Agrégation ENS Lyon
2008/2009

Anneaux, corps, polynômes et fractions rationnelles (5)

Exercice 1 (Formules de Newton) Soit A un anneau commutatif et $n \geq 2$. Pour tout entier $k \geq 0$, on pose $S_k = \sum_{i=1}^n X_i^k \in A[X_1, \ldots, X_n]$ (avec la convention $S_0 = n$).

1. Exprimer les coefficients de $F = \prod_{i=1}^n (T - X_i) \in A[X_1, \ldots, X_n][T]$ en termes des polynômes symétriques élémentaires.
2. Soit B un anneau commutatif et $P = T^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k T^k \in B[T]$. Pour tout $c \in B$, donner explicitement le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $T - c$.
3. En déduire une expression de $F/(T - X_i)$ en termes des polynômes symétriques élémentaires.
4. En exprimant de deux manières le polynôme dérivé de F par rapport à T, démontrer les relations suivantes
$$S_k + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \Sigma_j S_{k-j} + (-1)^k k \Sigma_k = 0 \qquad (1 \leq k \leq n).$$
5. En évaluant $T^{k-n} F$ en X_i, montrer que
$$S_k + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \Sigma_j S_{k-j} = 0 \qquad (k \geq n).$$
6. On suppose que $A = K$ est un corps de caractéristique 0. Montrer que la K-algèbre des polynômes symétriques de $K[X_1, \ldots, X_n]$ est engendrée par $S_1, \ldots, S_n$.
7. Montrer que $K[X_1, \ldots, X_n]$ est un $K[S_1, \ldots, S_n]$-module libre et en donner une base.

Exercice 2 Soit $P, Q \in K[X]$ avec $\deg P \leq p$ et $\deg Q \leq q$. Montrer les formules suivantes :

(a) $\operatorname{res}_{p,q}(P, Q) = (-1)^{pq} \operatorname{res}_{q,p}(Q, P)$;

(b) $\operatorname{res}_{p,q}(P(X + a), Q(X + a)) = \operatorname{res}_{p,q}(P, Q)$.

Exercice 3 Soit $P = a_p X^p + \cdots + a_1 X + a_0$ et $Q = b_q X^q + \cdots + b_1 X + b_0$ des polynômes de $K[X]$ (on ne fait pas d'hypothèse sur leurs degrés). On note $\widetilde{P} = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k Y^{p-k}$ et $\widetilde{Q} = \sum_{l=0}^{q} b_l X^l Y^{q-l}$ les polynômes homogènes de $K[X, Y]$ respectivement associés à P et à Q. Montrer que $\mathrm{res}_{p,q}(P, Q) = 0$ si et seulement si $\widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}$ ont un zéro commun dans $K^2 - \{0\}$.

Exercice 4 Déterminer l'intersection des coniques affines C et C' :

(a) $C : x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ et $C' : 2x^2 + y^2 - y - 2 = 0$;

(b) $C : 2x^2 + y^2 + 3xy - 2x - y = 0$ et $C' : 3x^2 + 2y^2 + 6xy = 0$.

Exercice 5 Déterminer une équation de la courbe paramétrée $(x(t), y(t)) = (F(t), G(t))$ $(t \in \mathbf{R})$ dans les cas suivants :

(a) $F(t) = (t^2 - 1)/(t^2 + 1)$, $G(t) = 2t/(t^2 + 1)$;

(a) $F(t) = t^2 - 1$, $G(t) = t^3 + t^2$;

(b) $F(t) = t^2 + t + 1$, $G(t) = (t^2 - 1)/(t^2 + 1)$;

(c) $F(t) = (t + t^3)/(1 + t^4)$, $G(t) = (t - t^3)/(1 + t^4)$.

Exercice 6 Soit $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$. À l'aide d'un résultant, déterminer un polynôme unitaire $P \in \mathbf{Z}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$. Quel est le polynôme minimal de α sur $\mathbf{Q}$? Déterminer ses racines dans $\mathbf{C}$.

Exercice 7 Calculer $\mathrm{disc}(X^2 + pX + q)$ et $\mathrm{disc}(X^3 + pX + q)$.

Exercice 8 Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ unitaire de degré d. Notons n le nombre de racines réelles de P. Montrer que $\mathrm{disc}(P) > 0$ entraîne $n \equiv d \pmod 4$, et que $\mathrm{disc}(P) < 0$ entraîne $n \equiv d - 2 \pmod 4$. Comment se traduisent ces résultats pour le polynôme $X^3 + pX + q$?

Exercice 9 Soit $P = X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in K[X]$. Montrer que $\mathrm{disc}(P)$ est un polynôme à coefficients entiers en $a_0, \ldots, a_{p-1}$, et que ce polynôme est de degré total $2p - 2$.

Exercice 10 Soit $P, Q \in K[X]$ deux polynômes unitaires de degrés respectifs p et q. Exprimer $\mathrm{disc}(PQ)$ en fonction de $\mathrm{disc}(P)$, $\mathrm{disc}(Q)$ et $\mathrm{res}_{p,q}(P, Q)$.

Exercice 11 Calculer le discriminant du polynôme cyclotomique $\Phi_{p^\alpha}(X)$, où p est un nombre premier (on pourra commencer par traiter le cas $\alpha = 1$).

Exercice 12 Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes

$$\frac{X^5+1}{X(X^2-1)^2} \text{ dans } \mathbf{Q}(X) ; \frac{1}{X^8+X^4+1} \text{ dans } \mathbf{R}(X) \text{ et } \mathbf{C}(X) ;$$
$$\frac{1}{X^n-1} \text{ dans } \mathbf{C}(X) ; \frac{1}{X(X+1)\cdots(X+n)} \text{ dans } \mathbf{Q}(X).$$

Exercice 13 En utilisant la dérivée logarithmique, décomposer la fraction rationnelle $F = X^{n-1}/(X^n-1)$ en éléments simples dans $\mathbf{C}(X)$.

Exercice 14 Existe-t-il $F \in K(X)$ tel que $F' = 1/X$? telle que $F' = F$?

Exercice 15 Soit K un corps. Déterminer toutes les fractions rationnelles $F \in K(X)$ vérifiant $F + XF' = 0$.

Exercice 16 Soit K un corps. Montrer que l'application $F \mapsto F'/F$ est un morphisme du groupe multiplicatif $K(X)^*$ vers le groupe additif $K(X)$. Quel est son noyau (on distinguera suvant $\mathrm{car}(K)$) ? Est-il surjectif ?

Exercice 17 Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ non constant. En décomposant P'/P en éléments simples, montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Exercice 18 On appelle *résidu* de $F \in \mathbf{C}(X)$ en $\lambda \in \mathbf{C}$ le coefficient de $1/(X-\lambda)$ dans la décomposition de F en éléments simples.

(b) Soit $F = P/Q$ avec $P, Q \in \mathbf{C}[X]$ premiers entre eux, et λ un pôle simple de F. Montrer que le résidu de F en λ vaut $P(\lambda)/Q'(\lambda)$.

(c) On appelle *résidu à l'infini* de F, le résidu en 0 de la fraction rationnelle $F_\infty(T) = -F(1/T)/T^2$. Montrer que pour tout $F \in \mathbf{C}(X)^*$, la somme des résidus de F (y compris à l'infini) est nulle.

(d) En déduire le résidu à l'infini de P'/P pour $P \in \mathbf{C}[X]$ non nul.

Exercice 19 Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ non nul et $F = P'/P$.

(a) Exprimer P''/P en termes de F et F'.

(b) On suppose que P possède au moins deux racines et que P'' divise P. Montrer que P est à racines simples.

(c) On suppose que $P \in \mathbf{R}[X]$ possède au moins deux racines réelles et que P'' divise P. Montrer que P est scindé à racines simples dans $\mathbf{R}$.

Exercice 20 Soit K un corps. Montrer que tout automorphisme φ du corps $K(X)$ qui fixe K est de la forme $\varphi(F(X)) = F((aX+b)/(cX+d))$ avec $ad - bc \in K^*$. À quelle condition φ laisse-t-il stable $K[X]$?