Graphes planaires

Classes de graphes & Décompositions

Détails des démonstrations dans les livres suivants :
[West] Introduction to Graph Theory, D. West
[Diestel] Graph Theory, R. Diestel

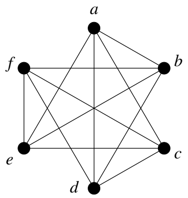
2010-2011

Graphes planaires : définition

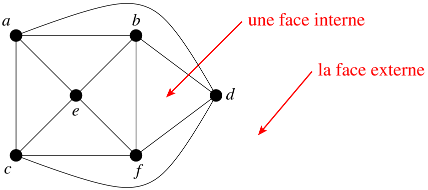
Définition

Un graphe / multigraphe non orienté est dit planaire *s'il peut être dessiné dans le plan avec des points pour les sommets et des courbes pour les arêtes tel que ces courbes ne se coupent jamais.*

Carte d'un (multi)graphe planaire : dessin sans croisements, il existe une infinité de cartes, aussi appelées plongements planaires.
Multigraphes : arêtes multiples et boucles autorisées, parfois pratique (applications, récurrences).
Morphologie d'une carte : sommets, arêtes, faces.



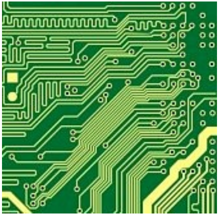
Un graphe

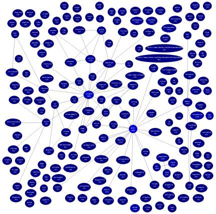


Une carte

Dessins de graphes : une problématique intervenant dans

- Interfaces visuelles : génie logiciel, bases de données, fouille de données, web design, cartographie ...
- Conception de circuits intégrés (VLSI), de circuits imprimés (PCB).
- Conception de plans d'architecte ...





La géométrie / topologie du plan ...

⚠ **Raisonner dans le plan** : très intuitif, mais preuves rigoureuses parfois difficiles → avoir un bon jeu de lemmes géométriques / topologiques pour éviter de perdre du temps là-dessus.

Courbes pour dessiner les arêtes : **simples** (ne se recoupe pas), mais aussi continues ? C^1 par morceaux ? polygonales (nb fini de segments) ? droites (un segment) ?

Face d'une carte : sous-ensemble maximal, connexe par arcs, du plan privé des points et courbes de la carte. Face définie (à une déformation près) par la liste des sommets sur sa frontière (p.ex. dans l'ordre trigonométrique).

La géométrie / topologie du plan ...

⚠ **Raisonner dans le plan** : très intuitif, mais preuves rigoureuses parfois difficiles → avoir un bon jeu de lemmes géométriques / topologiques pour éviter de perdre du temps là-dessus.

Courbes pour dessiner les arêtes : **simples** (ne se recoupe pas), mais aussi continues ? C^1 par morceaux ? polygonales (nb fini de segments) ? droites (un segment) ?

Face d'une carte : sous-ensemble maximal, connexe par arcs, du plan privé des points et courbes de la carte. Face définie (à une déformation près) par la liste des sommets sur sa frontière (p.ex. dans l'ordre trigonométrique).

La géométrie / topologie du plan ...

Théorème (Jordan 1887 - ici en version polygonale)

Toute courbe polygonale simple C partitionne le plan en exactement deux faces, qui ont chacune C comme frontière.

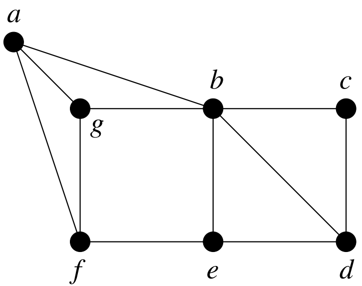
Corollaire

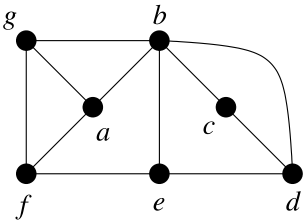
Soient C_1, C_2, C_3 trois courbes simples avec les mêmes extrémités, mais disjointes ailleurs. Alors :

- $\mathbb{R}^2 \setminus C_1 \cup C_2 \cup C_3$ *a exactement trois faces de frontières* $C_1 \cup C_2$, $C_2 \cup C_3$, $C_3 \cup C_1$.
- *Toute courbe simple de* $\overset{o}{C}_1$ *à* $\overset{o}{C}_3$ *passant dans la face contenant* $\overset{o}{C}_2$ *coupe* $\overset{o}{C}_2$.

Jolie preuve du théorème de Jordan version polygonale dans [West].

Plusieurs cartes pour un graphe planaire





Deux cartes d'un graphe, avec des faces differentes

Plusieurs cartes pour un graphe planaire

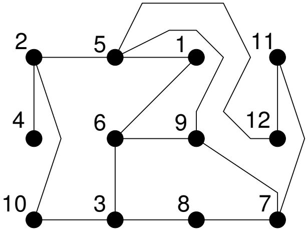
Théorème

Un graphe/multigraphe admet une carte dans le plan si et seulement s'il admet une carte sur la sphère.

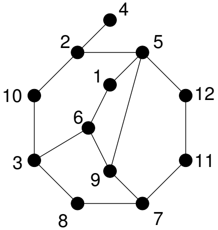
Corollaire

Toute carte d'un graphe planaire peut être redessinée en conservant toutes les faces, tout en imposant celle qui est extérieure.

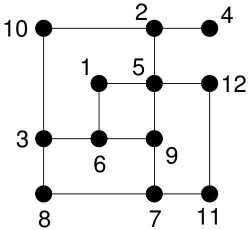
Plusieurs cartes pour un graphe planaire



courbe polygonale
Toujours possible ?

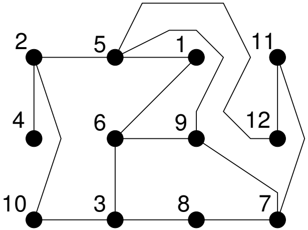


segment
Toujours possible ?



horizontal / vertical
Toujours possible ?

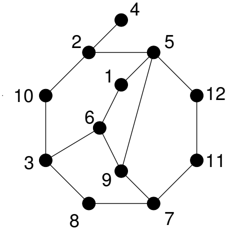
Plusieurs cartes pour un graphe planaire



courbe polygonale

Toujours possible ?

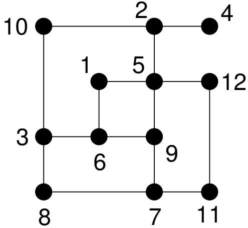
OUI



segment

Toujours possible ?

OUI



horizontal / vertical

Toujours possible ?

NON

Formule d'Euler

Théorème (Euler 1758)

Etant donnée une carte d'un graphe/multigraphe planaire connexe ayant n sommets, e arêtes, f faces. Alors $n - e + f = 2$.

Preuve : par récurrence sur n.

- $n = 1$: "bouquet" de boucles, nb de faces = nb d'arêtes grâce au théorème de Jordan.
- $n \Rightarrow n + 1$: contracter une arête qui n'est pas une boucle.

Corollaire

Toutes les cartes d'un même graphe/multigraphe planaire ont le même nombre de faces.

Corollaire

Si $G=(V,E)$ *graphe planaire (sans boucle ni arêtes multiples), alors* $|E| \leq 3|V|-6$. *Quand, de plus,* G *ne contient pas de triangle, alors* $|E| \leq 2|V|-4$.

Corollaire

Toutes les cartes d'un même graphe/multigraphe planaire ont le même nombre de faces.

Corollaire

Si $G = (V, E)$ graphe planaire (sans boucle ni arêtes multiples), alors $|E| \leq 3|V| - 6$. Quand, de plus, G ne contient pas de triangle, alors $|E| \leq 2|V| - 4$.

Preuve par "double comptage" : n sommets, e arêtes, f faces,

- $2e = \sum_{1 \leq i \leq f} |face_i| \geq 3f$ et $n - e + f = 2$.
- $2e = \sum_{1 \leq i \leq f} |face_i| \geq 4f$ et $n - e + f = 2$.

Formule d'Euler : applications

Corollaire

Toutes les cartes d'un même graphe/multigraphe planaire ont le même nombre de faces.

Corollaire

Si $G = (V, E)$ *graphe planaire (sans boucle ni arêtes multiples), alors* $|E| \leq 3|V| - 6$. *Quand, de plus,* G *ne contient pas de triangle, alors* $|E| \leq 2|V| - 4$.

Corollaire

Ni K_5, *ni* $K_{3,3}$ *ne sont des graphes planaires.*

Corollaire

Toutes les cartes d'un même graphe/multigraphe planaire ont le même nombre de faces.

Corollaire

Si $G = (V,E)$ *graphe planaire (sans boucle ni arêtes multiples), alors* $|E| \leq 3|V| - 6$. *Quand, de plus,* G *ne contient pas de triangle, alors* $|E| \leq 2|V| - 4$.

Corollaire

Ni K_5, *ni* $K_{3,3}$ *ne sont des graphes planaires.*

Preuve : avec le corollaire précédent, ou bien preuve dessinatoire où on part du dessin d'un cycle et on regarde si les arêtes suivantes doivent s'ajouter à l'intérieur ou à l'extérieur du cycle (cf [West]).

Caractérisation par mineurs exclus

Théorème (Kuratowski 1930 - version mineurs)

Un graphe est planaire si et seulement si il ne contient aucun mineur isomorphe à K_5 ou $K_{3,3}$.

Preuve ([Diestel]) :

- le cas 3-connexe,
- le cas 2-connexe,
- le cas 1-connexe ...

Caractérisation par mineurs exclus

Théorème (Kuratowski 1930 - version mineurs)

Un graphe est planaire si et seulement si il ne contient aucun mineur isomorphe à K_5 ou $K_{3,3}$.

Preuve ([Diestel]) :

- le cas 3-connexe,
- le cas 2-connexe,
- le cas 1-connexe ...

Théorème (Robertson,Seymour 2004)

Toute classe de graphe, close par mineur, est caractérisée par une famille finie de mineurs interdits.

Preuve : le cas 3-connexe.

Lemme (Thomassen 1980 - cf [West])

Tout graphe 3-connexe avec au moins 5 sommets admet une arête telle que, après sa contraction, le nouveau graphe reste 3-connexe.

Lemme (cf [Diestel])

Dans toute carte d'un graphe planaire 2-connexe, chaque face admet comme frontière un cycle.

- Utiliser le premier lemme pour raisonner par récurrence sur le nb de sommets.

Théorème (folklore)

Tout graphe planaire $G = (V, E)$ est 6-coloriable.

Lemme

Tout graphe planaire $G = (V, E)$ admet un sommet de degré inférieur ou égal à 5.

- Preuve du lemme avec $|E| \leq 3|V| - 6$ et $2|E| = \sum_{v \in V} deg(v)$.
- Preuve du théorème par récurrence sur $|V|$ en utilisant le lemme.

Théorème des 5 couleurs

Théorème (Heawood 1890)

Tout graphe planaire $G = (V, E)$ est 5-coloriable.

Lemme

Tout graphe planaire $G = (V, E)$ admet un sommet de degré inférieur ou égal à 5.

Théorème des 5 couleurs

Théorème (Heawood 1890)

Tout graphe planaire $G = (V, E)$ est 5-coloriable.

Preuve du théorème : par récurrence sur nb de sommets n.

- $n \leq 5$: ok !

Théorème des 5 couleurs

Théorème (Heawood 1890)

Tout graphe planaire $G = (V, E)$ est 5-coloriable.

Preuve du théorème : par récurrence sur nb de sommets n.

- $n \leq 5$: ok !
- $n > 5$: soit $v \in V$, $deg(v) \leq 5$, colorer $G \setminus v$ puis
  - si ≤ 5 couleurs dans le voisinage de v, ok !
  - sinon 5 voisins $v_1, ..., v_5$ avec couleurs 1,2,3,4,5 dans l'ordre trigo.
  - soit $G_{i,j}$ sous-graphe induit par sommets de couleurs i et j,
  - si v_i et v_j dans deux comp. connexes différentes de $G_{i,j}$, inverser les couleurs i et j dans l'une d'elle, ok !
  - sinon considérer $G_{1,3}$ et $G_{2,4}$, contradiction !

Théorème (Appel,Haken 1976)

Tout graphe planaire $G = (V, E)$ est 4-coloriable.

Historique :

- 1852 : conjecturé par Guthrie.
- 1879 : démonstration de Kempe, mais erronée (Heawood 1890).
- 1880 : démonstration de Tait, mais erronée (Petersen 1891).
- 1976 : démonstration de Appel et Haken, assistée par ordinateur (1476 cas critiques, 1200 heures de calcul).
- 1997 : démonstration de Robertson, Sanders, Seymour, Thomas, toujours assistée par ordinateur (633 cas).
- 2005 : démonstration formalisée en Coq par Gonthier et Werner.

Ce dont on aurait pu parler ...

▷ Algorithmes de reconnaissance / de dessin des graphes planaires (Lucie).

▷ Notion de graphe dual (pour une carte donnée) : sommets = faces, adjacence = faces adjacentes par au moins une arête.
▷ Notion de triangulation (pour une carte donnée) : ajout d'arêtes pour avoir une carte où toutes les faces sont des triangles.