Quelques grands théorèmes

Théorème des quatre couleurs par Appel et Haken (1976), ex-conjecture de Guthrie (1852).

Il est possible, avec seulement quatre couleurs, de colorier n'importe quelle carte géographique de telle façon que deux pays ayant une frontière commune ne soient jamais de la même couleur.

Preuve de Appel et Haken se ramenant à l'étude de 1478 configurations, traitées ensuite par 1200 heures de calcul sur ordinateur. Nombre de configurations réduit à 633 par Robertson, Sanders, Seymour et Thomas (1995). Démonstration certifiée en COQ *par Gonthier (2005).*

Théorème fort des graphes parfaits par Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas (2002), ex-conjecture de Berge (1966).

Un graphe G est parfait si et seulement si ni G, ni $\overline{G}$ son complémentaire ne contiennent de cycles impairs de taille supérieure ou égale à 5 comme sous-graphe induit.

Article de 148 pages, basé sur de nombreux résultats antérieurs concernant la classe des graphes parfaits. Dans la foulée, Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour et Vuskovi ont donné un algorithme polynomial de reconnaissance des graphes parfaits.

Théorème des mineurs par Robertson et Seymour (2004), ex-conjecture de Wagner (1960s).

Toute classe de graphe, close par mineur, est caractérisée par une famille finie de mineurs interdits (et est ainsi reconnaissable en temps $\mathcal{O}(n^3)$ où n est le nombre de sommets du graphe).

Série de 20 articles, représentant plus de 600 pages, Graph Minors I à XX*, écrits de 1983 à 2004.*

Théorème du chemin-qui-atteint-toujours-son-but (Road-coloring Theorem). par Trahtman (2007), ex-conjecture de Adler, Goodwyn, Weiss (1970).

Soit C un ensemble de Δ couleurs et G un graphe orienté dont tous les sommets ont un degré sortant Δ. Une coloration des arcs où les Δ arcs sortants de chaque sommet sont colorés avec les Δ différentes couleurs de C, est dite *synchronisante* si pour tout sommet v, il existe une suite finie de couleurs de C telle que, en partant de tout sommet du graphe et en suivant les arcs donnés par la suite de couleurs, le chemin se termine toujours sur v. Un graphe est dit *apériodique* si le PGCD de ces circuits vaut 1.

Si G est fortement connexe et apériodique, alors il existe une coloration synchronisante.

La démonstration tient dans un article utilisant les travaux de Kari et Friedman, le tout représentant seulement une dizaine de pages.

Quelques conjectures

Conjecture de Hadwiger (1943).

Pour tout entier $r > 0$ et tout graphe G, si G ne contient pas K_r comme mineur (clique à r sommets), alors G est $(r-1)$-colorable.

Conjecture du second voisinage de Seymour.

Dans tout graphe orienté, sans circuit de taille inférieure ou égale à 2, il existe un sommet qui a au moins autant de sommets à distance 2 qu'à distance 1.

Conjecture de Erdos-Gyárfás (1995) *100 $ la démonstration, 50 $ le contre-exemple.*

Tout graphe de degré minimum supérieur ou égal à 3, contient un cycle dont la taille est une puissance de 2.

Conjecture de Kelly et Ulam (1942).

Tout graphe avec n sommets, $n \geq 3$, peut être reconstruit à partir de la donnée de ses n sous-graphes obtenus en enlevant juste un sommet.

Plus formellement, soient $G = (V_G, E_G)$ et $H = (V_H, E_H)$ deux graphes finis avec au moins 3 sommets, et soit σ une bijection $V_G \to V_H$ entre les ensembles de sommets telle que pour tout $v \in V_G$, le sous-graphe G privé de v est isomorphe à H privé de $\sigma(v)$, alors G et H sont isomorphes.

Complexité de l'isomorphisme de graphes.

Etant donnés deux graphes G_1 et G_2, est-ce que l'on peut déterminer en temps polynomial s'ils sont isomorphes ?

Méta-conjecture de complexité (pas uniquement valable pour les graphes).

Pour tout problème de graphes intéressant, s'il existe un algorithme polynomial pour le résoudre, alors il existe sûrement un algorithme de complexité linéaire (en temps et espace) pour le résoudre.

Ouvert la plupart du temps. Prouver un résultat contraire suppose des raisonnements de bornes inférieures de complexité. Difficile ...

Des sélections de conjectures !

- Les plus belles selon A. Bondy :
  `http://www.ecp6.jussieu.fr/pageperso/bondy/problems/beautiful.pdf`

- La collection de D. West :
  `http://www.math.uiuc.edu/~west/openp/`