Petite introduction à la théorie des jeux

Thierry CACHAT, LSV ENS-Cachan

Plan :

- jeux de Nim
- stratégies, détermination, vérification
- pierre-ciseau-papier
- dilemme du prisonnier
- jeux temporisés

http://www.lsv.ens-cachan.fr/~cachat/

Résumé

À partir de quelques exemples simples de jeux connus (Nim, dilemme du prisonnier, pierre-ciseaux-papier, ...) nous présenterons les définitions et les résultats fondamentaux de la théorie des jeux. On se demandera en particulier sous quelle forme exprimer les stratégies, et si un joueur a une stratégie gagnante "à coup sûr" (propriété de détermination). On observera pour chaque jeux s'il est :
- à tour de rôle
- à information complète
- sans hasard
- à somme nulle
- ...

On exposera les applications récentes à la vérification de systèmes réactifs et à la synthèse de contrôleur, pour lesquelles il reste des problèmes algorithmiques ouvert importants.

Variante de Nim

2 joueurs, Alain (A) et Brigitte (B)

42 jetons sur la table :
●●

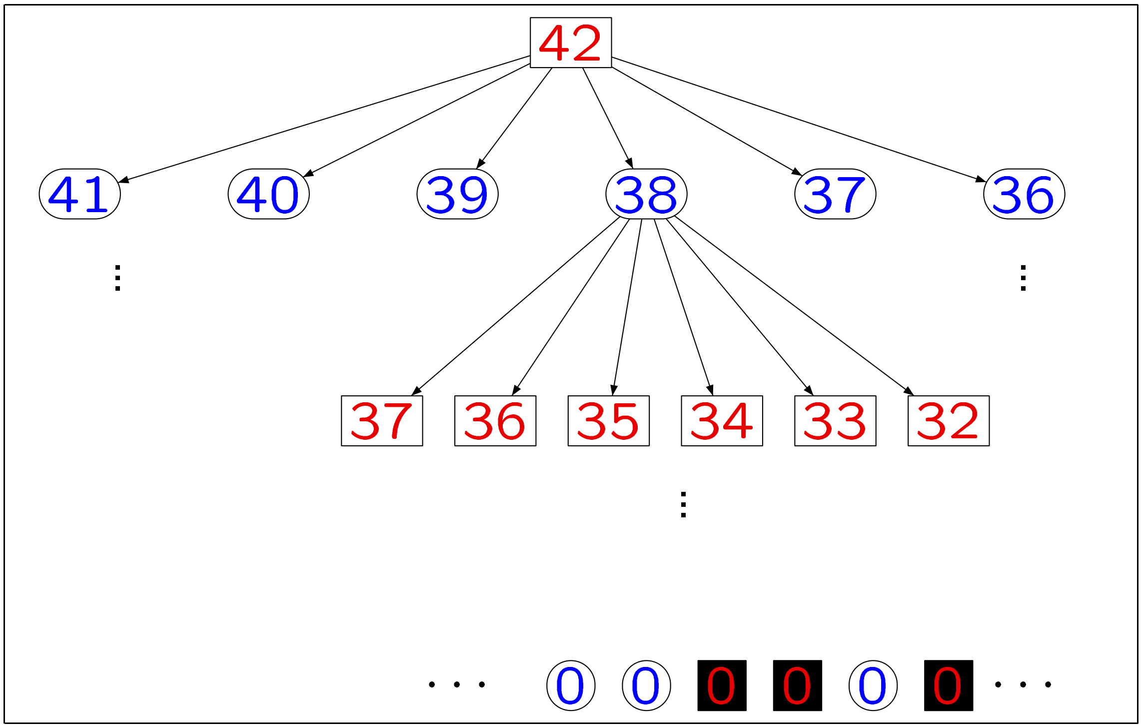
À tour de rôle, Alain et Brigitte enlèvent 1 à 6 jetons
Alain commence

Celui qui prend le dernier a gagné

Formalisation

Arbre des parties
représentation extensive

Alain $\boxed{x}$
Brigitte ⓨ



Arène : graphe orienté (V, E), $E \subseteq V \times V$

$V = V_0 \uplus V_1$

Depuis un sommet v :

si $v \in V_0$, i.e. ○, Joueur 0 choisit v', vEv'

si $v \in V_1$, i.e. □, Joueur 1 choisit v', vEv'

partie $\pi = \pi_0\pi_1 \cdots \pi_n \in V^*$, $\quad \forall i \; \pi_i E \pi_{i+1}$

partie gagnée pour le Joueur 0 $\Leftrightarrow$ $\pi_n =$ 0

Solution du jeu (joueur 0)

F l'ensemble des positions à atteindre : 0

Le joueur 0 gagne a coup sûr depuis les positions de l'Attracteur de F :

$$Attr(F) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Attr^i$$
$$Attr^0 = F,$$
$$\begin{aligned} Attr^{i+1} = Attr^i & \\ & \cup \left\{ v \in V_0 \mid \exists\, u,\ v \hookrightarrow u,\ u \in Attr^i \right\} \\ & \cup \left\{ v \in V_1 \mid \forall\, u,\ v \hookrightarrow u \Rightarrow u \in Attr^i \right\}. \end{aligned}$$

Stratégie gagnante associée, positionnelle, depuis une position $v \in V_0 \cap Attr(F)$:
- chercher le i minimum tel que $v \in Attr^{i+1}$
- jouer vers $Attr^i$

Stratégie gagnante pour le joueur 1, positionnelle, depuis une position $v \in V_1 \backslash Attr(F)$:
- rester en dehors de $Attr(F)$

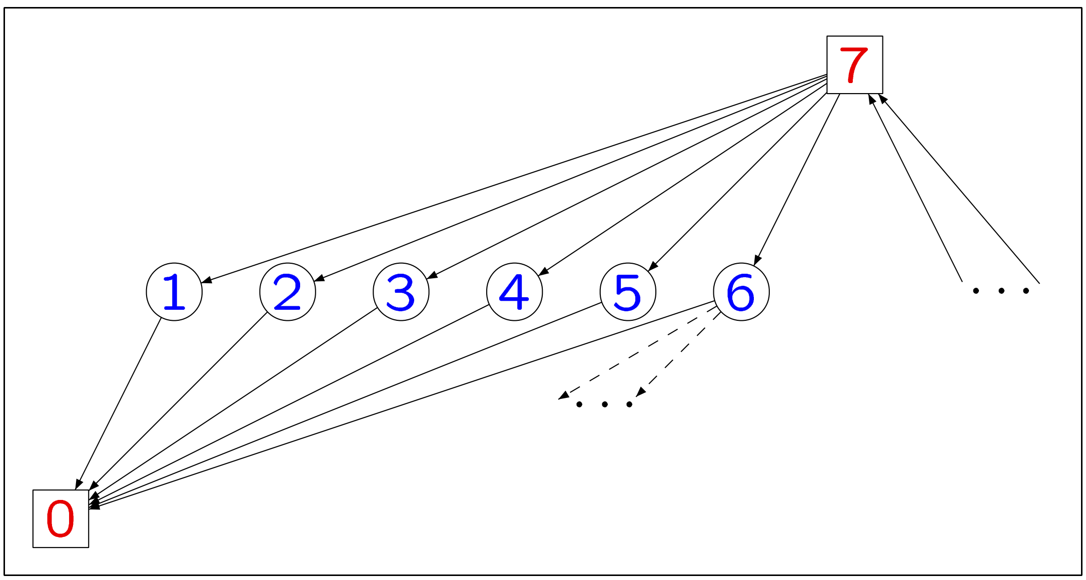
$\Longrightarrow$ Région gagnante du Joueur 0 $= Attr(F)$

informer l'autre joueur de notre stratégie

Jeux d'échecs, de dame, de Go, ... autres jeux ?

Brigitte gagne

Sommets d'Alain : $\boxed{x}$ Sommets de Brigitte : y



Brigitte gagne depuis $7\mathbb{N}$ (Alain commence)

Extensions

Graphes cycliques, graphes infinis
(V, E), $E \subseteq V \times V$, $V = V_0 \uplus V_1$

partie $\pi = \pi_0\pi_1 \cdots \in V^\omega$, $\forall i \; \pi_i E \pi_{i+1}$
partie gagnée pour le Joueur 0 $\Leftrightarrow \pi \in L \subseteq V^\omega$

Conditions de gain :
Accessibilité : étant donné $F \subseteq V$,

$$L = \{\pi \mid \exists i,\; \pi_i \in F\}$$

$\neq$ sûreté rester dans $V \backslash F$

Récurrence (Büchi) : $L = \{\pi \mid \exists^\infty i,\; \pi_i \in F\}$

Parité : étant donné $c : V \longrightarrow \{0, \cdots, n\}$

$$L = \{\pi \mid \min(Inf(c(\pi))) \text{ est pair }\}$$

Applications

Systèmes réactifs :

$$\begin{aligned} \text{Contrôleur} &= \text{Joueur 0} \\ \text{Environnement} &= \text{Joueur 1} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Vérification, synthèse de contrôleurs

$$\left.\begin{array}{l} \text{Système fini } S \\ \text{formule } \phi \text{ du } \mu\text{-calcul} \end{array}\right\} \longmapsto \text{jeu de parité} \qquad \text{(pol.)}$$

$$S \models \phi \qquad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Joueur 0 a une} \\ \text{stratégie gagnante} \end{array}\right.$$

[EmersonJ 91], [EmersonJS 93]

déterminer le gagnant *d'un jeu* de parité est NP∩co-NP [Jurdziński 00].

Problèmes algorithmiques

Depuis quelles positions le Joueur 0 peut-il gagner “à coup sûr”?

Comment ?

Stratégie pour le Joueur 0

$$\text{fonction (partielle) } f_0 : \begin{array}{ccc} V^*V_0 & \longrightarrow & V \\ \pi_0 \cdots \pi_n & \longmapsto & \pi_{n+1} \end{array}$$

stratégie gagnante depuis une position : toutes les parties jouées conformément à la stratégie sont gagnantes pour le Joueur 0.
Cas particulier stratégie de position

$$f_0 : V_0 \longrightarrow V$$

Algorithmes connus pour les graphes finis et les conditions de gain *simples*.
Graphes infinis ...

[LNCS 2500]

Détermination

Les jeux
- à deux joueurs,
- à information complète,
- à tour de rôle,
- sans hasard,
- avec une condition de gain borélienne

sont déterminés : depuis une position donnée, un des deux joueurs a une stratégie gagnante. [Martin 75]

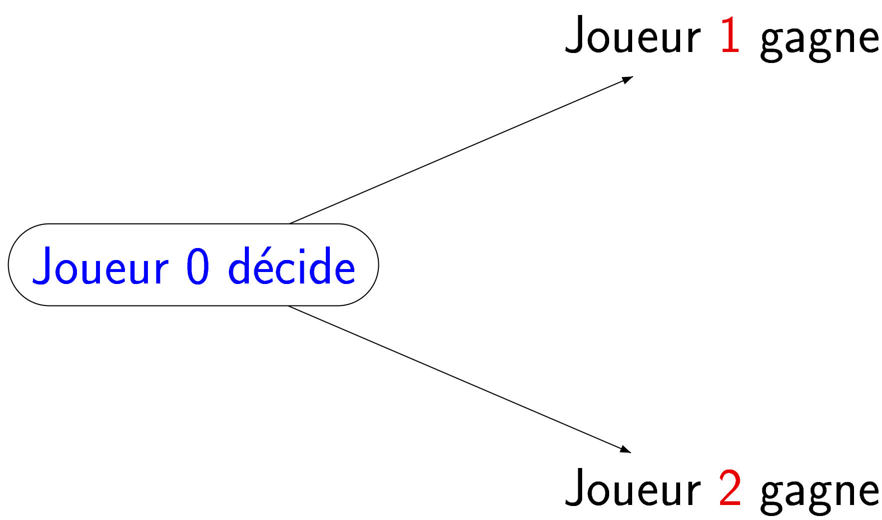
Effectivité ?

Canoniquement les deux joueurs choisissent à tour de rôle un bit $\rightsquigarrow$ chemin dans l'arbre binaire complet. Ensembles boréliens.

Ces hypothèses sont nécessaires...

cf condition non borélienne

3 joueurs



$\rightsquigarrow$ Pas de stratégie gagnante

Jeux de cartes

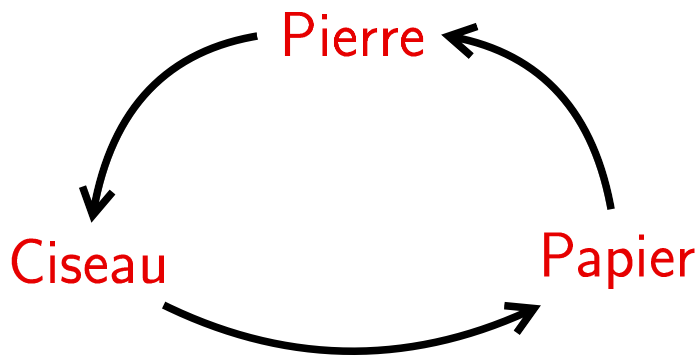
(belote, tarot, ...)

hasard ?

information incomplète

$\rightsquigarrow$ Pas de stratégie gagnante
probabilités ?

Ne pas informer les autres joueurs



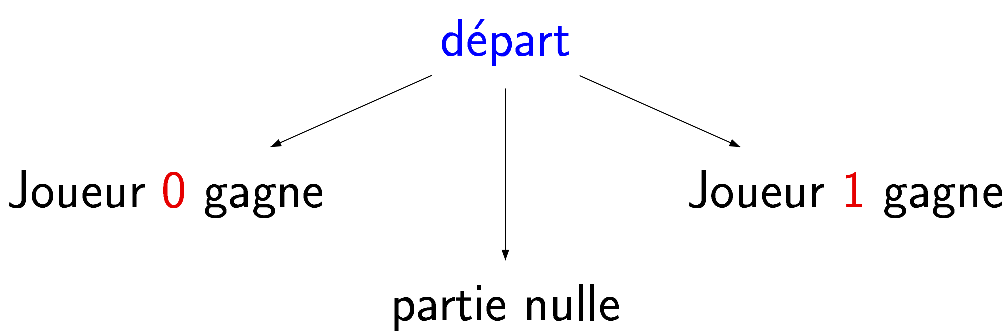
Sans hasard

information complète ?

jouent simultanément (jeu concurrent)

Pas de stratégie gagnante
⇝ stratégie probabiliste...

informer l'autre joueur ?



Jeux simultanés (concurrents)

[JurdzińskiKH 02]

« graphe » : Sommets V, transition δ
Actions A_0 et A_1 du joueur 0 et du joueur 1
Transition $\delta : V \times A_0 \times A_1 \longrightarrow V$ (probabiliste)
condition de gain : Büchi / co-Büchi

Stratégies probabilistes.
Détermination faible : joueur 0 gagne avec proba 1, ou joueur 1 gagne avec proba > 0

Réduction à un jeu de parité « à tour de rôle »

Dilemme du prisonnier

jeu simultané

Jeu coopératif, somme non nulle

$I \backslash II$	coopérer	dénoncer
coopérer	2 / 2	0 / 3
dénoncer	3 / 0	1 / 1

Répétition $\rightsquigarrow$ Équilibre de Nash

$I \backslash II$	coopérer	dénoncer
coopérer	2 / 2	0 / 1
dénoncer	1 / 0	1 / 1

[TurocyS 02]

Jeux temporisés

[AlfaroFHMS 03]

Graphe : automate temporisé

Simultanément chaque joueur choisit une durée et une action : (Δ_0, a_0), (Δ_1, a_1)

- si $\Delta_0 < \Delta_1$, action (Δ_0, a_0),
- si $\Delta_0 > \Delta_1$, action (Δ_1, a_1),
- si $\Delta_0 = \Delta_1$, non déterminisme.

Condition de gain Φ : parité (ω-régulier)

Interdire les comportements « Zenon » :

$$(\Phi \cap td) \cup (Blameless_i \backslash td)$$

Exemples

Extensions

Optimiser un coût / une récompense

Gagner plus vite

jeux distribués

...

Références

AlfaroFHMS 03 Luca de Alfaro, Marco Faella, Thomas A. Henzinger, Rupak Majumdar, and Marielle Stoelinga *The element of surprise in timed games*, CONCUR'03, LNCS 2761

EmersonJ 91 E. Allen Emerson and Charanjit S. Jutla *Tree automata, mu-calculus and determinacy*, FoCS '91, IEEE Computer Society Press, pp. 368–377, 1991.

EmersonJS 93 E. Allen Emerson, Charanjit S. Jutla, and A. Prasad Sistla, *On model-checking for fragments of μ-calculus*, CAV '93, LNCS 697, pp. 385–396, 1993.

LNCS 2500 Erich Grädel, Wolfgang Thomas and Thomas Wilke eds., *Automata, Logics, and Infinite Games*, A guide to current research, LNCS 2500, 2002.

Jurdziński 00 Marcin Jurdziński, *Small progress measures for solving parity games*, STACS 2000, LNCS 1770, pp. 290–301, 2000.

JurdzińskiKH 02 Marcin Jurdzinski, Orna Kupferman and Thomas A. Henzinger *Trading Probability for Fairness*, CSL'02, LNCS 2471, pp.292–305, 2002.

Martin 75 Donald A. Martin, *Borel Determinacy*, Annals of Mathematics, 102 :363–371, 1975.

TurocyS 02 Theodore L. Turocy and Bernhard von Stengel (2002), Game theory. Encyclopedia of Information Systems, Vol. 2, Elsevier Science (USA), 403-420.