Chip Firing Games

Laetitia Lemoine

1er décembre 2010

Résumé

On s'intéresse au jeu suivant, appelé "Chip firing game" : on a un graphe (orienté ou non), et un certain nombre de jetons posés sur les sommets de ce graphe. Si sur un sommet, il y a plus de jetons que le degré (sortant dans le cas orienté), alors on peut faire tirer ce sommet, c'est à dire lui faire envoyer un jeton sur chacun de ses voisins. Le jeu est terminé quand on ne peut plus faire de mouvements.

Nous pouvons nous poser quelques questions :

- Étant donnée une configuration initiale, on peut parfois jouer plusieurs coups différents. Existe-t-il des cas où certains de ces coups amènent à la fin du jeu alors que d'autres permettent de continuer indéfiniment ? Et si tous amènent à la fin, y amènent-ils en un même nombre de coups ou non ?
- Peut-on prévoir le comportement d'un jeu en fonction du nombre de jetons ?
- Combien de temps un jeu qui termine met-il à terminer ?

Nous essaieront, dans ce rapport, de répondre à ces questions.

Table des matières

1 Préliminaires : règles du jeu et notations

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté.
On autorise la présence de boucles et d'arêtes multiples.
On identifiera un graphe non-orienté au graphe orienté ayant, pour chaque arête (i, j) du graphe non orienté, les deux arêtes (i, j) et (j, i).
On note $n = |V|$ et $m = |E|$.
On identifie V à $\{1, \dots, n\}$.
Pour un sommet $k \in V$, on note $d^+(k)$ (respectivement $d^-(k)$) le degré sortant (respectivement entrant) du sommet k.
On note $D = max_{k \in V} d^+(k)$.
On note $d_{i,j}$ le nombre d'arêtes entre i et j.
On dit qu'un graphe est eulérien si pour tout sommet k, on a $d^+(k) = d^-(k)$.
On dit qu'un graphe G est fortement connexe si pour tous $i, j \in V$, il existe un chemin de i à j.
Une composante fortement connexe n'ayant aucune arête sortante est appelée composante puits.

On définit une distribution de jetons comme étant un vecteur $a \in \mathbb{Z}_+^n$, c'est à dire qu'il y a a_i jetons sur le sommet i. On note $N = |a|$.
Un mouvement du jeu correspont à faire tirer un sommet i : si le nombre de jetons a_i est supérieur ou égal à $d^+(i)$, on enlève $d^+(i)$ jetons du sommet i et on ajoute un jeton sur chacun des voisins de i. On ne considère que les tirs par les sommets ayant au moins une arête sortante (sinon, on pourrait faire tirer les sommets sans arête sortante indéfiniment).
Un jeu légal est une séquence de distributions de jetons, commençant par une distribution initiale donnée, et où chaque position est obtenue à partir de la précédente en faisant tirer un sommet.

On rappelle qu'étant donné un ensemble fini V, un mot sur cet ensemble est une suite finie d'éléments (lettres) de cet ensemble. Un langage sur V est un ensemble de mots sur V. Un sous-mot d'un mot m est un mot obtenu en supprimant des lettres de m.
On note $|m|$ la longueur du mot m. Si $V = \{1, \dots, n\}$ on note $[m]$ le vecteur de $\mathbb{Z}_+^n$ défini par $[m]_i = k$ si i apparaît k fois dans m.
Pour $v \in \mathbb{R}^n$, on note $|v| = \sum_{i=1}^n |v_k|$.
Pour deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$, on note $u \vee v$ leur maximum coordonnée par coordonnée.
On définit le mot associé à un jeu légal par étant la suite des sommets de V qui ont tiré. On définit le langage des jeux légaux (associé à un graphe et à une position initiale) comme étant l'ensemble des mots associés aux différents jeux légaux possibles.

2 Le langage des jeux légaux

Notre but va être de montrer le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit un graphe et une distribution initiale de jetons. On est dans l'un des deux cas suivants :*
-soit on peut continuer chaque jeu légal indéfiniment.
-soit tout jeu légal termine après le même nombre d'étape, et chaque sommet a tiré le même nombre de fois.

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, nous allons utiliser les proprietés du langage L des jeux légaux associés à la distribution initiale de jetons sur le graphe.
Commençons par définir quelques propriétés sur les langages.

Définition 1. *On dit qu'un langage L est héréditaire à gauche si pour tout mot $m \in L$, les préfixes de m sont aussi dans L.*
On dit qu'un langage L est permutable si pour tous mots $m_1, m_2 \in L$ tels que $[m_1] = [m_2]$, pour toute lettre x, si $m_1x \in L$ alors $m_2x \in L$.
On dit qu'un langage L est localement libre si pour tout mot $m \in L$, pour toutes lettres x, y telles que $x \neq y$, si $mx \in L$, $my \in L$, alors $mxy \in L$.

Lemme 1. *Le langage des jeux légaux associé à une distribution initiale de jetons sur un graphe est héréditaire à gauche, permutable, et localement libre.*

Démonstration. L'hérédité à gauche est immédiate, un préfixe d'un mot étant le mot associé aux premières étapes du jeu légal.
Si $[m_1] = [m_2]$ alors les jeux associés à m_1 et m_2 mènent à la même position, donc si l'on peut tirer x après l'un, on le peut après l'autre. Donc le langage est permutable.
Si après avoir fait les étapes associées au mot m, on peu tirer à partir de x ou de y, alors tirons x. Le nombre de jetons sur y a pu rester le même ou augmenter d'un. Dans tous les cas, il y a toujours suffisament de jetons sur y pour tirer, et mxy est donc un mot du langage. Donc le langage est localement libre.

□

Lemme 2. *Soit L un langage héréditaire à gauche, permutable et localement libre.*
Alors pour tous $m_1, m_2 \in L$, il existe un sous-mot m_1' de m_1 tel que $m_2m_1' \in L$ et $[m_2m_1'] = [m_1] \vee [m_2]$.

Démonstration. On procède par récurrence sur $|[m_1] \vee [m_2]|$
Si $|[m_1] \vee [m_2]| = 0$, alors m_1 et m_2 sont le mot vide, on prend comme m_1' l'unique sous-mot de m_1 : le mot vide.
Soit m_1' le sous-mot de m_1 contenant les lettres x de m_1 précédées d'au moins $[m_2]_x$ apparitions de x. On a donc $[m_2m_1'] = [m_1] \vee [m_2]$, il nous faut montrer que $m_2m_1' \in L$.
Notons m_1'' le plus long préfixe de m_1' tel que $m_2m_1'' \in L$.
Nous allons montrer par l'absurde que $m_1'' = m_1$.
Si ce n'est pas le cas, notons x la première lettre suivant m_1'' dans m_1'.
On a $[m_1]_x = [m_2]_x + [m_1']_x\ [m_2]_x + [m_1'']_x = [m_2m_1'']_x$, donc on peut écrire $m_1 = m_3xm_4$ avec $[m_3]_x = [m_2m_1'']_x$.
On a $[m_3] \vee [m_2m_1''] = [m_2m_1'']$ et $|[m_2m_1'']| < |[m_1] \vee [m_2]|$.
On applique l'hypothèse de récurrence pour trouver un sous-mot m de m_2m_1'' tel que $m_3m \in L$ et $[m_3m] = [m_2m_1'']$. Comme $[m_3]_x = [m_2m_1'']_x$, x n'apparaît pas dans m et, en appliquant la liberté locale successivement pour chacune des lettres de m (étant donné que le langage est héréditaire à gauche, si $m_3m \in L$ et m' un préfixe de m, on a $m_3m' \in L$) , on obtient $m_3mx \in L$. Comme le langage est permutable, on a $m_2m_1''x \in L$, ce qui contredit le fait que $m1''$ est le plus grand préfixe de m_1' tel que $m_2m_1'' \in L$. □

La propriété que l'on vient de montrer s'appelle "Strong exchange property", et on pourrait montrer qu'elle est en fait équivalente au fait d'être héréditaire à gauche, permutable et localement libre (le résultat est cité dans [2]).

Définition 2. *On dit qu'un mot est basique s'il n'est le préfixe d'aucun autre mot.*

Dans le cadre du langage des jeux légaux, un mot basique est donc le mot associé à un jeu qui termine.

Lemme 3. *Soit L un langage héréditaire à gauche, permutable et localement libre. Alors*

(i) S'il existe un mot basique alors le langage est fini.

(ii) Si m et m' sont deux mots basiques alors $[m] = [m']$. En particulier, m et m' ont la même longueur.

Démonstration. On utilise la "strong exchange property".
Si $m1$ et $m2$ sont deux mots basiques, appliquons-leur cette propiété.
Cela nous donne m'_1 sous mot de $m1$ tel que $m_2m'_1 \in L$ et $[m_2m'_1] = [m_1] \vee [m_2]$.
m_2 est basique donc m'_1 est le mot vide. Donc $[m_2] = [m_1] \vee [m_2]$, et de même, $[m_1] = [m_1] \vee [m_2]$, donc $[m_1] = [m_2]$: on a bien (ii).
S'il existe un mot basique m alors appliquons la propriété à un mot $m1$ et à m.
Il existe un sous mot m'_1 de m_1 tel que $mm'_1 \in L$ et $[mm'_1] = [m_1] \vee [m]$.
Or, m est basique, donc $m'_1 = 0$, donc $[m] = [m_1] \vee [m]$.
C'est à dire m_1 est la permutation d'un sous-mot de m. Comme il y a un nombre fini de permutations de sous-mots de m, le langage est bien fini : on a (i). □

Le langage des jeux légaux étant héréditaire à gauche, permutable et localement libre. Un mot basique correspondant à un jeu qui termine, cela achève de prouver le théorème. □

Grâce à ce théorème, on va pouvoir parler de terminaison d'un jeu en ayant seulement un graphe G et une distribution initiale de N jetons. Dans la partie suivante, nous allons nous intéresser à quelques conditions de terminaison du jeu.

3 Terminaison du jeu

3.1 Premiers résultats

Nous avons un premier lemme qui nous permet de caractériser les langages infinis.

Lemme 4. *Dans un jeu infini, chaque sommet dans l'une des composantes puits est tiré un nombre infini de fois.*

Démonstration. Le jeu étant infini, il existe un sommet k qui est tiré un nombre infini de fois.
Si (k, j) est une arête, alors j est également tiré un nombre infini de fois (sinon, un nombre infini de jetons s'accumulerait sur j).
De proche en proche, toute arête i telle qu'il existe un chemin de k à i est tirée un nombre infini de fois. On considère une telle arête i dans une composante puits : elle est tirée un nombre infini de fois, et il existe un chemin de i vers chaque arête de la composante.
Donc chaque arête de la composante puits est tirée un nombre infini de fois. □

Dans le cas non-orienté, les composantes puits sont les composantes connexes du graphe. Donc si le graphe est connexe, et le jeu infini, tous les sommets sont tirés un nombre infini de fois.
On peut se poser la question d'une caractérisation similaire, en terme de tirs de sommets, pour les jeux qui se terminent.
Dans le cas non-orienté, on a le lemme suivant :

Lemme 5. *Si un jeu sur un graphe non-orienté termine, alors il y a un sommet qui n'est jamais tiré.*

Démonstration. Supposons que chaque sommet soit tiré.
Notons v le sommet qui n'a pas été tiré depuis le plus longtemps à un moment où tous les sommets ont été tirés.
Depuis qu'il a été tiré, tous ses voisins ont été tirés, et donc il a au moins $d(v)$ jetons : il peut tirer.
Ainsi, le jeu ne peut terminer. □

Ce lemme, valable dans le cas non-orienté, est aussi valable dans le cas orienté eulérien.

3.2 Terminaison du jeu et nombre de jetons

Dans cette section, nous allons chercher à prévoir le comportement du jeu (fini ou infini) en fonction du nombre de jetons présents au départ.
On peut tout d'abord facilement montrer le résultat suivant :

Lemme 6. *Soit G est un graphe avec n sommets et m arêtes.*
Si on a $N > m - n$ jetons, alors le jeu est infini.

Démonstration. On a :

$$m - n = \sum_{i=1}^{n} d^+(i) - n = \sum_{i=1}^{n} (d^+(i) - 1).$$

Il existe donc (principe des tiroirs), un sommet où il y a au moins $d^+(i)$ jetons.
Comme il y a toujours un sommet qui peut être tiré, le jeu est infini. □

Il faut cependant faire attention à la chose suivante : il se peut que le sommet qui a au moins $d^+(i)$ jetons soit un sommet où $d^+(i) = 0$ (sommet puits). Dans ce cas, le jeu tel qu'on l'a défini n'est pas infini, puisqu'on a interdit de considérer comme un mouvement le cas où un sommet de degré nul n'envoie aucun jeton.
On peut régler ce problème en ajoutant suffisament de boucles sur les sommets puits, pour garantir de ne jamais les faire tirer.

On peut voir aussi que, d'après ce que l'on a dit dans la démonstration du lemme, si l'on a $N \leq m - n$ jetons, il existe une distribution initiale de jetons qui termine : il suffit de mettre $(d^+(i) - 1)$ jetons sur chacun des sommets (on suppose ici aussi avoir rajouté des boucles sur les sommets puits pour ne pas à voir de degré nul).

Après avoir vu le nombre minimum de jetons pour être sur qu'un jeu soit infini, il est naturel de se poser la question du nombre de jetons maximum pour être sur qu'un jeu soit fini.
On ne peut pas obtenir de borne dépendant uniquement de n et m dans le cas des graphes orientés, même eulériens : par exemple, si on considère un cycle de n sommets, un seul jeton suffit à rendre le jeu infini.
On peut cependant trouver une borne :

Théorème 2. *Soit G un graphe.*
Soit h maximum tel que chaque composante puits de G ait h cycles à arêtes disjointes.
Alors tout jeu avec $N < h$ jetons est fini.
Dans le cas où G est fortement connexe, h est le nombre maximum de cycles à arêtes disjointes dans G.

Démonstration. Supposons le jeu infini.
D'après le Lemme 4, dans l'une des composantes puits, tous les sommets tirent un nombre infini de fois.
Plaçons-nous dans cette composante.
On la décompose en h cycles à arêtes disjointes.
Comme chaque sommet de la composante est tiré un nombre infini de fois, il y a au moins un jeton qui "fait le tour" de chaque cycle. Comme il y a h cycles, il faut au moins h jetons pour que les sommets puissent tirer indéfiniment.
Dans le cas où G est fortement connexe, G est une composante puits et le résultat est immédiat. □

Dans le cas non-orienté, en revanche, on peut trouver une borne dépendant uniquement de n et m. Dans le théorème suivant, on ne compte qu'une seule fois les arêtes du graphe orienté pour obtenir m (le $2m$ correspondrait donc à m si l'on identifiait vraiment le graphe au graphe orienté).

Théorème 3. *Soit G un graphe orienté.*
(i) Si $N > 2m - n$ alors tout jeu à N jetons est infini.
(ii) Si $m \leq N \leq 2m - n$ alors, il existe une configuration à N jetons qui termine, et une autre qui est infinie.
(iii) Si $N < m$ alors tout jeu à N jetons est fini.

Démonstration. Le (i) est l'application du Lemme 6.
Pour avoir une configuration à moins de $2m - n$ jetons qui termine, on met moins de $d(k) - 1$ jetons sur chacun des sommets.

Pour terminer de prouver (ii), il suffit d'exhiber un exemple de jeu qui ne termine pas avec m jetons.
On considère une orientation acyclique de G, et on place $d^+(v)$ jetons sur chaque sommet v.
Comme l'orientation est acyclique, il y a une source v où $d^+(v) = d(v)$. On commence par faire tirer ce sommet.
Si l'on change l'orientation de toutes les arêtes partant de v, on fait décroître le degré de v de $d^+(v)$, et croître le degré de ses voisins de 1. L'orientation obtenue est donc l'orientation qui correspond à la nouvelle distribution de jetons. Comme on a changé l'orientation de toutes les arêtes partant d'une source, on n'a pas créé de cycle et le graphe est toujours acyclique. Il y a donc une nouvelle source qui peut tirer. On a donc un jeu infini.

Pour montrer (iii), on va également utiliser une orientation acyclique de G.
On considère une distribution de $N < m$ jetons sur G
On note $f(v)$ le nombre de jetons sur le sommet v. On définit :

$$T = \sum_{i=1}^{n} max\{O, f(v) - d^+(v)\}$$

Il existe au moins un sommet tel que $f(v) < d^+(v)$, on appelle de tels sommets déficients.
Considérons le premier sommet v qui est tiré : on a $f(v) \geq d(v)$
On tire v, puis on inverse l'orientation de toutes les arêtes partant de v, ce qui ne crée pas de cycles. De plus, cela n'augmente pas T : le terme correspondant à v décroît de $d(v) - d^+(v)$, et chacun des $d(v) - d^+(v)$ termes correspondant aux sommets voisins de v augmente d'au plus 1. Si l'un de ces sommets était défi cient, T diminue, sinon T reste constant et les sommets déficients

restent les mêmes.
Si le jeu était infini, chaque sommet serait tiré une infinité de fois, et T décroîrait un nombre infini de fois, ce qui est impossible.
Le jeu est donc bien fini. $\square$

4 Bornes sur le temps de convergence

4.1 Une borne (exponentielle) pour les graphes orientés

On cherche ici à trouver une borne du nombre d'étapes à effectuer avant que le jeu ne termine.
On note $game(G)$ la longueur maximum d'un jeu fini sur G.
On définit le Laplacien L d'un graphe G comme étant la matrice définie par :

$$L_{i,j} = \begin{cases} d_{j,i} & \text{si } i \neq j \\ -d^+(i) + d_{i,j} & \text{si } i = j \end{cases}$$

On dit que $v \in \mathbb{R}^n$ et un vecteur période de G si v est positif et $Lv = 0$.
On dit qu'un vecteur période est primitif si ses composantes sont premières entre elles.
[1] montre la proposition suivante :

Proposition 1. *(i) Si G est fortement connexe, alors il a un unique vecteur primitif v_G, strictement positif. Les autres vecteurs sont de la forme tv_G avec $t \in \mathbb{N}$.*
(ii) Si G est connexe et eulérien.
(iii) Dans le cas général, les vecteurs périodes sont les vecteurs de la forme $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, où $\lambda_i \in \mathbb{Z}_+$, et où $v_1, \ldots, v_k$ sont les vecteurs primitifs des composantes puits du graphe.

Pour un graphe G fortement connexe, on note $per(G) = |v_G|$ la longueur de période. Pour un graphe G quelconque, $per(G)$ est la somme des $per(H)$ pour chaque composante connexe H.
Par exemple, pour un graphe où chaque composante connexe est eulérienne on a $per(G) = n$.
[1] montre le théorème suivant :

Théorème 4.

$$game(G) \leq 2nmDper(G)$$

Ainsi, on obtient le corollaire que pour un graphe G dont chacune des composantes connexes est eulérienne, $game(G) \leq 2n^2mD$.

Cette borne, dans le cas général, n'est qu'une borne exponentielle : en effet, $per(g)$ peut avoir une borne exponentielle en fonction de n. [1] donne une borne $per(G) < (2D)^{n-1}$, donc au final, on a :

$$game(G) \leq nm(2D)^n$$

4.2 Impossibilité d'une borne polynomiale dans le cas orienté

On va exhiber un exemple de suite de graphes où il y a croissance exponentielle de $game(G)$, présenté dans [4] .
On prend un entier n pair et on construit le graphe suivant :
- On fait un cycle non-orienté avec $n-1$ sommets.

- On met le sommet restant au milieu, et l'on met deux arêtes entre ce sommet et chaque sommet du cycle, un dans chaque sens, sauf pour un où l'on ne met qu'une arête du centre vers le cycle, que l'on appellera v_0.

On n'a donc que des arêtes "non-orientées", sauf une, qui va du sommet au centre vers v_0.
On place au départ $3n-5$ jetons sur le sommet central, et aucun jeton sur les autres sommets.
La seule position finale possible est celle où sur chaque sommet k, on a $d^+(k)-1$ jetons, c'est à dire $n-2$ jetons sur le sommet central, 2 jetons sur chacun des sommets ayant une arête vers le centre, et 1 jeton sur le dernier sommet, v_0.
On va déterminer combien de mouvements sont nécessaires pour atteindre la position finale.
On remarque que, s'il y a au moins un jeton sur chacun des sommets du cycle extérieur, et que l'on peut faire tirer le sommet du centre, alors on peut réaliser la suite de mouvements suivante :

- Faire tirer le sommet central,
- Faire tirer v_0,
- Faire tirer les autres sommets du cycle extérieur, dans le sens des aiguilles d'une montre.

Ainsi, chacun des n sommet aura tiré une fois, et un jeton du centre aura été déplacé vers v_0.
On peut recommencer cette opération, puis faire tirer v_0.
Les $2n+1$ opérations auront déplacé deux jetons du centre vers les deux voisins de v_0 dans le cycle extérieur.
Si l'on part de la position initiale et que l'on fait tirer le sommet central, on aura un jeton sur chacun des sommets du cycle extérieur. On appelle cette position P_0.
On effectue ensuite la suite de $2n+1$ mouvements. Les sommets du cycle extérieurs ont tous un jeton, sauf les deux voisins de v_0 qui ont deux jetons. On a ceci autour de v_0 : $\ldots 1121211\ldots$.
On appelle cette position (P_1).
On effectue encore la suite de $2n+1$ mouvements. On a ceci autour de v_0 : $\ldots 1131311\ldots$
On fait tirer les deux voisins de v_0 puis v_0. On obtient ceci : $\ldots 1211121\ldots$.
On effectue la suite de $2n+1$ mouvements pour obtenir : $\ldots 1221221\ldots$, que l'on appelle P_2.
On va procéder par récurrence. On note P_i la position $\ldots 12\ldots 212\ldots 21\ldots$ (autour de v_0), où il y a i 2 de chaque côté de v_0.
Si l'on sait passer de P_{i-1} à P_i pour $i=1,\ldots,k-1$ en a_i mouvements. Alors partons de P_{k-1}.

- On fait a_{k-1} mouvements pour arriver à $\ldots 132\ldots 212\ldots 231\ldots$
- On fait tirer les sommets du 3 de gauche à celui de droite pour arriver à $\ldots 211\ldots 111\ldots 112\ldots$ ($2k-1$ mouvements).
- On reconstruits les 2 internes, en faisant les $\sum_{i=1}^{k} a_i$ mouvements nécessaires pour cela, pour arriver à $\ldots 222\ldots 212\ldots 222\ldots$, c'est à dire P_k.

On obtient donc la relation de récurrence :

$$a_k = a_{k-1} + 2k - 1 + \sum_{i=1}^{k-1} a_i \quad \textit{pour } k \geq 2 \ ; \ a_1 = 2n+1$$

Et donc en notant s_k le nombre total de mouvements nécessaires pour atteindre (P_k), on a $s_k = 1 + \sum_{i=1}^{k} a_i$, et on obtient la relation :

$$s_k = 3s_{k-1} + s_{k-2} = 2k - 2 \ \textit{pour } k \geq 2 \ ; \ s_0 = 1, \ s_1 = 2n+2.$$

En notant $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, on obtient la solution :

$$s_k = A\phi^{2k} + B\phi^{-2k} - 2k$$

avec :

$$A = \frac{2n}{\sqrt{5}} + \phi \textit{ et } B = -\frac{2n}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\phi}.$$

La position finale est atteinte après $s_{\frac{n-2}{2}}$ mouvements.
On a :

$$s_{\frac{n-2}{2}} \sim (\frac{2n}{\sqrt{5}} + \phi)\phi^{(n-2)}.$$

On a donc bien un nombre de mouvements qui dépend exponentiellement du nombre de sommets du graphe.

4.3 Existence d'une borne polynomiale pour les graphes non-orientés

[2] démontre, en utilisant les valeurs propres du Laplacien du graphe, que tout jeu fini sur un graphe non-orienté termine en au plus $2n^3N$ mouvements. Comme N peut être de l'ordre de n^2, on a une borne en n^5.
On va ici présenter le théorème montré dans [3] :

Théorème 5. *Soit G un graphe à n sommets, m arêtes, et de diamètre d.*
Alors tout jeu fini termine en au plus $2nmd$ mouvements.

Cela nous donnera une borne en $O(n^4)$.

Démonstration. Nous allons commencer par montrer le lemme suivant :

Lemme 7. *Si l'on considère deux sommets voisins, la différence entre le nombre de fois où ces sommets ont été tirés est inférieure à N.*

Démonstration. On considère une arête (v, w) où v a tiré i fois et w a tiré j fois.
Supposons $i < j$.
Notons H l'ensemble des sommets de G qui ont été tirés au plus i fois.
On a $v \in H$ et $w \notin H$.
Le long de chaque arête de H dans $G \setminus H$, il y a eu plus de jetons bougés vers H que depuis H.
Sur l'arête (v, w), la différence est de $j - i$. Donc il y a eu au moins $j - i$ jetons en plus dans H pendant ces étapes.
Donc $j - i \leq N$. □

Comme le jeu est fini, il existe un sommet v qui ne tire pas.
En appliquant plusieurs fois le Lemme 7, on déduit que tout sommet w à une distance d' de v a tiré au plus $d'N$ fois. Donc chaque sommet a tire au plus dN fois.
D'après le Théorème 3, étant donné que le jeu est fini, on a $N \leq 2m$.
Finalement, on a bien au plus $2mdN$ mouvements avant la fin du jeu. □

5 Conclusion

Nous avons montré ici quelques propriétés intéressantes sur les "chip-firing games". La première d'entre elle était de montrer qu'étant donné une configuration initiale, quelle que soit la façon dont on joue, ou bien on termine en un nombre de coups fixes, ou bien on ne peut pas terminer.
Cela nous a permis de nous poser d'autres questions, et de donner une manière de prédire, en fonction du nombre de jetons, si un jeu va terminer, continuer indéfiniment. On a pu aussi voir que la donnée du nombre de jetons, connaissant le graphe, n'était pas toujours suffisante pour conclure.
Enfin, nous avons étudié les bornes sur le temps de convergence d'un jeu qui termine, et vu que dans le cas général orienté, on n'avait qu'une borne exponentielle.

Nous pouvons remarquer que les situations dans le cas des graphes non orientés sont généralement plus simples. Les théorèmes sont un peu plus faciles, et il y a une borne polynomiale pour le temps de convergence dans le cas non-orienté mais pas dans le cas orienté.
Nous pourrions aussi nous poser d'autres questions, comme celle de savoir comment décider, étant données deux positions des jetons, si l'on peut passer de l'une à l'autre position (des bornes de complexité de ce problème sont données dans [1]).

6 Bibliographie

Références

[1] A. Björner and L.Lovasz. Chip-firing games on directed graphs. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 1992.

[2] A. Björner, L.Lovasz, and P. Schor. Chip-firing games on graphs. *European Journal of Combinatorics*, 1992.

[3] G.Tardos. Polynomial bound for a chip firing game on graphs. *SIAM J. Discrete Math*, 1988.

[4] K.Eriksson. No polynomial bound for the chip firing game on directed graphs. *Proceedings of the american mathematica society*, 1991.