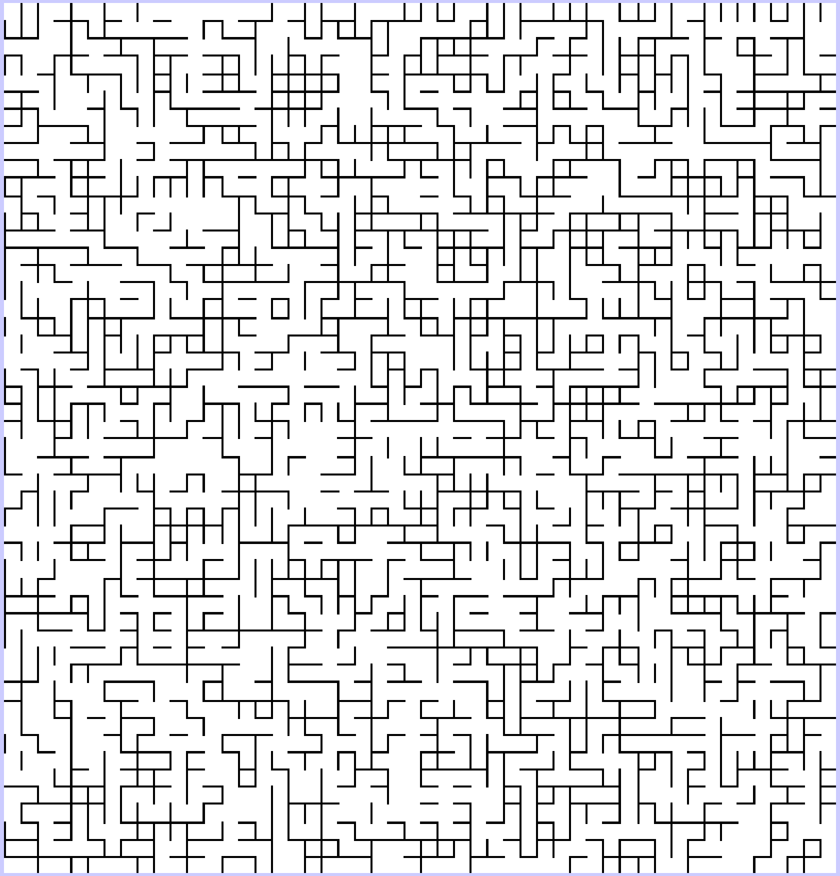




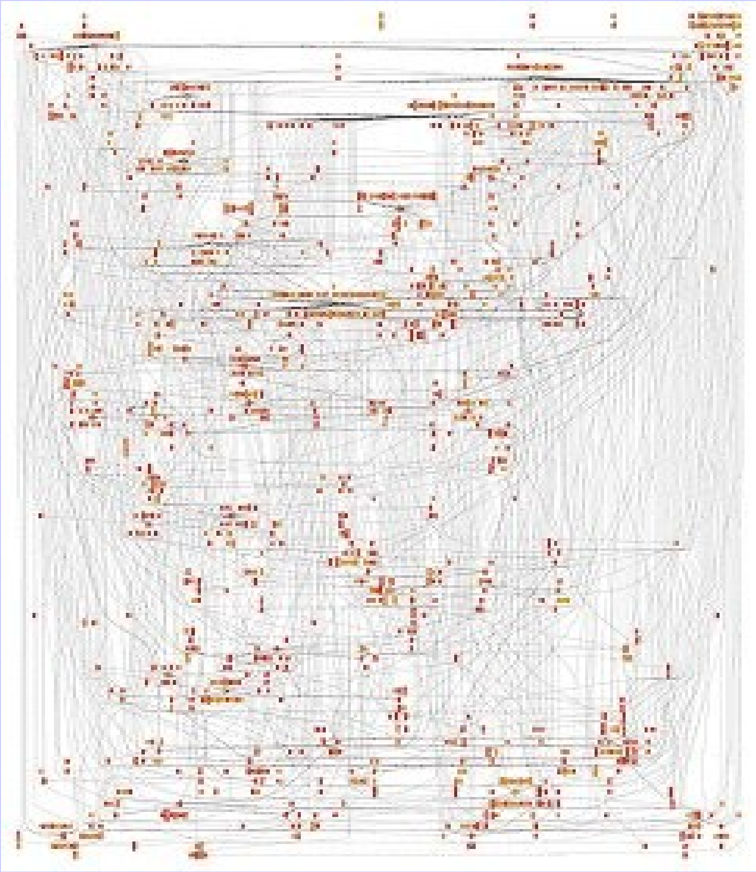
Un réseau d'interaction de protéines

Infrastructures du réseau GEANT2

Modélisations par des graphes

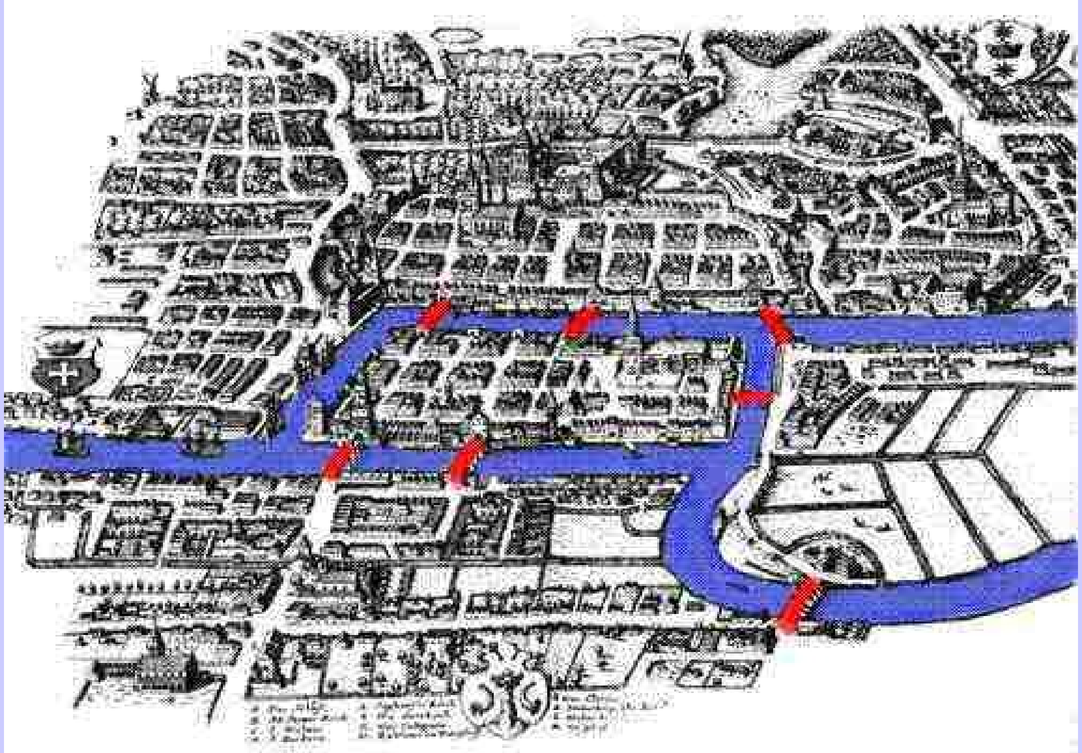


Graphe de percolation



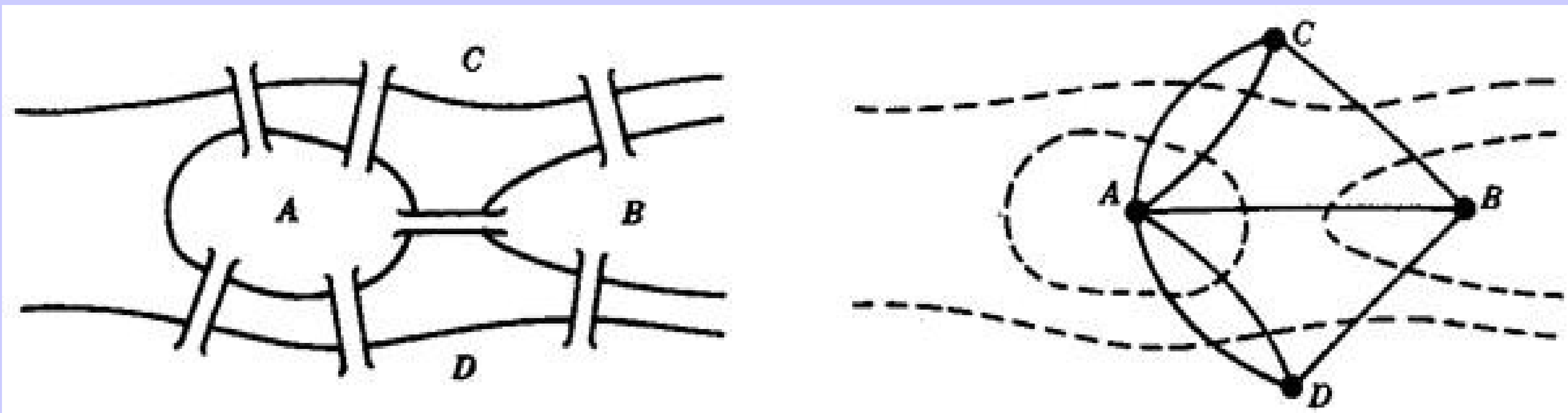
Communauté LambdaMOO

Les 7 ponts de Königsberg



Question de promeneur : peut-on trouver un itinéraire qui part d’un point et revient à ce point, en passant une fois et une seule par chacun des 7 ponts ?

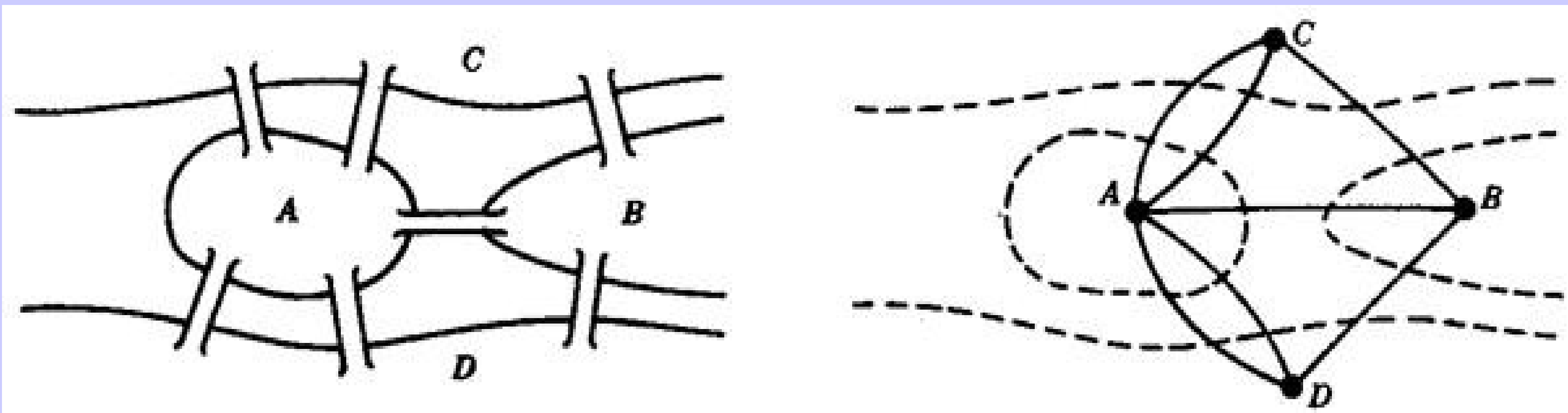
Les 7 ponts de Königsberg



(a) Königsberg in 1736 (b) Euler's graphical representation

Question : trouver un cycle qui passe une fois et une seule par chaque arête.

Les 7 ponts de Königsberg

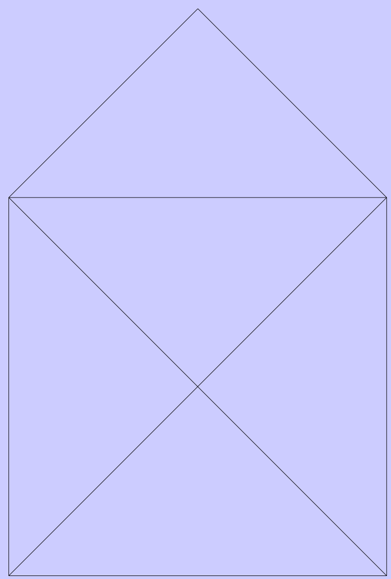


(a) Königsberg in 1736 (b) Euler's graphical representation

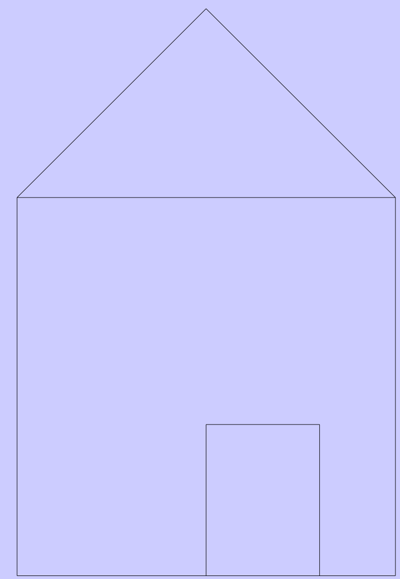
Question : trouver un cycle qui passe une fois et une seule par chaque arête.

Réponse : impossible ! (Euler, 1736)

Dessiner sans lever le crayon

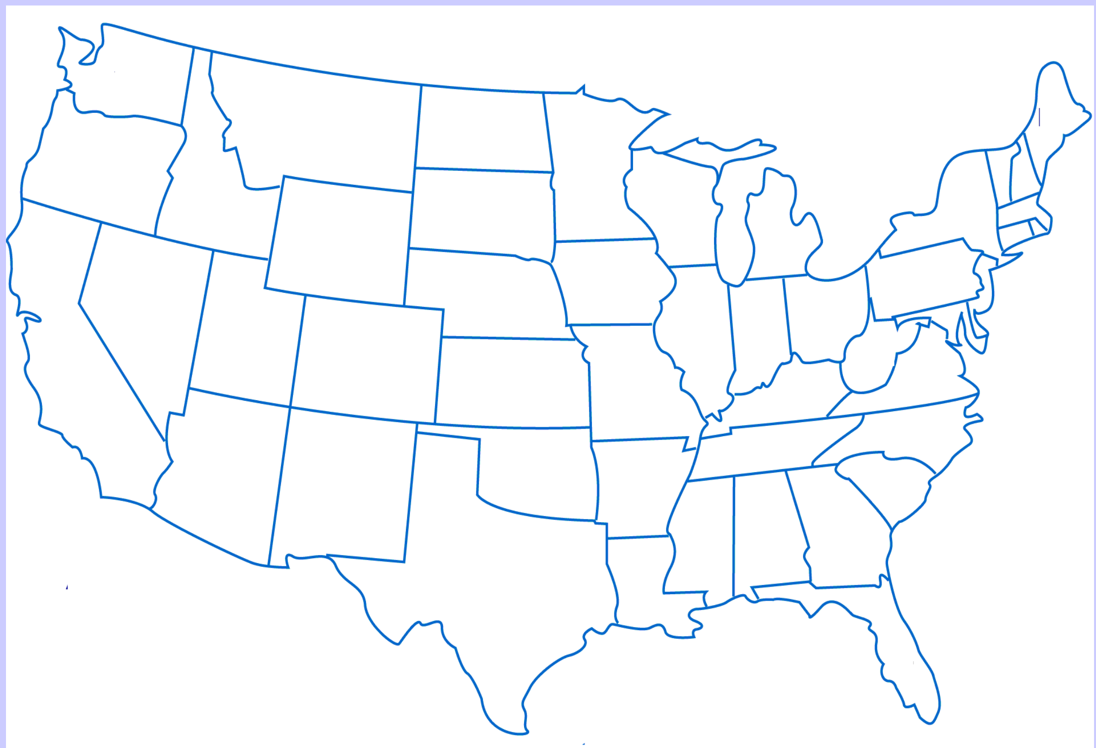


Possible ou pas ?



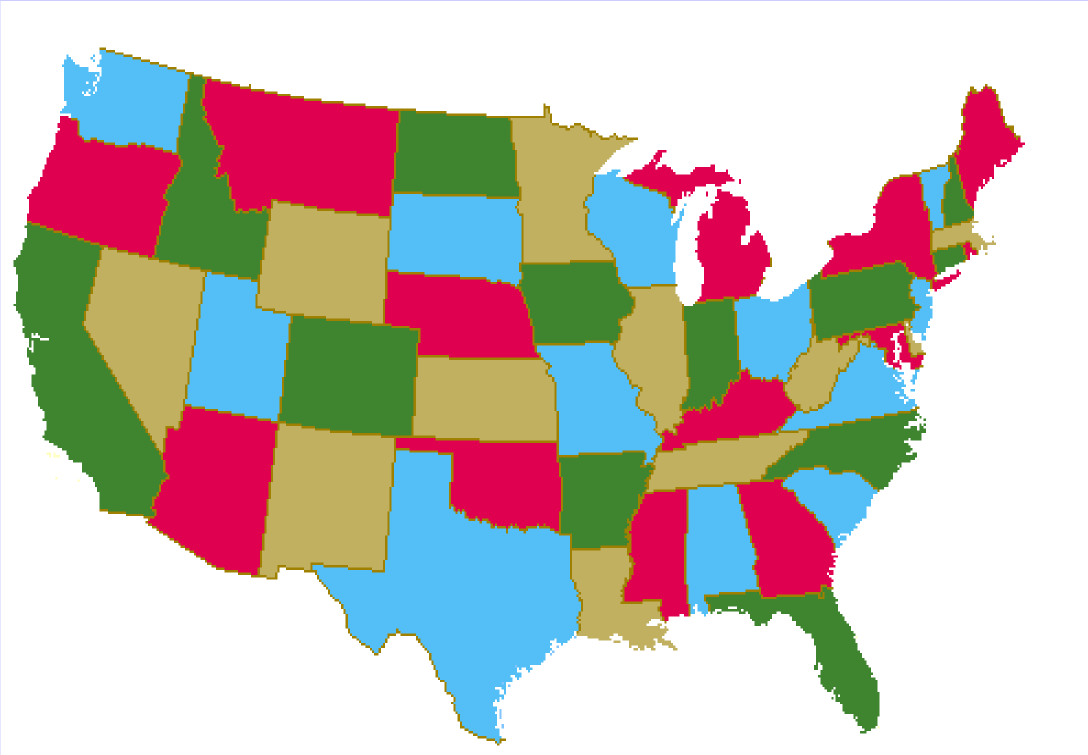
Possible ou pas ?

Problème des 4 couleurs



Question de cartographe : avec seulement 4 couleurs, peut-on toujours colorer chaque région tel que deux régions frontalières n'aient pas la même couleur ?

Problème des 4 couleurs



Ici oui !

Graphe sous-jacent : sommets = régions, avec arêtes entre les régions adjacentes. Dessinable sans que les arêtes se coupent → **graphe planaire**.

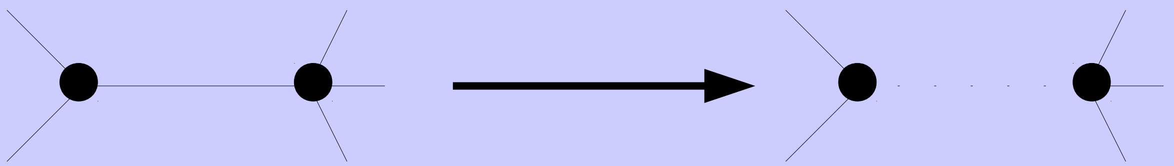
Théorème des 4 couleurs

- 1852 : problème énoncé par Guthrie.
- 1879 : preuve par Kempe → 1890 : cassée par Heawood.
- 1880 : preuve par Tait → 1891 : cassé par Petersen.
- 1976 : preuve par Appel, Haken + machine pour traiter 1478 cas.
- 1996 : preuve par Robertson, Sanders, Seymour, Thomas + machine pour traiter 633 cas.
- 2005 : formalisation d'une preuve par Werner et Gonthier, formulée avec l'assistant de preuve Coq.

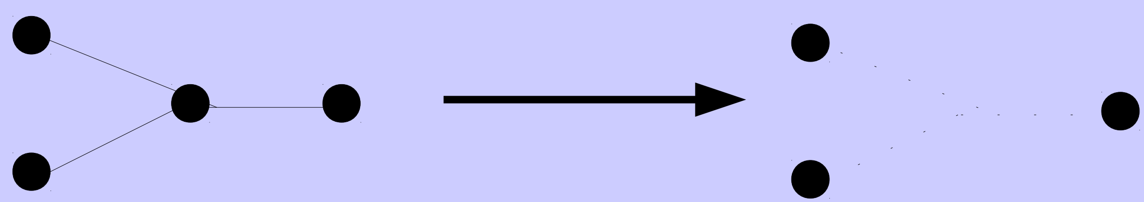
Théorème des mineurs

Mineur d'un graphe obtenu par :

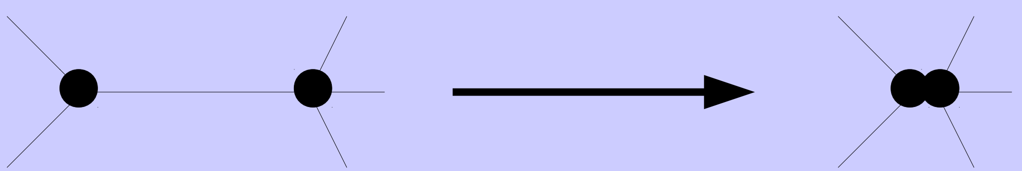
- Suppression d'arête



- Suppression de sommet



- Contraction d'arête

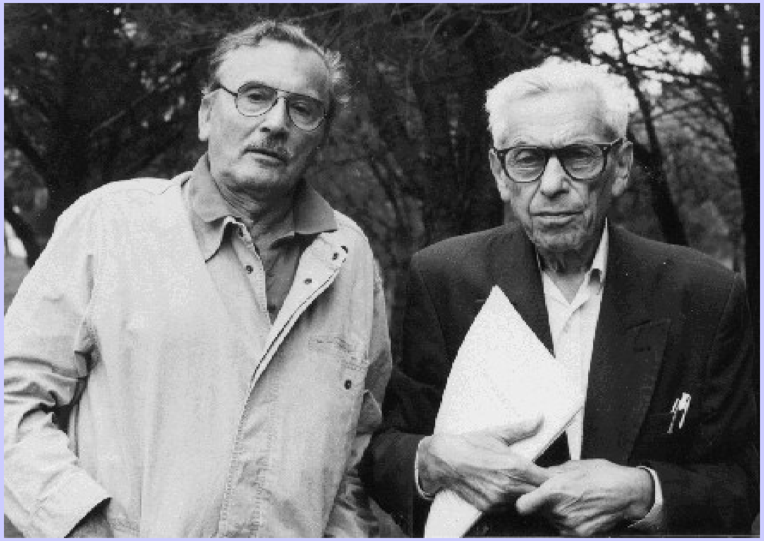


Théorème des mineurs

- 1960s : conjecture de Wagner « Toute classe de graphes, stable par mineurs, se caractérise par un nombre fini de mineurs interdits ».
- 2004 : preuve par Robertson et Seymour (plus de 600 pages dans une série de 20 articles : « Graph Minors I à XX » écrits entre 1983 et 2004)
- Exemple : les forêts.

Conjecture de Erdös-Gyarfas

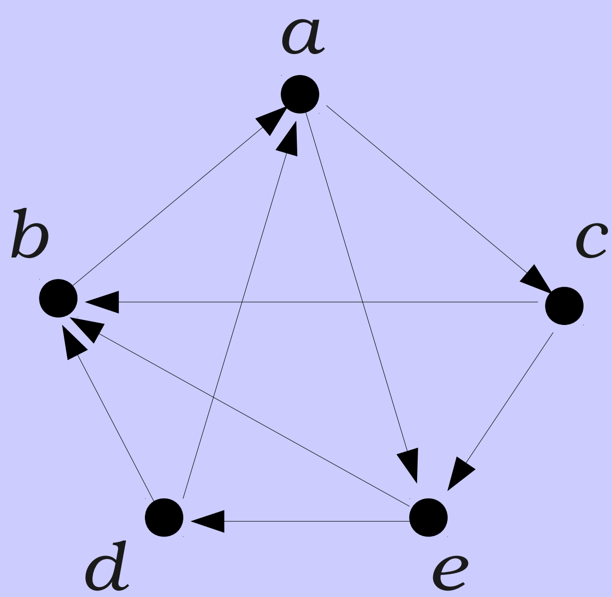
• Problèmes ouverts de Erdös : prix allant de 50$ à 5000$



Claude Berge & Paul Erdös

• **Conjecture** (100$ la démonstration, 50$ le contre-exemple) : « Tout graphe de degré minimum ≥ 3, admet un cycle dont la taille est une puissance de 2 ».

Conjecture du second voisinage



Paul Seymour

• **Conjecture :** « Dans tout graphe orienté, sans cycle de taille ≤ 2, il existe un sommet qui a au moins autant de sommets à distance 2 qu'à distance 1 ».