

Graphes et algèbres tropicales

Jehanne Dousse

1^{er} décembre 2010

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| 1 Structures algébriques | 2 |
| 1.1 Semi-anneaux et dioïdes | 2 |
| 1.2 Exemples d'algèbres tropicales | 3 |
| 1.2.1 L'algèbre \mathbb{R}_{min} | 3 |
| 1.2.2 L'algèbre \mathbb{R}_{max} | 3 |
| 1.2.3 Le dioïde des booléens | 4 |
| 1.3 Calculs dans les algèbres tropicales | 4 |
| 2 Une application des algèbres tropicales en théorie des graphes : le calcul des plus courts chemins dans un graphe orienté pondéré | 4 |
| 2.1 Définitions et formalisation du problème | 5 |
| 2.2 Relation entre plus courts chemins et puissances de matrices | 6 |
| 2.3 Algorithmes de calcul des plus courts chemins | 8 |
| 2.3.1 Algorithme de produit matriciel | 8 |
| 2.3.2 Un algorithme naïf | 8 |
| 2.3.3 Amélioration de l'algorithme | 9 |
| 2.4 Le dioïde des booléens | 9 |
| 3 Une application des graphes aux problèmes d'algèbres tropicales : le théorème de Perron-Frobenius | 10 |
| 3.1 Les propriétés spectrales des matrices dans l'algèbre $(\max, +)$ | 10 |
| 3.1.1 Matrices irréductibles | 10 |
| 3.1.2 Valeurs propres et vecteur propres | 11 |
| 3.2 Cyclicité et théorème de Perron-Frobenius | 13 |
| 3.3 Algorithme de calcul du rayon spectral | 16 |

Introduction

L'algèbre linéaire est une discipline fondamentale des mathématiques et l'étude des matrices et de leurs propriétés spectrales a permis de montrer de nombreux théorèmes. Mais si au lieu de nous placer dans le cadre de l'algèbre linéaire classique, nous nous plaçons dans des algèbres tropicales comme l'algèbre $(\min, +)$, de nombreux calculs matriciels restent valables, à la seule différence près que l'on remplace l'addition par la fonction \min et la multiplication par l'addition. De plus les problèmes d'algèbres tropicales sont fortement liés à certains problèmes de graphes. Ainsi nous verrons comment, dans l'algèbre $(\min, +)$, les puissances d'une matrice bien choisie permettent de résoudre le très classique problème des plus courts chemins dans un graphe orienté, et comment le théorème de Perron-Frobenius dans l'algèbre $(\max, +)$ est lié aux circuits d'un graphe.

1 Structures algébriques

Afin d'étudier les algèbres tropicales, commençons par définir certaines structures algébriques. Pour cette partie, nous nous référons essentiellement à [3].

1.1 Semi-anneaux et dioïdes

Définissons tout d'abord la notion de semi-anneau.

Définition 1.1. Un *semi-anneau* est un ensemble E muni d'une loi additive \oplus associative et commutative de neutre 0 et d'une loi multiplicative \otimes associative de neutre 1 qui vérifient :

- $\forall (a, b, c) \in E^3, (a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$ et $c \otimes (a \oplus b) = (c \otimes a) \oplus (c \otimes b)$
- $\forall a \in E, a \otimes 0 = 0 \otimes a = 0$ (0 est absorbant pour \otimes)

Définissons maintenant ce qu'est un dioïde.

Définition 1.2. Un *dioïde* est un semi-anneau (E, \oplus, \otimes) tel que la loi \oplus soit idempotente, c'est à dire : $\forall x \in E, x \oplus x = x$.

Les dioïdes ont la propriété d'être ordonnés.

Proposition 1.3. Soit (D, \oplus, \otimes) un dioïde. D est canoniquement muni d'une relation d'ordre définie par : $\forall x, y \in D, x \preceq y \Leftrightarrow x \oplus y = y$.

Démonstration. Montrons que \preceq est une relation d'ordre.

- \preceq est réflexive. En effet, par idempotence, on a : $\forall x \in D, x \oplus x = x$ donc $x \preceq x$.
- \preceq est transitive. En effet, soient $x, y, z \in D$ tels que $x \preceq y$ et $y \preceq z$. On a donc $x \oplus y = y$ et $y \oplus z = z$. D'où $x \oplus z = x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z = y \oplus z = z$, c'est à dire $x \preceq z$.
- \preceq est antisymétrique. En effet, soient $x, y \in D$ tels que $x \preceq y$ et $y \preceq x$. Alors $y = x \oplus y = y \oplus x = x$.

Ainsi \preceq est bien une relation d'ordre. □

Proposition 1.4. Si on suppose de plus que \oplus est sélective, c'est à dire que pour tous $x, y \in D, x \oplus y \in \{x, y\}$, alors la relation d'ordre \preceq est totale.

Démonstration. Soit (D, \oplus, \otimes) un dioïde tel que \oplus est sélective. Soient $x, y \in D$. On a soit $x \oplus y = y$, auquel cas $x \preceq y$, soit $x \oplus y = x$, auquel cas $y \preceq x$. Ainsi deux éléments de D sont toujours comparable. La relation \preceq est totale. \square

Remarque 1.5. Les dioïdes particuliers (algèbres tropicales) avec lesquels nous allons travailler ont une loi additive \oplus sélective.

Définissons donc les algèbres tropicales.

1.2 Exemples d'algèbres tropicales

1.2.1 L'algèbre \mathbb{R}_{min}

Commençons par définir l'algèbre $(\min, +)$.

Définition 1.6. On note $\mathbb{R}_{min} = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$, que l'on appelle conventionnellement *l'algèbre* $(\min, +)$.

Proposition 1.7. \mathbb{R}_{min} est un dioïde.

Démonstration. Montrons que \mathbb{R}_{min} est un dioïde.

- \min est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min(\min(x, y), z) = \min(x, \min(y, z)) = \min(x, y, z)$.
- \min est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min(x, y) = \min(y, x)$.
- \min a pour neutre $+\infty$: $\forall x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min(x, +\infty) = \min(+\infty, x) = x$.
- $+$ est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$.
- $+$ a pour neutre 0 : $\forall x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, x + 0 = 0 + x = x$.
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min(x, y) + z = \min(x + z, y + z)$ et $z + \min(x, y) = \min(z + x, z + y)$.
- $+\infty$ est absorbant pour $+$: $\forall x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$. \square

On a donc les correspondances suivantes avec les notations de la partie précédente :

- $\oplus \longrightarrow \min$
- $\otimes \longrightarrow +$
- $\mathbf{0} \longrightarrow +\infty$
- $\mathbf{1} \longrightarrow 0$

Cette algèbre nous sera utile pour calculer les plus courts chemins entre les sommets d'un graphe orienté.

1.2.2 L'algèbre \mathbb{R}_{max}

Étudions maintenant l'algèbre $(\max, +)$.

Définition 1.8. On note $\mathbb{R}_{max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$, que l'on appelle conventionnellement *l'algèbre* $(\max, +)$.

Proposition 1.9. \mathbb{R}_{max} est un dioïde avec les correspondances suivantes :

- $\oplus \longrightarrow \max$
- $\otimes \longrightarrow +$
- $\mathbf{0} \longrightarrow -\infty$

- $\mathbf{1} \longrightarrow 0$

Remarque 1.10. L'ordre canonique du dioïde \mathbb{R}_{max} est l'ordre classique sur les réels : en effet $x \leq y$ si et seulement si $\max(x, y) = y$.

1.2.3 Le dioïde des booléens

Enfin, définissons le dioïde des booléens.

Définition 1.11. On appelle *algèbre de Boole* ou *dioïde des booléens* le dioïde $(\{0, \mathbf{1}\}, \vee, \wedge)$.

Proposition 1.12. L'algèbre de Boole est un dioïde avec les correspondances suivantes :

- $\oplus \longrightarrow \vee$
- $\otimes \longrightarrow \wedge$
- $\mathbf{0} \longrightarrow 0$
- $\mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{1}$

1.3 Calculs dans les algèbres tropicales

Dans un semi-anneau, on peut définir des matrices, tout comme dans les espaces vectoriels.

Définition 1.13. Soit D un dioïde. On appelle *matrice à coefficients dans D de taille (m, n)* , c'est à dire à m lignes et n colonnes, une famille $(a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ d'éléments de D .

Notation 1.14. On note $M_{n,k}(D)$ l'ensemble des matrices de taille (n, k) à coefficients dans D et $M_n(D)$ l'ensemble des matrices de taille (n, n) à coefficients dans D .

Notation 1.15. Dans la suite on notera M_{ij} le coefficient d'indice (i, j) d'une matrice M .

De même que dans les espaces vectoriels, on définit des opérations matricielles.

Définition 1.16. Soit D un dioïde et soient $M, N \in M_n(D)$. La *somme* de M et N est définie par $(M \oplus N)_{ij} = M_{ij} \oplus N_{ij}$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$.

Définition 1.17. Soit D un dioïde et soient $M \in M_{m,n}(D)$ et $N \in M_{n,p}(D)$. Le *produit* de M et N est défini par $(M \otimes N)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n (M_{ik} \otimes N_{kj})$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$.

Exemple 1.18. Dans l'algèbre $(\min, +)$, la somme est définie par $(M \oplus N)_{ij} = \min(M_{ij}, N_{ij})$ et le produit par $(M \otimes N)_{ij} = \min_{1 \leq k \leq n} (M_{ik} + N_{kj})$.

2 Une application des algèbres tropicales en théorie des graphes : le calcul des plus courts chemins dans un graphe orienté pondéré

Le problème de recherche des plus courts chemins dans un graphe orienté pondéré est un problème classique en théorie des graphes. Plusieurs algorithmes existent pour

calculer les plus courts chemins d'un sommet à tous les autres, comme l'algorithme de Bellman-Ford ou celui de Dijkstra.

Dans cette partie, qui a pour principale référence [2], nous allons utiliser des puissances de matrices dans l'algèbre $(\min, +)$ pour calculer les plus courts chemins entre tous les couples de sommets d'un graphe orienté pondéré.

2.1 Définitions et formalisation du problème

Définissons d'abord la notion de graphe orienté.

Définition 2.1. Un *graphe orienté* G est un couple (V, E) avec $E \subseteq V^2$, où V^2 représente l'ensemble des couples de V . Les éléments de V sont les *sommets* de G et les éléments de E sont ses *arêtes*.

Notation 2.2. Si (u, v) est une arête, on note $u \rightarrow v$.

Remarque 2.3. Dans la suite on assimilera l'ensemble de sommets V à l'ensemble des entiers $\{1, \dots, n\}$, où n est le cardinal de V .

Nous nous intéressons dans cette partie au plus court chemin entre deux sommets d'un graphe orienté. Il faut pour cela associer des poids aux arêtes.

Définition 2.4. Un *graphe orienté pondéré* est un graphe orienté $G = (V, E)$ muni d'une fonction $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ appelée fonction de pondération. $w(u \rightarrow v)$ est le poids de l'arête (u, v) .

Définition 2.5. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté, et $u, v \in V$. On appelle *chemin* de longueur $k - 1$ de u à v une suite (x_1, \dots, x_k) de sommets de V telle que $x_1 = u$, $x_k = v$ et $\forall i \in \{1, \dots, k - 1\}, x_i \rightarrow x_{i+1}$ est une arête.

Définition 2.6. Le *poids* du chemin (x_1, \dots, x_k) est égal à la somme $\sum_{i=1}^{k-1} w(x_i \rightarrow x_{i+1})$ des poids de ses arêtes.

La figure 1 représente un graphe orienté pondéré.

Pour représenter un graphe orienté pondéré, nous allons utiliser la structure de matrices d'adjacence.

Définition 2.7. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté pondéré. La *matrice d'adjacence* de G est la matrice $M \in M_n(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ telle que

$$m_{ij} = \begin{cases} w(i \rightarrow j) & \text{si } i \rightarrow j \in E \\ 0 & \text{si } i = j \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 2.8. Le graphe de la figure 1 sera ainsi représenté par la matrice suivante :

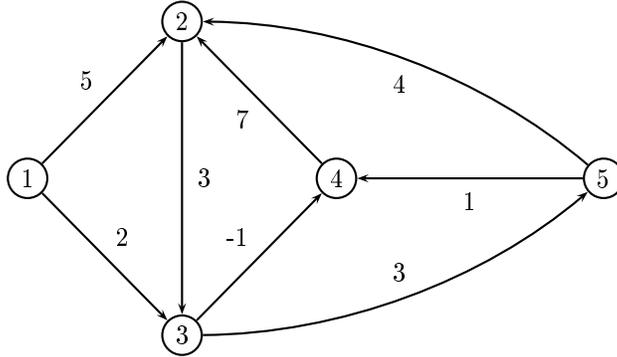


FIGURE 1 – Un graphe orienté pondéré à 5 sommets et 8 arêtes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & +\infty & +\infty \\ +\infty & 0 & 3 & +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & -1 & 3 \\ +\infty & 7 & +\infty & 0 & +\infty \\ +\infty & 4 & +\infty & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

FIGURE 2 – La matrice d’adjacence du graphe de la figure 1.

2.2 Relation entre plus courts chemins et puissances de matrices

Étant donné un graphe orienté pondéré, nous voulons calculer les plus courts chemins (chemins de poids minimum) entre tous les couples de sommets. Nous allons pour cela utiliser les matrices d’adjacence dans le cadre de l’algèbre $(\min, +)$.

Pour cela, commençons par énoncer un lemme.

Lemme 2.9. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté pondéré à n sommets de fonction de pondération $w : E \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $p = (x_1, \dots, x_k)$ un plus court chemin du sommet x_1 au sommet x_k , et pour tous i, j tels que $1 \leq i \leq j \leq k$, soit $p_{ij} = (x_i, \dots, x_j)$ le sous-chemin de p entre le sommet x_i et le sommet x_j . Alors p_{ij} est un plus court chemin de x_i à x_j .

Démonstration. Si on décompose le chemin p en $x_1 \xrightarrow{p_{1i}} x_i \xrightarrow{p_{ij}} x_j \xrightarrow{p_{jk}} x_k$, on obtient $w(p) = w(p_{1i}) + w(p_{ij}) + w(p_{jk})$. Supposons par l’absurde qu’il existe un chemin p'_{ij} entre x_i et x_j tel que $w(p'_{ij}) < w(p_{ij})$. Alors $x_1 \xrightarrow{p_{1i}} x_i \xrightarrow{p'_{ij}} x_j \xrightarrow{p_{jk}} x_k$ est un chemin de poids $w(p_{1i}) + w(p'_{ij}) + w(p_{jk}) < w(p)$, ce qui contredit le fait que p est un plus court chemin de x_1 à x_k . \square

NB : Nous supposons dans la suite que les graphes considérés ne possèdent pas de circuit (chemin dont le sommet de départ et celui d’arrivée sont confondus) de poids strictement négatif. En effet, s’il en existe, la notion de plus court chemin n’est pas bien définie, car il suffirait d’emprunter ce circuit une infinité de fois pour obtenir une distance de $-\infty$.

Considérons un graphe orienté pondéré $G = (V, E)$ de fonction de pondération w ,

représenté par sa matrice d'adjacence M . On rappelle que

$$M_{ij} = \begin{cases} w(i \rightarrow j) & \text{si } i \rightarrow j \in E \\ 0 & \text{si } i = j \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $d_{ij}^{(m)}$ le poids minimal d'un chemin de longueur au plus m du sommet i au sommet j . On a $d_{ij}^{(1)} = M_{ij}$ par définition de M .

Pour $m \geq 2$, on remarque que $d_{ij}^{(m)}$ est le minimum de $d_{ij}^{(m-1)}$ (poids d'un plus court chemin de i à j de longueur au plus $m-1$) et du poids d'un plus court chemin de longueur m du sommet i au sommet j . D'après le lemme 2.9, un plus court chemin de longueur m de i à j est composé d'un plus court chemin de longueur $m-1$ de i à un certain sommet k et de l'arête $k \rightarrow j$. Un tel chemin sera de poids $(d_{ik}^{(m-1)} + M_{kj})$. Pour trouver le poids d'un plus court chemin de i à j , il suffit donc de prendre le minimum sur tous les sommets k du graphe de la quantité $(d_{ik}^{(m-1)} + M_{kj})$. On obtient donc :

$$d_{ij}^{(m)} = \min(d_{ij}^{(m-1)}, \min_{1 \leq k \leq n} (d_{ik}^{(m-1)} + M_{kj})) = \min_{1 \leq k \leq n} (d_{ik}^{(m-1)} + M_{kj})$$

En effet $d_{ij}^{(m-1)} = d_{ij}^{(m-1)} + M_{jj}$.

Lemme 2.10. Pour tout couple de sommets (i, j) tel qu'il existe un chemin de i à j , il existe un plus court chemin de i à j de longueur inférieure ou égale à $n-1$.

Démonstration. Soient $i, j \in V$. Un chemin de i à j de longueur supérieure ou égale à n passerait plusieurs fois par le même sommet et contiendrait donc un circuit. Or G ne possède pas de circuit de poids strictement négatif donc le poids de ce chemin serait supérieur ou égal à celui du plus court chemin.

Ainsi, si on note δ_{ij} le poids d'un plus court chemin de i à j , on a :

$$\forall m \geq n, d_{ij}^{(m)} = d_{ij}^{(n-1)} = \delta_{ij}$$

□

Lemme 2.11. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, pour tous $i, j \in V$, $(M^m)_{ij} = d_{ij}^{(m)}$ dans l'algèbre $(\min, +)$.

Démonstration. Montrons par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$ que dans l'algèbre $(\min, +)$, on a $(M^m)_{ij} = d_{ij}^{(m)}$.

Pour $n=1$, on a $d_{ij}^{(1)} = M_{ij}$ par définition de M .

Supposons que $(M^{m-1})_{ij} = d_{ij}^{(m-1)}$ et montrons que $(M^m)_{ij} = d_{ij}^{(m)}$. On a

$$\begin{aligned} d_{ij}^{(m)} &= \min_{1 \leq k \leq n} (d_{ik}^{(m-1)} + M_{kj}) \\ &= \min_{1 \leq k \leq n} ((M^{m-1})_{ik} + M_{kj}) \\ &= (M^{m-1} \otimes M)_{ij} \\ &= (M^m)_{ij}. \end{aligned}$$

□

Théorème 2.12. M^{n-1} donne le poids des plus courts chemins entre tous les couples de sommets.

Démonstration. Soient $i, j \in V$. D'après le lemme 2.10, $d_{ij}^{(n-1)}$ est le poids d'un plus court chemin entre les sommets i et j . D'après le lemme 2.11, $(M^{n-1})_{ij} = d_{ij}^{(n-1)}$, et donc $(M^{n-1})_{ij}$ donne le poids d'un plus court chemin entre i et j . \square

Nous allons maintenant utiliser ce résultat dans des algorithmes qui calculent les plus courts chemins entre tous les couples de sommets d'un graphe.

2.3 Algorithmes de calcul des plus courts chemins

Nous voulons calculer les poids des plus courts chemins entre tous les couples de sommets d'un graphe orienté pondéré. Nous avons vu dans la partie précédente qu'il suffit pour cela de calculer M^{n-1} dans l'algèbre $(\min, +)$, où M est la matrice d'adjacence du graphe considéré.

2.3.1 Algorithme de produit matriciel

Pour calculer les puissances de la matrice M , commençons par énoncer un algorithme de produit matriciel.

Algorithme 1 Produit matriciel

ENTRÉE: deux matrices $M \in M_n(D)$ et $N \in M_n(D)$

SORTIE: $M \otimes N$

Soit $A \in M_n(D)$

pour $i = 1..n$ **faire**

pour $j = 1..n$ **faire**

$A_{ij} \leftarrow 0$

pour $k = 1..n$ **faire**

$A_{ij} \leftarrow A_{ij} \oplus (M_{ik} \otimes N_{kj})$

fin pour

fin pour

fin pour

Retourner A

L'algorithme 1 a une complexité en $O(n^3)$.

Remarque 2.13. Cet algorithme traite seulement le cas de deux matrices carrées de même taille car nous n'avons besoin que de ce cas-là pour calculer les puissances de M . Cependant il serait tout à fait possible de multiplier des matrices de taille (m, n) et (n, p) .

2.3.2 Un algorithme naïf

La méthode naïve consiste à calculer successivement toutes les puissances de M jusqu'à la $(n - 1)$ -ème. Elle donne lieu à l'algorithme 2.

Remarque 2.14. Dans l'algorithme 2, $A \otimes M$ représente le produit de A et M obtenu avec l'algorithme 1.

Algorithme 2 Calcul naïf des plus courts chemins

ENTRÉE: Un graphe G représenté par sa matrice d'adjacence $M \in M_n(\mathbb{R}_{min})$

SORTIE: M^{n-1} , qui représente les poids des plus courts chemins entre tous les couples de sommets de G

$A \leftarrow I_n$

pour $i = 1 \dots (n-1)$ **faire**

$A \leftarrow A \otimes M$

fin pour

Retourner A

Comme l'algorithme 1 a une complexité en $O(n^3)$, l'algorithme 2 a une complexité en $O(n^4)$.

Cependant, l'algorithme 2 calcule toutes les puissances de M alors que nous avons seulement besoin de M^{n-1} . Essayons donc de trouver un algorithme plus rapide.

2.3.3 Amélioration de l'algorithme

En utilisant le lemme 2.10 qui montre que $\forall m \geq n, M_{ij}^{(m)} = M_{ij}^{(n-1)}$, on peut s'inspirer de l'exponentiation rapide pour calculer M^{n-1} .

On a $M^{2^{\lceil \log_2(n-1) \rceil}} = M^{n-1}$ donc on peut calculer $M^{2^{\lceil \log_2(n-1) \rceil}}$, ce qui nous donnera aussi les poids des plus courts chemins entre tous les couples de sommets.

Algorithme 3 Calcul amélioré des plus courts chemins

ENTRÉE: Un graphe G représenté par sa matrice d'adjacence $M \in M_n(\mathbb{R}_{min})$

SORTIE: $M^{2^{\lceil \log_2(n-1) \rceil}}$, qui représente les poids des plus courts chemins entre tous les couples de sommets de G

$A \leftarrow M$

pour $i = 1 \dots \log_2(n-1)$ **faire**

$A \leftarrow A \otimes A$

fin pour

Retourner A

L'algorithme 3 a une complexité en $O(n^3 \log(n))$.

Grâce aux puissances de matrices dans l'algèbre $(\min, +)$, nous pouvons donc calculer les plus courts chemins entre chaque couple de sommets.

2.4 Le dioïde des booléens

Dans le dioïde des booléens, on peut utiliser les mêmes algorithmes pour savoir s'il existe un chemin entre tous couples de sommets.

En effet, il suffit de prendre pour matrice de départ M avec $M_{ij} = 1$ s'il existe une arête de i à j ou si $i = j$, et $M_{ij} = 0$ sinon. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(M^k)_{ij} = 1$ ssi il existe un chemin de i à j de longueur inférieure ou égale à k .

Il existe un chemin de i à j si et seulement s'il existe un chemin de longueur inférieure ou égale à $n-1$ de i à j donc M^{n-1} indique s'il existe un chemin entre chaque couple de sommets.

3 Une application des graphes aux problèmes d'algèbres tropicales : le théorème de Perron-Frobenius

Nous avons utilisé des algèbres tropicales pour résoudre un problème de graphes. Nous allons maintenant voir que les graphes sont aussi utiles pour résoudre des problèmes d'algèbre. Pour cela, nous étudierons les propriétés spectrales (valeurs propres et vecteurs propres) des matrices dans l'algèbre $(\max, +)$, puis nous étudierons le théorème de Perron-Frobenius, présentés dans [3]

3.1 Les propriétés spectrales des matrices dans l'algèbre $(\max, +)$

Nous allons étudier la théorie spectrale des matrices $(\max, +)$ en comparaison avec l'algèbre linéaire classique.

Définissons d'abord la notion de matrice irréductible.

3.1.1 Matrices irréductibles

Nous allons nous placer dans le cadre des semi-anneaux positifs, vérifiant les propriétés suivantes :

Définition 3.1. On appelle semi-anneau *positif* un semi-anneau (S, \oplus, \otimes) de zéro 0 vérifiant les deux conditions suivantes :

- $a \oplus b = 0 \Rightarrow a = 0$ et $b = 0$
- $a \otimes b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$

Dans toute cette partie, nous nous placerons dans un semi-anneau positif S .

Nous allons à nouveau associer un graphe à une matrice, mais différemment de la partie précédente.

Définition 3.2. Soit $A \in M_n(S)$. On appelle *graphe associé* à A le graphe orienté pondéré $G(A) = (V, E)$ tel que $V = \{1, \dots, n\}$ et $j \rightarrow i \in E$ si et seulement si $A_{ij} \neq 0$. Dans ce cas le poids de l'arête $j \rightarrow i$ sera A_{ij} .

Remarque 3.3. Dans la partie précédente, on associait l'arête $i \rightarrow j$ et non $j \rightarrow i$ au coefficient M_{ij} de la matrice.

Nous avons aussi besoin de la notion de connexité forte pour définir les matrices irréductibles.

Définition 3.4. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté. On définit la relation de *connexité forte* par : pour $i, j \in V$, iRj si et seulement s'il existe un chemin de i à j et un chemin de j à i . Par convention, il existe toujours un chemin de longueur nulle de i à i . Les classe d'équivalence sont appelées les *composantes fortement connexes*.

Définition 3.5. Un graphe $G = (V, E)$ est *fortement connexe* si pour tous $i, j \in V$, il existe un chemin de i à j et un chemin de j à i .

Nous pouvons alors définir les matrices irréductibles :

Définition 3.6. La matrice $A \in M_n(S)$ est dite *irréductible* si le graphe $G(A)$ associé à A est fortement connexe.

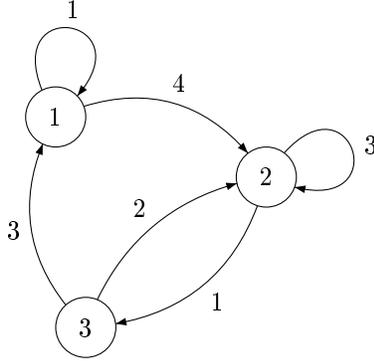


FIGURE 3 – Le graphe associé à la matrice A est fortement connexe.

Exemple 3.7. Dans \mathbb{R}_{max} , soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. A est une matrice irréductible car le graphe associé (cf. figure 3) est fortement connexe.

Par contre, toujours dans \mathbb{R}_{max} , la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas irréductible car le graphe associé (cf. figure 4) n'est pas fortement connexe. En effet il n'existe pas de chemin du sommet 2 au sommet 1 ni du sommet 3 au sommet 1.

Maintenant que nous avons défini les matrices irréductibles, étudions leurs valeurs propres et vecteurs propres.

3.1.2 Valeurs propres et vecteur propres

Dans l'algèbre $(\max, +)$, les valeurs propres et vecteurs propres sont définis comme dans l'algèbre linéaire classique.

Définition 3.8. Soit $A \in M_n(\mathbb{R}_{max})$, $u \in \mathbb{R}_{max}^n \setminus \{0\}$, et $\lambda \in \mathbb{R}_{max}$ tels que $Au = \lambda u$. Alors u est un *vecteur propre* de la matrice A associé à la *valeur propre* λ .

De même la trace d'une matrice est définie comme suit :

Définition 3.9. Soit $A \in M_n(\mathbb{R}_{max})$. La *trace* de A , notée trA , est définie par :

$$trA = \bigoplus_{i=1}^n (A_{ii})$$

Nous allons admettre un premier théorème utile à la démonstration du théorème de Perron-Frobenius.

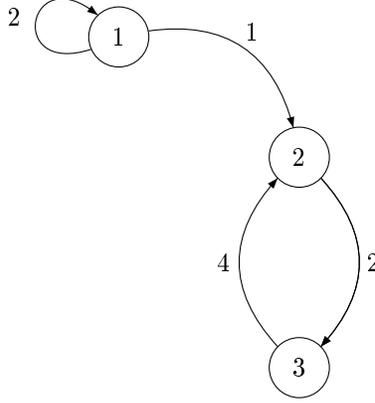


FIGURE 4 – Le graphe associé à la matrice B n'est pas fortement connexe.

Théorème 3.10. Une matrice irréductible $A \in M_n(\mathbb{R}_{max})$ admet une unique valeur propre $\rho(A)$ définie par :

$$\rho(A) = \bigoplus_{k=1}^n (tr A^k)^{1/k}$$

Notation 3.11. Dans l'algèbre $(\max, +)$, on note x^k pour $x \otimes \dots \otimes x = x + \dots + x = kx$, et $x^{1/k}$ pour x/k .

Remarque 3.12. Dans l'algèbre linéaire classique, pour une matrice A dont les valeurs propres sont positives, le rayon spectral (module de la plus grande valeur propre) est égal à $\lim_{k \rightarrow +\infty} (tr A^k)^{1/k}$.

$\rho(A)$ est donc l'analogie du rayon spectral pour l'algèbre $(\max, +)$.

En calculant l'expression de $tr A$, on obtient :

$$\rho(A) = \bigoplus_{k=1}^n \left[\bigoplus_{i_1, \dots, i_k=1}^n (A_{i_1 i_2} \otimes \dots \otimes A_{i_k i_1}) \right]^{1/k}$$

Définition 3.13. Soit $A \in M_n(\mathbb{R}_{max})$ et $c = (i_1, \dots, i_k, i_1)$ un circuit de longueur $|c| = k$ du graphe associé à A . On définit le *poide* de c par $w(c) = (A_{i_1 i_2} \otimes \dots \otimes A_{i_k i_1})$.

On a donc

$$\rho(A) = \bigoplus_{c \text{ circuit de } G(A)} w(c)^{1/|c|}$$

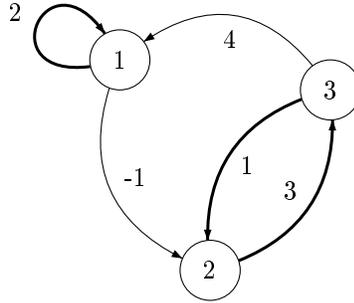


FIGURE 5 – Le graphe associé à la matrice A est fortement connexe.

Définition 3.14. Les *circuits critiques* sont les circuits qui réalisent le max dans l'égalité précédente, c'est à dire les circuits c tels que $\rho(A) = \max_{c' \text{ circuit de } G(A)} \frac{w(c')}{|c'|} = \frac{w(c)}{|c|}$.

Définition 3.15. Le *graphe critique* associé à A , noté $GC(A)$, est le sous-graphe de $G(A)$ formé uniquement des sommets et arêtes appartenant à un circuit critique.

Exemple 3.16. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Sur la figure 5, qui représente le graphe associé à A , le graphe critique est en traits gras.

Nous allons maintenant utiliser ces notions pour démontrer le théorème de Perron-Frobenius.

3.2 Cyclicité et théorème de Perron-Frobenius

Avant de passer au théorème, nous avons besoin d'une dernière définition, celle de la cyclicité.

Définition 3.17. Soit $A \in M_n(\mathbb{R}_{max})$. On définit la *cyclicité* de la matrice A comme suit :

- La cyclicité d'une composante connexe de $GC(A)$ est égale au pgcd des longueurs des circuits de cette composante connexe.
- La cyclicité de la matrice A est égale au ppcm des cyclicités des composantes connexes de $GC(A)$.

On notera $c(A)$ la cyclicité de A .

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de Perron-Frobenius dans l'algèbre $(\max, +)$.

Théorème 3.18. (Théorème de Perron-Frobenius) Soit $A \in M_n(\mathbb{R}_{max})$ irréductible. Alors il existe un entier N tel que pour tout $k \geq N$, $A^{k+c(A)} = (\rho(A))^{c(A)} A^k$.

Pour démontrer ce théorème, nous allons avoir besoin de deux lemmes.

Lemme 3.19. Soit $A \in M_n(\mathbb{R}_{max})$ irréductible. Tout circuit du graphe critique de A est un circuit critique.

Démonstration. Soit $A \in M_n(\mathbb{R}_{max})$ irréductible, et $GC(A)$ son graphe critique. Soit $c = (i_1, \dots, i_k, i_1)$ un circuit de $GC(A)$. Les arêtes $i_1 \rightarrow i_2, \dots, i_k \rightarrow i_1$ sont dans $GC(A)$ donc chacune d'elles rentre en jeu dans un circuit critique. Ainsi il existe des chemins p_1, \dots, p_k tels que $p_1 \cup (i_1 \rightarrow i_2), \dots, p_k \cup (i_k \rightarrow i_1)$ soient des circuits critiques. Le circuit composé $p_k \dots p_1 c$ est donc aussi un circuit critique.

Supposons par l'absurde que c ne soit pas un circuit critique. On aurait donc $\frac{w(c)}{|c|} < \rho(A)$. Cependant $p_k \dots p_1 c$ est critique donc $\frac{w(p_k \dots p_1 c)}{|p_k \dots p_1 c|} = \rho(A)$, c'est à dire

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \frac{w(p_k \dots p_1) + w(c)}{|p_k \dots p_1| + |c|} \\ &= \frac{w(p_k \dots p_1)}{|p_k \dots p_1| + |c|} + \frac{w(c)}{|p_k \dots p_1| + |c|} \\ &= \frac{w(p_k \dots p_1)}{|p_k \dots p_1|} \times \frac{|p_k \dots p_1|}{|p_k \dots p_1| + |c|} + \frac{w(c)}{|c|} \times \frac{|c|}{|p_k \dots p_1| + |c|} \end{aligned}$$

Or $\frac{w(c)}{|c|} < \rho(A)$ donc si $\frac{w(p_k \dots p_1)}{|p_k \dots p_1|} \leq \rho(A)$, alors

$$\begin{aligned} \frac{w(p_k \dots p_1)}{|p_k \dots p_1|} \times \frac{|p_k \dots p_1|}{|p_k \dots p_1| + |c|} + \frac{w(c)}{|c|} \times \frac{|c|}{|p_k \dots p_1| + |c|} &< \rho(A) \times \frac{|p_k \dots p_1|}{|p_k \dots p_1| + |c|} + \rho(A) \times \frac{|c|}{|p_k \dots p_1| + |c|} \\ &< \rho(A) \end{aligned}$$

Ce qui est impossible car cette quantité est égale à $\rho(A)$. Donc on a $\frac{w(p_k \dots p_1)}{|p_k \dots p_1|} > \rho(A)$, ce qui est absurde par définition de $\rho(A)$. Ainsi c est bien un circuit critique de $GC(A)$. \square

Nous traitons d'abord le cas des matrices de cyclicité 1. Quitte à normaliser A , supposons que $\rho(A) = \mathbb{1}$.

Lemme 3.20. Soit $A \in M_n(\mathbb{R}_{max})$ irréductible telle que $\rho(A) = \mathbb{1}$ et $c(A) = 1$. Alors à partir d'un certain rang, $A^{k+1} = A^k$.

Démonstration. On définit $A^+ = \bigoplus_{k=1}^{+\infty} A^k$.

Dans la suite, on notera $A_{.,j}$ la j -ème colonne de A .

1. Soit i appartenant à $GC(A)$. Alors à partir d'un certain rang, $(A^k)_{ii} = (A^+)_{ii} = \mathbb{1}$.

En effet soient c_1, \dots, c_k des circuits de la même composante de $GC(A)$ que i tels que $\text{pgcd}(|c_1|, \dots, |c_k|) = 1$. Soit α un circuit passant par i qui rencontre chacun des circuits c_1, \dots, c_k . Donc pour tous $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, le circuit d'image commutative $\alpha c_1^{n_1} \dots c_k^{n_k}$ passe par i .

On a $\text{pgcd}(|c_1|, \dots, |c_k|) = 1$ donc $\text{pgcd}(|\alpha|, |c_1|, \dots, |c_k|) = 1$. D'après le théorème de Bezout, on peut trouver des entiers $z_0, z_1, \dots, z_k \in \mathbb{Z}$ tels que

$$z_0|\alpha| + z_1|c_1| + \dots + z_k|c_k| = 1$$

On ajoute $n = (1 - z_0)|\alpha| + \max(-z_1|c_1|, 0) + \dots + \max(-z_n|c_1|, 0)$ aux deux membres et on obtient

$$n + 1 = |\alpha| + n_1|c_1| + \dots + n_k|c_k| \text{ avec } n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}.$$

Ainsi on a un circuit de longueur $n + 1$ passant par i . D'après le lemme 3.19, ce circuit est critique, donc $(A^{n+1})_{ii} = \mathbb{1}$. D'où pour tout $k \geq n + 1$, $(A^k)_{ii} = (A^+)_{ii} = \mathbb{1}$.

2. Soit j appartenant à $GC(A)$ et i quelconque. Montrons qu'à partir d'un certain rang, $(A^k)_{ij} = (A^+)_{ij}$. Soit k_0 tel que $(A^{k_0})_{ij} = (A^+)_{ij}$. On a :

$$(A^{k_0+k})_{ij} \succeq (A^{k_0})_{ij}(A^k)_{jj}$$

Or d'après le point 1, pour k assez grand, $(A^k)_{jj} = (A^+)_{jj} = \mathbb{1}$. Donc pour k assez grand,

$$(A^{k_0+k})_{ij} \succeq (A^{k_0})_{ij} = (A^+)_{ij}.$$

D'autre part $(A^+)_{ij} \succeq (A^{k_0+k})_{ij}$ pour tout k par définition de A^+ .

Ainsi pour k assez grand, $(A^+)_{ij} = (A^{k_0+k})_{ij}$, ce qui démontre le point 2.

3. Soit j n'appartenant pas au graphe critique. Montrons qu'à partir d'un certain rang,

$$(A^k)_{.,j} = \bigoplus_{i \in GC(A)} (A^k)_{.,i}(A^+)_{ij}.$$

Pour tout $i \in GC(A)$, soit q_i tel que $(A^{q_i})_{ij} = (A^+)_{ij}$. Pour k assez grand, on a :

$$(A^k)_{.,j} \succeq \bigoplus_{i \in GC(A)} (A^{k-q_i})_{.,i}(A^{q_i})_{ij}.$$

D'après le point 2, pour k assez grand, on a pour tout i , $(A^{k-q_i})_{.,i} = (A^+)_{.,i}$. Donc pour k assez grand, on obtient :

$$(A^k)_{.,j} \succeq \bigoplus_{i \in GC(A)} (A^+)_{.,i}(A^+)_{ij}.$$

Pour montrer l'autre sens de l'inégalité, montrons que les chemins qui réalisent le max dans $(A^k)_{i,j}$ passent toujours par le graphe critique. Soit p un tel chemin. Si on note η le poids moyen (c'est à dire $w(c)^{1/|c|}$) maximum des circuits non critiques, p se factorise en un chemin qui n'est pas un cycle (de longueur inférieure ou égale à $n - 1$) et des circuits de poids inférieur ou égal à η . On en déduit que $w(p) \preceq \eta^{k-(n-1)}(A^+)_{ij}$.

Pour k assez grand, on obtient $w(p) \preceq \bigoplus_{l \in GC(A)} (A^+)_{il}(A^+)_{lj}$. D'où pour k assez grand,

$$(A^k)_{i,j} \preceq \bigoplus_{l \in GC(A)} (A^+)_{il}(A^+)_{lj}.$$

On a les deux sens de l'inégalité donc à partir d'un certain rang,

$$(A^k)_{.,j} = \bigoplus_{i \in GC(A)} (A^k)_{.,i}(A^+)_{ij}.$$

Ceci achève la démonstration du lemme. □

Pour finir la preuve du théorème, intéressons-nous à présent au cas d'une matrice de cyclicité quelconque.

Démonstration. Soit $A \in M_n(\mathbb{R}_{max})$ irréductible. On pose $B = A^{c(A)}$. On admet que B est diagonale par blocs, les blocs étant irréductibles de cyclicité 1. D'après le cas des matrices de cyclicité 1, on en déduit qu'il existe N tel que

$$\forall k \geq N, A^{kc(A)+c(A)} = B^{k+1} = \rho(B)B^k = (\rho(A))^{c(A)} A^{kc(A)}$$

d'où

$$\forall k \geq c(A)N, A^{k+c(A)} = (\rho(A))^{c(A)} A^k.$$

Ainsi le théorème est vrai pour les matrices de cyclicité quelconque. □

Pour finir, nous allons étudier brièvement un algorithme en liaison avec le théorème de Perron-Frobenius.

3.3 Algorithme de calcul du rayon spectral

Le théorème de Perron-Frobenius fait intervenir le rayon spectral $\rho(A)$ d'une matrice

A. On rappelle que $\rho(A) = \bigoplus_{k=1}^n (tr A^k)^{1/k}$.

On peut utiliser cette formule dans un algorithme naïf pour calculer le rayon spectral :

Algorithme 4 Rayon spectral

ENTRÉE: $A \in M_n(\mathbb{R}_{max})$

SORTIE: $\rho(A)$

$\rho \leftarrow 0$

$M \leftarrow I_n$

pour $k = 1 \dots n$ **faire**

$M \leftarrow M \otimes A$

Calculer $t = (tr M)^{1/k}$.

si $t > \rho$ **alors**

$\rho \leftarrow t$

fin si

fin pour

Retourner A

Le calcul de la trace se fait en temps $O(n)$ et le produit matriciel, qui est celui de l'algorithme 1, s'effectue en temps $O(n^3)$. On effectue n passages dans la boucle donc n produits matriciels. L'algorithme 4 s'exécute donc en $O(n^4)$.

Cependant une méthode due à Karp [4] permet de calculer le rayon spectral en temps $O(n^3)$.

Le théorème de Perron-Frobenius possède des applications entre autres dans les systèmes à événements discrets, pour calculer le taux de production à partir d'un graphe d'événements.

Conclusion

Ainsi nous avons vu les liens forts qui unissent les problèmes d'algèbres tropicales et les problèmes de graphes et donné quelques algorithmes pour les résoudre. Mais les algèbres tropicales ont encore bien d'autres applications, notamment dans le domaine des réseaux de Petri [1], en évaluation de performances ou en automatique.

Références

- [1] G. Cohen, S. Gaubert, and J.P. Quadrat. L'algèbre des sandwichs. *Pour la Science*, pages 56–63, Février 2005.
- [2] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms, Second Edition*. The MIT Press and McGraw-Hill Book Company, 2001.
- [3] Stéphane Gaubert. *Introduction aux systèmes dynamiques à événements discrets*. Option Automatique et M2 ATSI, Université d'Orsay, 1999.
- [4] Richard M. Karp. A characterization of the minimum mean-cycle in a digraph. *Discrete Mathematics*, 23 :309–311, 1978.