Agrégation ENS Lyon
2008/2009

Anneaux, corps, polynômes et fractions rationnelles (1)

Exercice 1 Soit A un anneau. Montrer les relations $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ et $(-1) \cdot a = a \cdot (-1) = -a$ pour tout $a \in A$.

Exercice 2 Soit A un anneau commutatif. On appelle *idempotent* tout élément $e \in A$ vérifiant $e^2 = e$.

1. On suppose que A possède un idempotent $e \neq 0, 1$. Montrer que $1 - e$ est un idempotent distinct de e.
2. Montrer que les lois de A induisent une structure d'anneau sur l'idéal Ae engendré par e. L'anneau Ae est-il un sous-anneau de A ?
3. Montrer que A est isomorphe à l'anneau produit $Ae \times A(1 - e)$.

Exercice 3 Montrer que tout anneau (commutatif) intègre fini est un corps.

Exercice 4 Soit k un corps et A une k-algèbre associative et unitaire. On suppose que A est (commutative) intègre et de dimension finie sur k. Montrer que A est un corps. Le résultat subsiste-t-il si A est de dimension infinie ?

Exercice 5 Soit k un corps et a, b deux éléments distincts de k. Montrer que l'anneau $k[X]/((X - a)(X - b))$ est isomorphe à $k \times k$ (*Indication* : considérer $P \mapsto (P(a), P(b))$).

Exercice 6 Soit A un anneau commutatif et I, J deux idéaux de A. Montrer que $IJ \subset I \cap J$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte. Montrer que si $I + J = A$ alors $IJ = I \cap J$. Que dire de la réciproque ?

Exercice 7 Soit A un anneau commutatif et X l'ensemble de ses idéaux premiers. Si I est un idéal de A, on pose $V(I) = \{J \in X;\ J \supset I\}$.

1. Que vaut $V(\{0\})$ et $V(A)$?
2. Montrer que $V(I_1 I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$.
3. Montrer que $\{V(I), I \subset A\}$ est l'ensemble des fermés d'une topologie sur X, appelée topologie de Zariski.

4. Soit I un idéal de A. L'ensemble des idéaux premiers de A/I est en bijection naturelle avec $V(I)$ (pourquoi ?). Montrer qu'avec cette identification, la topologie de Zariski sur $V(I)$ est induite par la topologie de Zariski sur X.
5. Montrer que X est connexe si et seulement si les seuls idempotents de A sont 0 et 1 (cf. exercice 2).

Exercice 8

1. Montrer que l'anneau $\mathrm{End}(\mathbf{Z}^n)$ est isomorphe à $\mathrm{M}_n(\mathbf{Z})$.
2. Déterminer la structure du groupe abélien fini $\mathrm{End}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$.

Exercice 9 Soit k un corps. On note (e_1, e_2) la base canonique du k-espace vectoriel $E = k^2$. Soit $\lambda, \mu \in k$. On définit une loi de multiplication k-bilinéaire sur $E = E_{\lambda,\mu}$ par

$$e_1^2 = e_1, \quad e_1e_2 = e_2e_1 = e_2, \quad e_2^2 = \lambda e_1 + \mu e_2.$$

1. Montrer que $E_{\lambda,\mu}$ est une k-algèbre associative, unitaire et commutative.
2. Pour $x \in E_{\lambda,\mu}$ on note $N(x)$ le déterminant de l'endomorphisme $y \mapsto xy$ de E. Montrer que x est inversible dans $E_{\lambda,\mu}$ si et seulement si $N(x) \neq 0$.
3. En déduire que $E_{\lambda,\mu}$ est un corps si et seulement si le polynôme $X^2 + \mu X - \lambda$ n'admet pas de racine dans k.
4. On suppose ici $k = \mathbf{R}$. Montrer que si $E_{\lambda,\mu}$ est un corps alors il est isomorphe à $\mathbf{C}$.
5. En utilisant les questions précédentes, montrer que toute $\mathbf{C}$-algèbre unitaire de dimension 2 est isomorphe à $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ ou à $\mathbf{C}[X]/(X^2)$.
6. Montrer qu'il existe une infinité de $\mathbf{Q}$-algèbres de dimension 2 non isomorphes (*Indication* : considérer les $E_{p,1}$ avec p premier).

Exercice 10 L'algèbre des quaternions $\mathbf{H}$ est la $\mathbf{R}$-algèbre $\mathbf{R}\oplus\mathbf{R}i\oplus\mathbf{R}j\oplus\mathbf{R}k$ munie de la loi d'addition évidente, de la loi de multiplication $\mathbf{R}$-bilinéaire vérifiant $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ et admettant 1 comme élément unité.

1. Soit $u = x + yi + zj + tk \in \mathbf{H}$. Que vaut le déterminant de l'endomorphisme $v \mapsto uv$ de $\mathbf{H}$?
2. En déduire que tout élément non nul de $\mathbf{H}$ est inversible dans $\mathbf{H}$.
3. Trouver les éléments $u \in \mathbf{H}$ vérifiant $u^2 = -1$. En déduire qu'il existe une infinité de morphismes de $\mathbf{R}$-algèbres de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{H}$.