# Hypergraphes : Théorie des matroïdes

Lucien Capdevielle

28 novembre 2010

## Introduction

Ce rapport tente de présenter un grand nombre de résultats sur les matroïdes de manière synthétique. Pour ce faire beaucoup de propositions ne sont pas démontrées, cependant les démonstrations de ces propositions ne font pas appel à des techniques très intéressantes ni ne représentent de véritables défis. Ces démonstrations ne font généralement appel qu'à des techniques classiques de manipulation des ensembles (passage au complémentaire, intersection,...). L'absence de ces démonstrations n'est donc probablement pas trop gênante pour le lecteur.

La section 1 du rapport introduit les notions de base de la théorie des matroïdes (et contient la quasi-totalité des propositions non-démontrées) tout en montrant qu'un matroïde peut être caractérisé de nombreuses façons et que la classe des matroïdes elle-même peut être définie de nombreuses manières.

La section 2 présente quelques opérations importantes sur les matroïdes qui nous permettent de prouver le Théorème d'intersection des matroïdes qui est le principal résultat présenté dans ce rapport.

Enfin, la section 3 permet de montrer trois exemples de matroïdes ainsi qu'une application de l'équivalence des définitions des matroïdes et une application du Théorème d'intersection des matroïdes.

# 1 Définitions

## 1.1 Définitions principales

**Définition 1.1.1.** *Un matroïde $M$ est un couple $(E,\mathfrak{I})$ où $E$ est un ensemble fini et $\mathfrak{I}$ est une famille de parties de $E$ (appelé ensemble des indépendants) tel que :*
- (**PI***1)* $\mathfrak{I} \neq \varnothing$
- (**PI***2) Si* $A' \subseteq A$ *et* $A \in \mathfrak{I}$*, alors* $A' \in \mathfrak{I}$
  *(propriété d'hérédité)*
- (**PI***3) Si* $A, B \in \mathfrak{I}$ *et* $|A| < |B|$*, alors* $\exists b \in B \setminus A$ *tel que* $A \cup \{b\} \in \mathfrak{I}$
  *(propriété d'échange des indépendants)*

**Définition 1.1.2.** *Un couple $(E,\mathfrak{I})$ où $E$ est un ensemble fini et $\mathfrak{I}$ est une famille de parties de $E$ tel que $\mathfrak{I}$ vérifie (*__PI__*1) et (*__PI__*2) est appelé système héréditaire.*

**Proposition 1.1.1.** *Un système héréditaire est un matroïde si et seulement si il vérifie : (*__PI__*3') (Si $A \subseteq E$, alors tous les sous-ensembles de $A$, indépendants et maximaux pour l'inclusion, ont le même cardinal).*

**Définition 1.1.3.** *(dépendants, circuits et bases d'un système héréditaire)*
- *L'ensemble des dépendants $\mathfrak{D}$ est l'ensemble complémentaire de l'ensemble des indépendants.*
- *L'ensemble des circuits $\mathfrak{C}$ est l'ensemble qui contient tous les dépendants minimaux pour l'inclusion.*
- *L'ensemble des bases $\mathfrak{B}$ est l'ensemble qui contient tous les indépendants maximaux pour l'inclusion.*

**Proposition 1.1.2.** *Toutes les bases d'un matroïde $M$ ont le même cardinal (appelé rang de $M$).*

**Définition 1.1.4.** *(fonction de rang)*
*Soit $M = (E, \mathfrak{I})$ un système héréditaire.*
*La fonction de rang $r$ de $M$ est la fonction de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbb{N}$ telle que :*
$r(A) = max\{|B| \mid B \subseteq A \text{ et } B \in \mathfrak{I}\}$.

**Définition 1.1.5.** *(opérateur de clôture)*
*Soit $M = (E, \mathfrak{I})$ un système héréditaire.*
*L'opérateur de clôture $\sigma$ de $M$ est la fonction de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ telle que :*
$\sigma(A) = \{x \in E | \ r(A \cup \{x\}) = r(A)\}$.

**Proposition 1.1.3.** *Soit $M = (E, \mathfrak{I})$ un matroïde.*
$\forall A \subseteq E, \sigma(A) = A \cup \{x \in E \setminus A \mid \exists B \in \mathfrak{C}, B \subseteq A \cup \{x\} \text{ et } x \in B\}$.

**Proposition 1.1.4.** *Soit $M = (E, \mathfrak{I})$ un matroïde.*
$\forall A \subseteq E, r(\sigma(A)) = r(A)$.

**Définition 1.1.6.** *(ensembles couvrants, ensembles clôts et hyperplans d'un système héréditaire)*

- *L'ensemble des ensembles couvrants* $\mathbf{S}$ *est l'ensemble qui contient toutes les parties* $A$ *de* $E$ *telles que :* $\sigma(A) = E$.
- *L'ensemble des ensembles clôts (ou sous-espaces)* $\mathfrak{F}$ *est l'ensemble qui contient toutes les parties* $A$ *de* $E$ *telles que :* $\sigma(A) = A$.
- *L'ensemble des hyperplans* $\mathbf{H}$ *est l'ensemble qui contient toutes les parties propres de* $E$ *closes maximales.*

**Définition 1.1.7.** *(sur-bases et hypobases d'un système héréditaire)*

- *L'ensemble des sur-bases* $\mathfrak{S}$ *est l'ensemble qui contient toutes les parties* $A$ *de* $E$ *telles que :* $\exists B \in \mathfrak{B}, B \subseteq A$.
- *L'ensemble des hypobases* $\mathfrak{H}$ *est l'ensemble qui contient toutes les parties* $A$ *de* $E$ *telles que :* $\forall B \in \mathfrak{B}, B \nsubseteq A$ *et* $\forall a \in \bar{A}, \exists B \in \mathfrak{B}, B \subseteq A + a$.

**Proposition 1.1.5.** *Soit* $M$ *un matroïde.*

- $\mathbf{S}_M = \mathfrak{S}_M$
- $\mathbf{H}_M = \mathfrak{H}_M$

## 1.2 Définition d'un matroïde par ses bases

**Définition 1.2.1.** *Un matroïde* $M$ *est un couple* $(E,\mathfrak{B})$ *où* $E$ *est un ensemble fini et* $\mathfrak{B}$ *est une famille de parties de* $E$ *(appelé ensemble des bases) tel que :*

- *(***PB***1)* $\mathfrak{B} \neq \varnothing$
- *(***PB***2) Si* $A' \subsetneq A$ *et* $A \in \mathfrak{B}$*, alors* $A' \notin \mathfrak{B}$
  *(propriété de maximalité)*
- *(***PB***3) Si* $A, B \in \mathfrak{B}$ *et* $a \in A \setminus B$*, alors* $\exists b \in B \setminus A$ *tel que* $(A - a + b) \in \mathfrak{B}$
  *(propriété d'échange des bases)*

*L'ensemble des indépendants* $\mathfrak{I}$ *de* $M$ *est alors l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble de* $\mathfrak{B}$.

**Proposition 1.2.1.** *La définition 1.2.1 est équivalente à la définition 1.1.1.*

## 1.3 Définition d'un matroïde par sa fonction de rang

**Définition 1.3.1.** *Un matroïde* $M$ *est un couple* $(E,r)$ *où* $E$ *est un ensemble fini et* $r$ *est une fonction de* $\mathcal{P}(E)$ *dans* $\mathbb{N}$ *(appelée fonction de rang) telle que :*

- *(***PR***1)* $\forall A \subseteq E, 0 \leq r(A) \leq |A|$
- *(***PR***2)* $\forall B \subseteq E, \forall A \subseteq B, r(A) \leq r(B)$
- *(***PR***3)* $\forall A, B \subseteq E, r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B)$
  *(propriété de sous-modularité)*

*L'ensemble des indépendants $\mathfrak{I}$ de $M$ est alors l'ensemble des parties $A$ de $E$ telles que : $r(A) = |A|$.*

**Proposition 1.3.1.** *La définition 1.3.1 est équivalente à la définition 1.1.1.*

## 1.4 Définition d'un matroïde par ses circuits

**Définition 1.4.1.** *Un matroïde $M$ est un couple $(E,\mathfrak{C})$ où $E$ est un ensemble fini et $\mathfrak{C}$ est une famille de parties de $E$ (appelé ensemble des circuits) tel que :*
- *(**PCi**1) $\mathfrak{C} \neq \{\varnothing\}$*
- *(**PCi**2) Si $C \subsetneq C'$ et $C \in \mathfrak{C}$, alors $C' \notin \mathfrak{C}$*
  *(propriété de minimalité)*
- *(**PCi**3) Si $A, B \in \mathfrak{C}$, $A \neq B$ et $a \in A \cap B$, alors $(A \cup B) - a$ contient un circuit*
  *(propriété d'élimination faible)*

*L'ensemble des indépendants $\mathfrak{I}$ de $M$ est alors l'ensemble des parties de $E$ telles qu'aucun élément de $\mathfrak{C}$ n'est inclus dedans.*

**Proposition 1.4.1.** *La définition 1.4.1 est équivalente à la définition 1.1.1.*

**Remarque** : La définition faisant appel aux circuits a été placée après celle faisant appel au rang car l'utilisation de (**PR**3) facilite la démonstration de (**PCi**3).

**Proposition 1.4.2.** *Soit $M = (E, \mathfrak{B})$ un matroïde.*
*Si $A, B \in \mathfrak{B}$ et $a \in A \setminus B$, alors $\exists b \in B \setminus A$ tel que $(B + a - b) \in \mathfrak{B}$.*

*Démonstration.* Par (**PCi**3) $B + a$ ne contient qu'un unique cycle $C$, or $A$ ne contient pas de cycle, donc $\exists b \in (B \setminus A) \cap C$. Donc $(B + a - b)$ ne contient pas de cycle et a le cardinal d'une base, par conséquent $(B + a - b)$ est une base. □

## 1.5 Définition d'un matroïde par son opérateur de clôture

**Définition 1.5.1.** *Un matroïde $M$ est un couple $(E,\sigma)$ où $E$ est un ensemble fini et $\sigma$ est une fonction de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ (appelé opérateur de clôture) tel que :*
- *(**PCl**1) $\forall A \subseteq E, A \subseteq \sigma(A)$*
- *(**PCl**2) $\forall B \subseteq E, \forall A \subseteq B, \sigma(A) \subseteq \sigma(B)$*
- *(**PCl**3) $\forall A \subseteq E, \sigma(\sigma(A)) = \sigma(A)$*
- *(**PCl**4) $\forall a, b \in E, \forall C \subseteq E,$ si $a \in \sigma(C \cup \{b\}) \setminus \sigma(C)$ alors $b \in \sigma(C \cup \{a\})$*
  *(propriété d'échange de Mac Lane–Steinitz)*

*L'ensemble des bases $\mathfrak{B}$ de $M$ est alors l'ensemble des ensembles couvrants minimaux de $E$.*

**Proposition 1.5.1.** *La définition 1.5.1 est équivalente à la définition 1.2.1.*

**Algorithm 1** Algorithme glouton $\mathcal{A}$

```
Entrée : (E,𝔍), w
Trier les éléments de E par poids décroissant.
A ← ∅
for i = 1 to |E| do
  if A ∪ {e_i} ∈ 𝔍 then
    A ← A ∪ {e_i}
  end if
end for
return A
```

### 1.6 Définition algorithmique d'un matroïde

**Définition 1.6.1.** *(problème de l'ensemble pondéré maximal)*
*Soit un couple $(E,\mathfrak{I})$ où $E$ est un ensemble fini et $\mathfrak{I}$ est une famille non vide de parties de $E$.*
*Soit $w$ une fonction de poids de $E$ dans $\mathbb{N}$.*
*On définit alors $W : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{N}$ par :*
$\forall X \subseteq E,\ W(X) = \sum_{x \in X} w(x)$
*Trouver un élément $A$ de $\mathfrak{I}$ qui maximise $W$ sur $\mathfrak{I}$.*

**Définition 1.6.2.** *Un matroïde $M$ est un couple $(E,\mathfrak{I})$ où $E$ est un ensemble fini et $\mathfrak{I}$ est une famille non vide de parties de $E$ (appelé ensemble des indépendants) tel que : $\forall (w : E \to \mathbb{N})$, $\mathcal{A}(M,w)$ est une solution du problème de l'ensemble pondéré maximal (avec $\mathcal{A}$ l'algorithme glouton).*

**Proposition 1.6.1.** *La définition 1.6.2 est équivalente à la définition 1.1.1.*

## 2 Opérations sur les systèmes héréditaires

**Définition 2.0.3.** *(Restriction)*
*Soit $M = (E, \mathfrak{I})$ un système héréditaire et $A$ une partie de $E$.*
*$M|A = (A, \mathfrak{I}_{M|A})$ (avec $\mathfrak{I}_{M|A} = \{B \subseteq A \mid B \in \mathfrak{I}\}$) est appelé réduction de $M$ par $A$ (et est obtenu en supprimant $\bar{A}$).*

**Définition 2.0.4.** *(Contraction)*
*Soit $M = (E, \mathfrak{S})$ un système héréditaire et $A$ une partie de $E$.*
*$M.A = (A, \mathfrak{S}_{M.A})$ (avec $\mathfrak{S}_{M.A} = \{B \subseteq A \mid (B \cup \bar{A}) \in \mathfrak{S}\}$) est appelé contraction de $M$ par $A$ (et est obtenu en contractant $\bar{A}$).*

**Définition 2.0.5.** *(Mineur)*
*Soit M et M' deux systèmes héréditaires.*
*Si M' est obtenu à partir de M par une suite d'opérations de restriction et de contraction alors M' est appelé mineur de M.*

**Définition 2.0.6.** *(Dual)*
*Soit* $M = (E, \mathfrak{B})$ *un système héréditaire.*
$M^* = (E, \mathfrak{B}^*)$ *(avec* $\mathfrak{B}^* = \{\bar{B} \subseteq E \mid B \in \mathfrak{B}\}$*) est appelé dual de M.*

**Lemme 2.0.2.** *Soit* $M = (E, \mathfrak{B})$ *un système héréditaire.*

1. $(M^*)^* = M$
2. $\mathfrak{I}^* = \{\bar{S} \subseteq E \mid S \in \mathfrak{S}\}$ *et* $\mathfrak{S}^* = \{\bar{I} \subseteq E \mid I \in \mathfrak{I}\}$
3. $\mathfrak{C}^* = \{\bar{H} \subseteq E \mid H \in \mathfrak{H}\}$ *et* $\mathfrak{H}^* = \{\bar{C} \subseteq E \mid C \in \mathfrak{C}\}$

**Théorème 2.0.3.** *(Whitney, 1935)*
*Soit* $M = (E, r)$ *un matroïde.*
$M^* = (E, r^*)$ *est un matroïde et* $\forall A \in E, r^*(A) = |A| - (r(E) - r(\bar{A}))$.

*Démonstration.* (**PB**1) et (**PB**2) sont clairement vraies pour $M^*$.

Soient $\bar{B}$ et $\bar{B}'$ dans $\mathfrak{B}^*$ et $e \in \bar{B} \setminus \bar{B}'$.
$e \in B' \setminus B$ donc $\exists f \in B \setminus B', (B + e - f) \in \mathfrak{B}$ (par la proposition 1.4.2).
Donc $f \in \bar{B}' \setminus \bar{B}$ et $(\bar{B} - e + f) \in \mathfrak{B}^*$, d'où (**PB**3). $M^*$ est donc un matroïde.

Soit $A \subseteq E$ et $I$ un coindépendant (indépendant de $M^*$) maximal inclus dans $A$.
$r^*(A) = r^*(I) = |I|$ et par le lemme 2.0.2, $\bar{I}$ est le plus petit ensemble contenant $\bar{A}$ et une base de $M$.
Etant donné que $\bar{I}$ peut être construit à partir de $\bar{A}$ en complétant un indépendant maximal de $\bar{A}$ pour obtenir une base, on a : $|\bar{I}| - |\bar{A}| = r(E) - r(A)$.
Donc $r^*(A) = |I| = |A| - (|A| - |I|) = |A| - (|\bar{I}| - |\bar{A}|) = |A| - (r(E) - r(\bar{A}))$ □

**Proposition 2.0.4.** *Les opérations de restriction et de contraction commutent.*

**Proposition 2.0.5.** *Soit* $M = (E, \mathfrak{I})$ *un système héréditaire et A une partie de E.*
*La restriction et la contraction sont des opérations duales :*
$(M.A)^* = (M^*|A)$ *et* $(M|A)^* = (M^*.A)$.

*Démonstration.*
$\mathfrak{I}_{(M.A)^*} = \{B \subseteq A \mid A \setminus B \in \mathfrak{S}_{M.A}\} = \{B \subseteq A \mid (A \setminus B) \cup \bar{A} \in \mathfrak{S}_M\}$
$= \{B \subseteq A \mid \bar{B} \in \mathfrak{S}_M\} = \{B \subseteq A \mid B \in \mathfrak{I}_M\} = \mathfrak{I}_{M^*|A}$ □

**Théorème 2.0.6.** *Soit $M = (E, r)$ un matroïde et $A$ une partie de $E$.*

1. *$M|A$ est un matroïde et $\forall B \subseteq A, r_{M|A}(B) = r_M(B)$.*
2. *$M.A$ est un matroïde et $\forall B \subseteq A, r_{M.A}(B) = r_M(B \cup \bar{A}) - r_M(\bar{A})$.*

*Démonstration.* (1) est immédiat par définition.
En utilisant la dualité et le théorème 2.0.3 on obtient que $M.A = (M^*|A)^*$ est un matroïde et $\forall B \subseteq A, r_{M.A}(B) = r_M(B \cup \bar{A}) - r_M(\bar{A})$. □

**Théorème 2.0.7.** *Théorème d'intersection de matroïdes (Edmonds, 1970)*
*Soient $M_1 = (E, \mathfrak{I}_1)$ et $M_2 = (E, \mathfrak{I}_2)$ deux matroïdes.*
*$max\{|I| \mid I \in \mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2\} = min_{A \subseteq E}\{r_1(A) + r_2(\bar{A})\}$.*

*Démonstration.* (Seymour, 1976)
Montrons d'abord l'inégalité $max\{|I| \mid I \in \mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2\} \leq min_{A \subseteq E}\{r_1(A) + r_2(\bar{A})\}$ :
Soit $I \in \mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2$ et $A$ une partie de $E$.
Posons $I_1 = I \cap A$ et $I_2 = I \cap \bar{A}$.
$I_1$ est un indépendant de $M_1$ inclus dans $A$ et $I_2$ est un indépendant de $M_2$ inclus dans $\bar{A}$, d'où : $|I_1| \leq r_1(A)$ et $|I_2| \leq r_2(\bar{A})$, donc $|I| = |I_1| + |I_2| \leq r_1(A) + r_2(\bar{A})$.

Pour obtenir l'égalité on fait une induction sur la taille de $E$.
Le cas $|E| = 0$ est trivial.
Supposons maintenant que $|E| \geq 0$.

**Premier cas** : $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2 = \{\varnothing\}$
Prenons $A$ l'ensemble des éléments $a$ de $E$ tels que $\{a\} \notin \mathfrak{I}_1$.
On a alors : $max\{|I| \mid I \in \mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2\} = 0 = r_1(A) + r_2(\bar{A})$.

**Deuxième cas** : $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2 \neq \{\varnothing\}$
Prenons $e \in E$ tel que $\{e\} \in \mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2$.
Posons $B = E - e$ et $k = min_{A \subseteq E}\{r_1(A) + r_2(\bar{A})\}$.

Supposons par l'absurde que $M_1$ et $M_2$ ne possèdent pas d'indépendant commun de taille $k$.

Alors $M_1|B$ et $M_2|B$ n'ont pas d'indépendant commun de taille $k$, et $M_1.B$ et $M_2.B$ n'ont pas d'indépendant commun de taille $k-1$. Par hypothèse d'induction et par le théorème 2.0.6 on obtient alors :
$\exists X \subseteq B, r_1(X) + r_2(B \setminus X) \leq (k-1)$
$\exists Y \subseteq B, r_1(Y + e) - 1 + r_2((B \setminus Y) + e) - 1 \leq (k-2)$

Or $(B \setminus Y) + e = \bar{Y}$ et $B \setminus X = \overline{X+e}$, d'où en sommant les deux inégalités : $r_1(X) + r_2(\overline{X+e}) + r_1(Y+e) + r_2(\bar{Y}) \leq 2k-1$.

Posons $U = X + e$ et $V = Y + e$ et appliquons la sous-modularité (**PR**3) de $r_1$ à $X$ et $V$, et la sous-modularité de $r_2$ à $\bar{Y}$ et $U$ :
$r_1(X \cup V) + r_1(X \cap V) + r_2(\bar{Y} \cup \bar{U}) + r_2(\bar{Y} \cap \bar{U}) \leq 2k-1$.

Or $\bar{Y} \cap \bar{U} = \overline{X \cup V}$ et $\bar{Y} \cup \bar{U} = \overline{X \cap V}$, donc :
$2k = 2 \times (min_{A \subseteq E}\{r_1(A) + r_2(\bar{A})\}) \leq$
$(r_1(X \cup V) + r_2(\overline{X \cup V})) + (r_1(X \cap V) + r_2(\overline{X \cap V})) \leq 2k-1$.
Contradiction ! □

**Corollaire 2.0.8.** *Soient $M_1 = (E, \mathfrak{I}_1)$ et $M_2 = (E, \mathfrak{I}_2)$ deux matroïdes.*
$max\{|I| \mid I \in \mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2\} = \min\limits_{X_1 \cup X_2 = E}\{r_1(X_1) + r_2(X_2)\}$.

# 3 Exemples de matroïdes

## 3.1 Les forêts des graphes (Whitney)

**Définition 3.1.1.** *Soit G=(V,E) un graphe (ou multigraphe) non orienté.*
*$\mathcal{M}$(G)=(E,$\mathfrak{I}$) (avec $A \in \mathfrak{I}$ si (V,A) ne possède pas de cycles) est appelé matroïde cyclique du graphe G.*

**Proposition 3.1.1.** *Soit G=(V,E) un graphe (ou multigraphe) non orienté.*
*$\mathcal{M}$(G) est un matroïde.*

**Théorème 3.1.2.** *L'algorithme de Kruskal cherchant un arbre couvrant de poids maximal est correct.*

*Démonstration.* Par les propositions 3.1.1 et 1.6.1. □

**Définition 3.1.2.** *Soit M un matroïde.*
*Si il existe un graphe (ou multigraphe) G non orienté tel que $M = \mathcal{M}(G)$ alors M est appelé matroïde graphique.*

**Proposition 3.1.3.** *Soit G=(V,E) un graphe (ou multigraphe) non orienté.*

- *Les circuits de $\mathcal{M}$(G) sont les cycles de G.*
- *Les bases de $\mathcal{M}$(G) sont les réunions des arbres couvrant les composantes connexes de G.*

**Proposition 3.1.4.**
*Soit G=(V,E) un graphe (ou multigraphe) non orienté et $v \in V$.*
*Soit A l'ensemble des arêtes de G qui ne sont pas reliées à v.*
$\mathcal{M}(G)|A = \mathcal{M}(G - v)$ *(avec $G - v$ le graphe obtenu à partir de G en supprimant v).*

**Proposition 3.1.5.**
*Soit G=(V,E) un graphe (ou multigraphe) non orienté et $e \in E$.*
$\mathcal{M}(G)|(E-e) = \mathcal{M}(G-e)$ *(avec $G-e$ le graphe obtenu à partir de G en supprimant e).*

**Proposition 3.1.6.**
*Soit G=(V,E) un graphe (ou multigraphe) non orienté et $e \in E$.*
$\mathcal{M}(G).(E - e) = \mathcal{M}(G.e)$ *(avec G.e le graphe obtenu à partir de G en contractant e).*

**Théorème 3.1.7.** *Soit G=(V,E) un graphe (ou multigraphe) non orienté.*

- *Si M' est un mineur de $\mathcal{M}(G)$ alors il existe un mineur G' de G tel que $M' = \mathcal{M}(G')$.*
- *Si G' est un mineur de G alors il existe un mineur M' de $\mathcal{M}(G)$ tel que $M' = \mathcal{M}(G')$.*

*Démonstration.* Par les propositions 3.1.4, 3.1.5 et 3.1.6. □

Il est possible de pousser plus loin les liens entre un graphe et son matroïde associé en montrant que le dual du matroïde associé à un graphe planaire est le matroïde associé au dual du graphe planaire. Enfin, on peut montrer qu'un graphe est planaire si et seulement si le dual de son matroïde associé est graphique.

La notion de mineur d'un matroïde permet également d'obtenir d'autres résultats comme la caractérisation par mineurs interdits de classes de matroïdes stables par mineurs (à l'instar de ce qui se fait pour les graphes).

## 3.2 Les familles libres de vecteurs (van der Waerden)

**Définition 3.2.1.** *Soit A un ensemble de vecteurs.*
*On note* **Gen***(A) l'espace vectoriel généré par A.*

**Définition 3.2.2.** *Soit E un ensemble fini de vecteurs.*
*$\mathcal{M}(E)=(E,\mathfrak{I})$ (avec $A \in \mathfrak{I}$ si A est une famille libre incluse dans E) est appelé matroïde vectoriel de E.*

**Proposition 3.2.1.** *Soit $E$ un ensemble fini de vecteurs.*
*$\mathcal{M}(E)$ est un matroïde.*

**Proposition 3.2.2.** *Soit $E$ un ensemble fini de vecteurs.*

- *Les dépendants de $\mathcal{M}(E)$ sont les familles liées incluses dans $E$.*
- *Les bases de $\mathcal{M}(E)$ sont les bases de* **Gen**$(E)$ *incluses dans $E$.*
- *Soit $A \subseteq E$, le rang de $A$ est la dimension de* **Gen**$(A)$.
- *Soit $A \subseteq E$, $\sigma(A) = \mathbf{Gen}(A) \cap E$.*
- *Les ensembles couvrants de $\mathcal{M}(E)$ sont les familles génératrices de* **Gen**$(E)$ *incluses dans $E$.*
- *Les ensembles clôts $A$ de $\mathcal{M}(E)$ sont les familles de vecteurs de $E$ telles que $A = \mathbf{Gen}(A) \cap E$.*
- *Les hyperplans $A$ de $\mathcal{M}(E)$ sont les familles de vecteurs de $E$ telles que $A = \mathbf{Gen}(A) \cap E$ et $\forall e \in E \setminus A, \mathbf{Gen}(A + e) = \mathbf{Gen}(E)$.*

Comme nous venons de le voir, il existe un lien très fort entre les familles finies de vecteurs et la structure de matroïde. Ce lien persiste également quand on ne considère plus des familles finies mais des espaces vectoriels de dimension finie. On fait alors appel à la notion de matroïde de taille infinie qui conserve la plupart des propriétés des matroïdes de taille finie.

## 3.3 Les couplages des graphes bipartis

**Définition 3.3.1.** *Soit $E$ un ensemble fini et $(E_1, ..., E_k)$ une partition de $E$.*
*$\mathcal{M}((E, (E_1, ..., E_k)) = (E, \mathfrak{I})$ (avec $A \in \mathfrak{I}$ si $\forall i, |A \cap E_i| \leq 1$) est appelé matroïde de partition de $E$ induit par $(E_1, ..., E_k)$.*

**Proposition 3.3.1.** *Soit $E$ un ensemble fini et $(E_1, ..., E_k)$ une partition de $E$.*
*$\mathcal{M}((E, (E_1, ..., E_k)))$ est un matroïde.*

**Théorème 3.3.2.** *(König-Egervary, 1931)*
*Dans un graphe biparti, les plus grand couplages ont la même taille que les plus petites couvertures par sommets.*

*Démonstration.* Soit $G = (X_1 \cup X_2, E)$ un graphe biparti. Soit $\alpha$ la taille d'un couplage maximum de $G$ et $\beta$ la taille d'une couverture par sommets minimum de $G$.

Posons $k = |X|$ et $n = |Y|$.
Notons $P_1 = (E_1^1, ..., E_k^1)$ (resp. $P_2 = (E_1^2, ..., E_n^2)$) la partition de $E$ telle que $\forall i \leq k, E_i^1$ (resp. $\forall j \leq n, E_j^2$) est l'ensemble des arêtes dont une des extrémités est $x_i^1$ (resp. $x_j^2$).

Posons $M_1 = \mathcal{M}((E, (E_1^1, ..., E_k^1)))$ et $M_2 = \mathcal{M}((E, (E_1^2, ..., E_n^2)))$.

D'après la proposition 3.3.1, $M_1$ et $M_2$ sont des matroïdes. Par définition les indépendants communs à $M_1$ et $M_2$ sont les couplages de $G$.
Donc $\alpha = max\{|I| \mid I \in \mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2\}$.

Soient $A_1, A_2 \subseteq E$, $r_i(A_i)$ est égal au nombre de sommets de $X_i$ incidents aux arêtes de $A_i$. Par conséquent, si $A_1 \cup A_2 = E$, alors $G$ possède une couverture par sommets de taille $r_1(A_1) + r_2(A_2)$ (en prenant les sommets de $X_1$ incidents aux arêtes de $A_1$ et les sommets de $X_2$ incidents aux arêtes de $A_2$).
De plus, si $T_1 \cup T_2$ (avec $T_i \subseteq X_i$) est une couverture par sommets de $G$, alors en prenant $A_i$ l'ensemble des arêtes incidentes à $T_i$, on obtient $A_1 \cup A_2 = E$ et $r_1(A_1) + r_2(A_2) = |T_1| + |T_2|$.
Donc $\beta = \min\limits_{A_1 \cup A_2 = E} \{r_1(A_1) + r_2(A_2)\}$.

Or par le corollaire 2.0.8 du Théorème 2.0.7 d'intersection de matroïdes,
$max\{|I| \mid I \in \mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2\} = \min\limits_{A_1 \cup A_2 = E} \{r_1(A_1) + r_2(A_2)\}$.
Donc $\alpha = \beta$. $\square$

Comme nous venons de le voir le Théorème d'intersection des matroïdes de Edmond permet facilement d'obtenir le théorème min-max de König-Egervary. Cependant il y a d'autres résultats qui peuvent s'obtenir à partir de ce théorème comme par exemple le cas particulier du théorème de Gallai-Milgram pour les graphes orientés acycliques.