Oral Informatique Fondamentale

Étienne Miquey
etienne.miquey@ens-lyon.fr

Préparation : 20 min
Passage : 40 min

Langages clos par concaténation

Un langage $\mathcal{L}$ sur un alphabet Σ est dit *clos par concaténation* si $\forall u, v \in \mathcal{L}, uv \in \mathcal{L}$ et $\epsilon \in \mathcal{L}$. On dit alors que $x \in L$ est un *générateur* si $x \neq \epsilon$ et $(\exists u, v \in \mathcal{L}, uv = x) \Rightarrow (u = \epsilon \vee v = \epsilon)$, et on note $G(\mathcal{L})$ l'ensemble des générateurs.

1. Soit $\mathcal{L}$ un langage clos par concaténation. Montrer que $\mathcal{L} = G(\mathcal{L})^*$.
2. Donner un exemple de langage $\mathcal{L}$ rationnel et clos par concaténation tel que $G(\mathcal{L})$ soit infini.
3. Un langage $\mathcal{L}$ est dit libre s'il existe un alphabet Σ' non nécessairement fini tel qu'il existe un isomorphisme ϕ pour la concaténation $\phi : \Sigma'^* \to \mathcal{L}$. Montrer que $\mathcal{L}$ est libre si et seulement si $\forall u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m \in G(\mathcal{L}), (u_1 \cdots u_n = v_1 \cdots v_m \Rightarrow (n = m \wedge (\forall i \in [\![1, m]\!], u_i = v_i)))$.
4. Montrer que $\mathcal{L}$ est libre si et seulement si $\forall w \in \Sigma^*, (\exists u, v \in \mathcal{L}, uw, wv \in \mathcal{L} \Rightarrow w \in \mathcal{L})$.