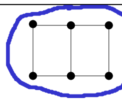
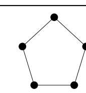
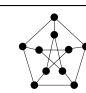
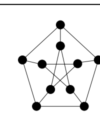
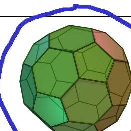
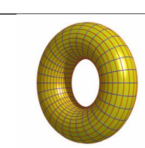
Votre identifiant : .... 5 janvier 2010

Examen de graphes - 2 heures

Notations : dans les exercices suivants, le mot *complexité* désignera la complexité en temps dans le pire des cas. Pour un graphe, on notera n son nombre de sommets et m son nombre d'arêtes (cas non orienté) ou d'arcs (cas orienté). Sauf indication contraire, les graphes sont par défaut sans boucle et sans multi-arêtes ou -arcs. Pour les questions algorithmiques, on suppose que les graphes sont donnés par leurs listes d'adjacence. Les notes et documents de cours sont autorisés.

Exercice 1 - QCM (6 pts)

Mode d'emploi : Pour chacune des questions, entourer la (ou les) réponse(s) justes (il peut éventuellement y en avoir plusieurs ou aucune de juste).

	QUESTION	**REPONSE**
1	Existe-t-il un graphe non orienté dont la liste des degrés des sommets est 4,2,2,2 ?	OUI NON
2	Même question si la liste des degrés est 3,3,2,1	OUI NON
3	Même question si la liste des degrés est 3,2,2,1	OUI NON
4	Quelle est la complexité du problème consistant à enlever le minimum d'arêtes à un graphe non orienté pour qu'il devienne acyclique ?	P NP-dur
5	Un graphe G est parfait si pour tout sous-graphe induit H, $\chi(H) = \omega(H)$, où $\chi(H)$ (resp. $\omega(H)$) est le nombre chromatique (resp. le cardinal max d'une clique) de H. Quels sont les graphes parfaits ?	  
6	Considérer la classe des *graphes d'intersection de rectangles* : les sommets sont des rectangles du plan et deux sommets sont adjacents si et seulement si l'intersection de leurs rectangles est non vide. Est-ce que cette classe est incluse dans la classe des graphes parfaits ?	OUI NON
7	La proposition suivante est-elle vraie : *tout classe de graphes stable par mineur peut aussi être caractérisée par une famille finie de mineurs interdits* ?	OUI NON
8	Quelle est la meilleure complexité avec laquelle on sait reconnaître les graphes qui n'admettent pas $K_{1,3}$ comme mineur ?	$\mathcal{O}(n)$ $\mathcal{O}(n^2)$ $\mathcal{O}(n^3)$ NP-dur
9	La proposition suivante est-elle vraie : *toute classe caractérisée par une famille infinie de mineurs interdits peut aussi être caractérisée par une famille finie de mineurs interdits* ?	OUI NON
10	Lesquels de ces graphes sont planaires ?	  
11	Soient A et B deux modules quelconques d'un graphe G. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont toujours des modules ?	$A \cup B$ $A \cap B$ $A \setminus B$
12	Même question si A et B sont des modules tels que $A \cap B \neq \emptyset$.	$A \cup B$ $A \cap B$ $A \setminus B$

Exercice 2 - Calcul de ω pour des classes particulières (5 pts)

$\boxed{\mathbf{1}}$ - Pour un graphe G, quelle est la complexité connue pour calculer le cardinal maximum d'une clique de G : polynomiale ou NP-dure ? (question culturelle, pas besoin de justifier votre réponse)

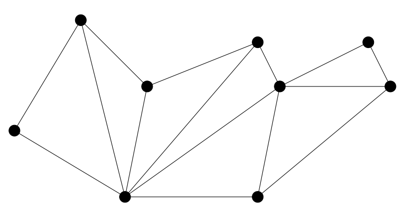
$\boxed{\mathbf{2}}$ - Ayant en entrée un cographe G et un arbre de décomposition modulaire de G, donner un algorithme polynomial aussi efficace que possible pour calculer le cardinal maximum d'une clique de G. Analyser la complexité de votre algorithme en fonction de n et m.

$\boxed{\mathbf{3}}$ - Ayant en entrée un graphe chordal G et une séquence d'élimination simpliciale de G, donner un algorithme polynomial aussi efficace que possible pour calculer le cardinal maximum d'une clique de G. Analyser la complexité de votre algorithme en fonction de n et m.

$\boxed{\mathbf{4}}$ - Ayant en entrée un graphe G tel que $tw(G) \leq 5$ et une décomposition arborescente de G de largeur au plus 5, donner un algorithme polynomial aussi efficace que possible pour calculer le cardinal maximum d'une clique de G. Analyser la complexité de votre algorithme en fonction de n et m.

Exercice 3 - La gallerie d'art (4 pts)

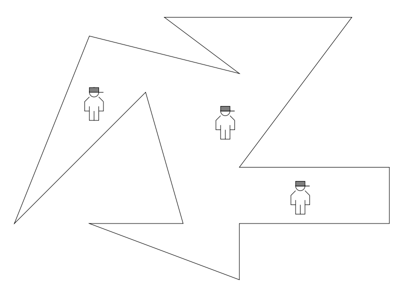
Un graphe planaire est dit *outerplanar* si l'une de ses représentations planaires est telle que tous ses sommets sont sur la face externe (voir l'exemple ci-dessous).



$\boxed{\mathbf{1}}$ - Montrer que tout graphe outerplanar est 3-colorable.

$\boxed{\mathbf{2}}$ - Montrer le Théorème de la Galerie d'Art (1975) : étant donnée une galerie d'art dont les murs forment un polygone simple à n côtés, alors il est possible de placer $\lfloor n/3 \rfloor$ gardiens tels que tout point dans la galerie soit visible par au moins un des gardiens.

Suggestion : vous avez le droit d'utiliser autant que vous voulez le lemme géométrique qui assure que tout polygone simple admet deux sommets que l'on peut relier par un segment qui reste à l'intérieur du polygone.



Exercice 4 - Lex-BFS pour les graphes chordaux (5 pts)

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Au cours de l'exécution d'un parcours Lex-BFS, un ensemble de sommets $U \subseteq V$ est dit *touché* s'il existe au moins un sommet $u \in U$ qui a été numéroté par l'algorithme. L'ensemble U est dit *saturé* si tout ses sommets ont été numérotés.

Soit e une arête d'un arbre T, on note T_1^e et T_2^e les deux composantes connexes du graphe $T \setminus e$ résultant de la suppression de e dans T.

Soit T un arbre de cliques d'un graphe chordal G, et T' un sous-arbre de T. Les sommets x de G tels que le sous-arbre T_x de T induit par les cliques maximales contenant x vérifie $T_x \subseteq T'$, sont appelés *sommets propres à T'*. Au cours d'une exécution de Lex-BFS, on dira que T' est *vierge* si aucun de ses sommets propres n'a encore été numéroté.

$\boxed{\mathbf{1}}$ - Montrer que pour toute arête e d'un arbre de cliques T d'un graphe chordal G, T_1^e et T_2^e contiennent tous les deux au moins un sommet propre.

$\boxed{\mathbf{2}}$ - Au cours d'une exécution de Lex-BFS sur G, montrer que quand un séparateur S de G est touché pour la première fois, alors pour toute arête e de T étiquetée par S, un et un seul des deux sous-arbres T_1^e et T_2^e est vierge.

$\boxed{\mathbf{3}}$ - Soit e une arête de T étiquetée par un séparateur S. Soit T_i^e le sous-arbre qui est vierge quand S est touché pour la première fois. Montrer que Lex-BFS numérote alors tous les sommets de S avant d'avoir numéroté un sommet de T_i^e.

$\boxed{\mathbf{4}}$ - Montrer que si G est chordal, connexe et n'a pas de sommet universel, alors Lex-BFS termine toujours sur un sommet simplicial.

Suggestion : vous pouvez montrer que quand Lex-BFS a saturé tous les séparateurs, il reste encore des sommets non numérotés. Utiliser le fait que à chaque étape de l'algorithme, le graphe induit par les sommets numérotés est connexe.

$\boxed{\mathbf{5}}$ - Déduire de la question précédente que pour tout graphe chordal, Lex-BFS fournit une numérotation qui est l'ordre inverse d'une séquence d'élimination simpliciale.